PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 8

GEOMETRÍA

Medición y semejanza de triángulos

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

SEP
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
ILCE
BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 8

GEOMETRÍA

Medición y semejanza de triángulos

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Geometría

Módulo 8: Medición y semejanza de triángulos

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, c.p. 14200,
Tlalpan, ciudad de México, D.F.
www.upn.mx

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-180-2 módulo 8

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

OBJETIVOS

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

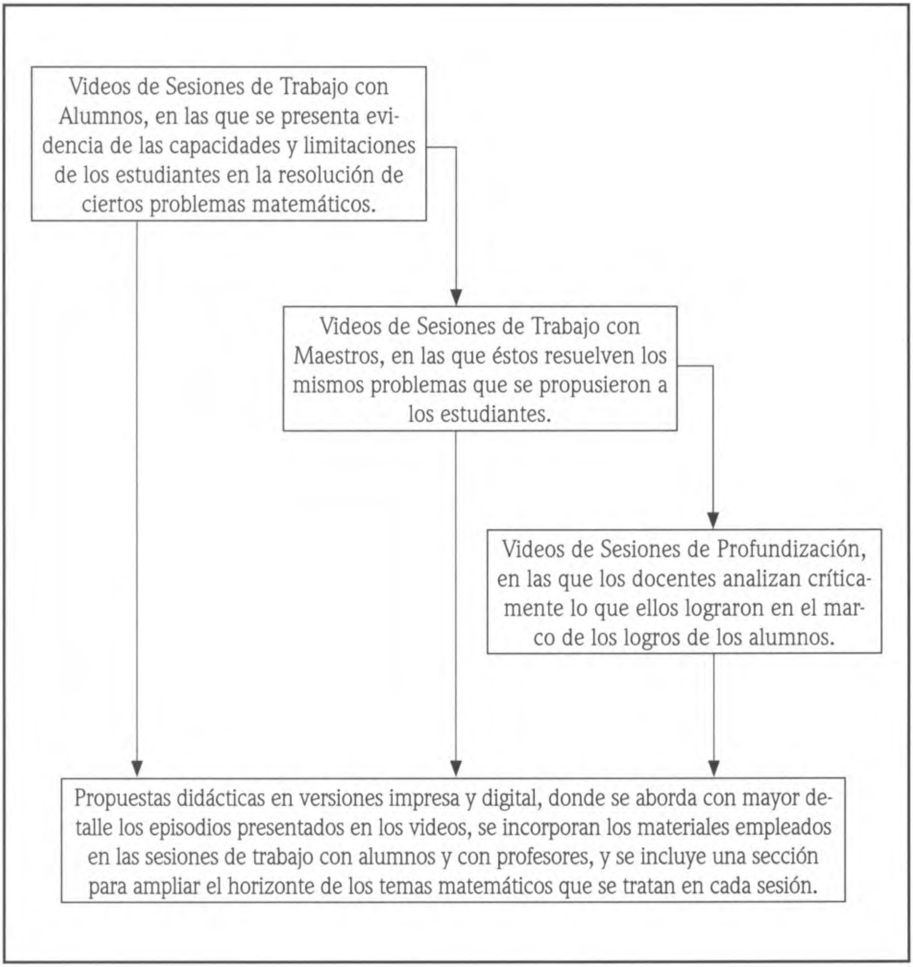
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*, 1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education,* 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. “Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom”, en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, “Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom”, en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

Dos triángulos son semejantes entre sí
cuando son indistinguibles excepto por su tamaño.
G. W. Leibniz (1646-1716)

En los 1950, se enunciaron consignas en relación con la enseñanza de la geometría como la siguiente: "Permitan que Arquímedes y no Euclides sea nuestro guía" (Meder, 1958, p. 584). También se hicieron aseveraciones en el sentido de que Euclides había escrito *Los elementos,* una obra sobre geometría y aritmética, para preparar filósofos y no matemáticos (véanse, por ejemplo: Meder, 1958; y Daus, 1960). Pero conviene hacer notar que incluso Arquímedes (*ca.* 287-212 a. C.) basó sus investigaciones en Euclides: Proclo nos informa que "Arquímedes, quien vivió después de la época del primer Ptolomeo, menciona a Euclides" (Proclus, 1992, p. 56).

Varios escritores han valorado la importancia histórica de esa obra de Euclides por su influencia en todas las generaciones desde que fue escrita: durante más de dos milenios ha mostrado a la humanidad cómo usar el poder del razonamiento deductivo para lograr el conocimiento. Gemignani (1967, p. 162) concluye que "la obra de Euclides [...] durante mucho tiempo fue una fuente de inspiración para los matemáticos y es el fundamento y la guía para algunas partes de las matemáticas más finas incluso hasta la época presente".

En cuanto al aprendizaje de la geometría en la educación secundaria (grados 7 a 9), desde 1950 se dio énfasis al rigor lógico y se hicieron a un lado o se ignoraron las relaciones con las experiencias de los alumnos en el mundo que los rodea. Esta pedagogía antihistórica se basó en la suposición de que, para un aprendizaje óptimo, las matemáticas se deberían enseñar en una secuencia lógica de acuerdo con su organización formal. Este enfoque no ha tenido éxito.

Desde los 1980, se ha fortalecido la postura de que la investigación educativa puede contribuir al mejoramiento de las prácticas de enseñanza de las *matemáticas escolares* (un *corpus* distinto al de las matemáticas mismas, aunque fuertemente ligado a éstas). Más importante aún ha sido el señalamiento de que la investigación educativa en las matemáticas escolares puede "servir como una herramienta analítica para estudiar las relaciones entre las matemáticas y la sociedad en su conjunto" (Schubring, 1992, p. 49). Hans Freudenthal (1992, p. 27), en la parte final de una conferencia que dio en 1980, señaló la importancia de la investigación educativa siempre que se llevara a cabo *en* el ámbito de la educación y no que se hiciera investigación *de* la educación.

En años recientes, se ha puesto menos énfasis en el enfoque axiomático de la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. Ahora se intenta que en este nivel educativo las ideas, nociones y conceptos de la geometría se aborden con base en la experiencia de los alumnos, auxiliándose de objetos tangibles como lo puede ser un geoplano de madera, el doblado de papel o unas ligas de hule. Actualmente no es una meta dentro del aprendizaje de la geometría en la educación secundaria que los alumnos desarrollen habilidades en los métodos de demostración.

Hay reportes de investigación que concuerdan en la conveniencia de reintegrar el razonamiento espacial en las matemáticas escolares. Bishop (1992, p. 29), por ejemplo, explicó que la geometría trata de la matematización del espacio; a este respecto señaló que existen tres áreas conceptuales en las que aparecen obstáculos para los alumnos en el aprendizaje de la geometría: *a)* aprendizaje acerca del espacio, *b)* aprendizaje acerca de la matematización del espacio, y *c)* aprendizaje acerca de la geometría; en su tratamiento de esta tercer área Bishop destacó el papel que desempeña la visualización.

En el desarrollo de las distintas actividades diseñadas para los tres módulos de geometría de la serie de matemáticas, tanto alumnos como maestros participaron en el planteamiento de conjeturas, sin que se tuviera como meta final la demostración formal de las mismas: para validarlas, incluso, se utilizaron procedimientos de índole empírica (mediciones directas, por ejemplo). Los tres temas generales de geometría seleccionados para desarrollarse en las sesiones de trabajo con los alumnos y en los talleres con los maestros fueron los siguientes:

- Medición y semejanza de triángulos
- Medición y razones trigonométricas
- Áreas y Teorema de Pitágoras

En las sesiones de trabajo con los alumnos y en los talleres con los maestros, que se videograbaron, los tres temas se desarrollaron estudiando sus relaciones con otras áreas de las matemáticas escolares, como la aritmética, el álgebra, y el registro y procesamiento de la información. Por otra parte, los temas de geometría mencionados se incluyen en los programas oficiales de la educación secundaria en la mayoría de los países, particularmente, en los de América Latina y el Caribe.

En el presente módulo 8 de esta propuesta didáctica se incluyen los criterios de semejanza de triángulos. El módulo 9 es una introducción al estudio de la trigonometría en la educación secundaria, y el módulo 10 trata sobre el Teorema de Pitágoras.

Como se mencionó, durante el desarrollo de las sesiones de trabajo no se puso énfasis en cuestiones formales de demostración, aunque sí se validaron los resultados a que se llegaba. La atención se centró en el descubrimiento por parte de alumnos y maestros, partiendo de lo que ellos ya conocían y avanzando aún más a partir de sus nuevos logros.

En el apartado de "Ampliación del tema", de cada uno de los tres módulos, se han desarrollado presentaciones de resultados relacionados con los temas seleccionados. Esto se llevó a cabo bajo la perspectiva de que la recreación de determinados resultados matemáticos sea útil a los maestros para fortalecer su conocimiento de las matemáticas que están enseñando, y que aborden esos temas un poco más allá de lo que los programas de estudio para sus alumnos les exigen. Así, se incluye una demostración de la "fórmula de Herón" en cada uno de los tres módulos como una muestra de la interrelación de los temas seleccionados para la sección de geometría. Esa "fórmula" es un algoritmo que permite calcular el área de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.

MEDICIÓN Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

De las muchas aplicaciones de la proporcionalidad, sobresalen la regla de tres, el tanto por ciento, el interés y sus derivados, el repartimiento proporcional y sus derivados, etc. La proporcionalidad desempeña un papel central en la medición, la presentación y el tratamiento de la información, el estudio de la variación y la geometría. Particularmente, en geometría sobresale su aplicación en problemas relacionados con segmentos proporcionales, en figuras semejantes, en el uso de escalas y gráficas, etcétera.

Desde hace más de dos mil años, individuos de varias civilizaciones ya diseñaban mapas muy precisos de distintas regiones en el mundo —a los creadores de mapas se les llama actualmente *cartógrafos*—. Pero, además de los cartógrafos, no debemos olvidar que hasta nuestros días perduran pinturas rupestres en las que quedaron representados diversos aspectos del ámbito en el que se desenvolvían quienes las crearon, aunque sus representaciones son muy esquemáticas y con poco parecido a la realidad en cuanto a precisión de los trazos.

Gracias a los avances tecnológicos, hoy en día podemos observar fotografías del planeta Tierra tomadas desde la lejanía de satélites artificiales, así como imágenes fotográficas tomadas a distancias más cercanas de diversos objetos: edificios, montañas, ríos, gran variedad de paisajes e, incluso, fotografías de personas. Sin embargo, la técnica fotográfica es muy reciente con respecto al periodo de existencia de la especie humana.

Actualmente, distintos profesionales de áreas como la arquitectura, la ingeniería civil, el diseño industrial y la construcción en general, representan con maquetas sus proyectos de construcción —una maqueta es una representación de objetos reales en tres dimensiones; teóricamente, la maqueta y la construcción real difieren sólo en el tamaño—. Así, se pueden diseñar modelos de objetos tridimensionales reales no sólo mediante dibujos, sino también con pequeños objetos en tres dimensiones que representen aviones, camiones, edificios, centros comerciales, secciones de ciudades, etcétera.

También es usual trabajar con diseños de modelos en tamaño más grande que los objetos reales representados. Es decir, en algunas actividades es necesario contar con una representación más grande de lo que se desee construir, como puede ser el caso de circuitos integrados que se utilizan en la tecnología moderna. Podemos considerar también el caso de las fotografías que, con el uso del microscopio, se obtienen de seres vivos imperceptibles a simple vista.

Una aplicación muy reciente de este conocimiento geométrico tan antiguo, de representar objetos reales mediante objetos de tamaño ya sea más pequeño o más grande que el de los originales, junto con resultados de otras áreas, lo constituye una de nuestras diversiones favoritas: el cine. La manera en que se logra lo que vemos en la "pantalla grande" consiste básicamente en proyectar fotografías de tamaño relativamente pequeño.

Varias de las actividades diseñadas para esta primera parte de la sección de geometría tuvieron que ver con la determinación de la cuarta proporcional. Básicamente, se utilizaron las longitudes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes en su aplicación a diversos problemas ya clásicos y algunos otros que se podían resolver mediante el uso de relaciones funcionales.

Objetivos

Los objetivos planteados para las sesiones de trabajo en el módulo de **Medición y semejanza** de triángulos fueron los siguientes.

Que los alumnos:

- Describieran verbalmente y resolvieran problemas en los que intervienen proporciones en triángulos semejantes.

- Registraran y procesaran la información contenida en enunciados de problemas sobre proporciones en triángulos semejantes mediante esquemas, gráficas y tablas.
- Descubrieran procedimientos y métodos en los que están implicadas las proporciones en triángulos semejantes para medir indirectamente alturas, distancias, recorridos, etcétera.
- Usaran la regla de tres para la determinación de una cuarta proporcional en problemas de triángulos semejantes.

Planeación de las actividades con los alumnos

Primera sesión

Inicio (1 min). El maestro saluda al grupo y explica brevemente que, para motivar el tema de la sesión de trabajo, se verá una videograbación.

Proyección de una videograbación (7 min). La videograbación trata de la proyección de sombras de distinto tamaño sobre la pantalla que ve el público en una escena de teatro (cápsula en videograbación, reproductora de videograbaciones, televisión).

Las sombras en el teatro (4 min). Se pide a los alumnos que discutan en sus equipos de qué trata el problema visto en la videograbación para que después, voluntariamente, alguno de ellos explique ante el grupo su comprensión del mismo (hojas en blanco, plumines, pizarrón y plumones).

Trabajo en equipo (5 min). Los alumnos trabajan en equipo, bajo supervisión del maestro, para resolver el problema planteado (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición y discusión (5 min). Voluntariamente alguno de los alumnos presenta ante el grupo los resultados obtenidos en su equipo, así como el procedimiento seguido para resolver el problema planteado, y se discuten con el grupo los resultados presentados en el pizarrón (pizarrón y plumones).

Las sombras de una estaca sobre la pared (2 min). Se explica brevemente, sólo en forma verbal (sin hacer uso de representaciones gráficas en el pizarrón o con algún otro material), el problema de determinar el tamaño de la sombra que se proyecta de una estaca de 10 cm sobre una pared usando una fuente luminosa colocada a 2 m de la pared, tamaño que dependerá de la colocación de la estaca entre la pared y la fuente luminosa.

Hoja de trabajo 1 (10 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 1*; se explica brevemente en qué consiste la actividad de completar la tabla que aparece en esta hoja —se pide completar datos sobre el problema planteado de la estaca—. Los alumnos trabajan en equipo y después, voluntariamente, alguno de ellos presenta ante el grupo el procedimiento seguido en su equipo para resolver el problema de la sombra de la estaca. Finalmente, distintos alumnos completan los datos que hacen falta en la tabla presentada en un rotafolios (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras, rotafolios, pizarrón y plumones).

Hoja de trabajo 2 (10 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 2*; en ésta se pide completar otros datos sobre el mismo problema planteado de la estaca; los alumnos trabajan en equipo para completar la tabla en esta hoja, y después distintos alumnos completan los datos de la tabla presentada mediante un rotafolios; se proyecta un esquema del problema, diseñado con *software* de geometría, para verificar los resultados (rotafolios, fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras, pizarrón, plumones, cañón, computadora y pantalla).

Exposición (5 min). Distintos alumnos explican a sus compañeros del grupo los procedimientos que siguieron para determinar los datos, verificados en el punto anterior con el *software*, de las tablas 1 y 2 de las hojas de trabajo respectivas y que también se presentaron en un rotafolios (rotafolios, pizarrón y plumones).

Conclusión y despedida (1 min). El maestro describe brevemente lo logrado en esta sesión de trabajo y enuncia lo que se tratará en la siguiente sesión, antes de despedirse.

Segunda sesión

Inicio (3 min). El maestro saluda al grupo; se inicia esta segunda sesión resumiendo el trabajo que los alumnos realizaron durante la primera sesión para resolver el problema planteado de las sombras en el teatro (plumones y pizarrón).

Discusión y exposición (4 min). Los alumnos discuten en sus equipos los procedimientos para resolver el problema de las sombras, y después un alumno explica al grupo el procedimiento aritmético empleado (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras, plumones y pizarrón).

Hoja de trabajo 3 (10 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 3*; el maestro explica brevemente en qué consiste la actividad: se pide completar datos en una tabla de acuerdo con un esquema que representa el problema de proyección de sombras de un objeto sobre una pared; los alumnos trabajan en equipo para completar la tabla en esta hoja; después, distintos alumnos explican a sus compañeros del grupo los procedimientos que siguieron para determinar los datos faltantes en la tabla y la completan en un rotafolios; se discuten con el grupo los resultados presentados en el pizarrón (hojas en blanco, fotocopias, plumines, calculadoras, rotafolios, pizarrón y plumones).

Proyección de una videograbación (6 min). El maestro explica brevemente que, para continuar con las actividades de esta segunda sesión de trabajo, se verá una videograbación. La videograbación trata del problema de medir indirectamente la longitud de un lago (cápsula en videograbación, reproductora de videograbaciones, televisión).

Discusión (2 min). Se discute con los alumnos su comprensión del problema del lago presentado en la videograbación (pizarrón y plumones).

Hojas de trabajo 4 y 5 (6 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 4*, y se muestra el mismo diagrama que aparece en ésta, mediante una proyección; enseguida se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 5* y el maestro explica nuevamente de qué se trata el problema del lago, pero ahora con datos precisos de medición de longitudes; los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para resolver el problema, y después integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado (plumones, pizarrón, cañón, computadora, pantalla, fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Hoja de trabajo 6 (8 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 6* y el maestro explica brevemente de qué se trata el problema planteado en ésta sobre consumo de combustible de vehículos; los alumnos trabajan en equipo para dar respuestas a las preguntas planteadas en esta hoja; distintos alumnos explican a sus compañeros del grupo los procedimientos que siguieron para obtener los datos pedidos, y se discute con los alumnos los procedimientos seguidos para encontrar las respuestas a las preguntas planteadas (fotocopias, hojas en blanco, plumines, pizarrón, plumones, rotafolios y calculadoras).

Hoja de trabajo 7 (10 min). Se entregan a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 7* y el maestro explica brevemente de qué se trata el problema de completar los datos en la tabla 4 que aparece en esta hoja; los alumnos trabajan en equipo para completar los datos que faltan en esta tabla, y después distintos alumnos explican a sus compañeros del grupo los procedimientos que siguieron para obtener los datos pedidos (fotocopias, hojas en blanco, plumines, pizarrón, plumones, rotafolios y calculadoras).

Conclusión y despedida (1 min). El maestro felicita al grupo por sus logros durante las dos sesiones de trabajo antes de despedirse.

Descripción de las actividades

Primera sesión

El maestro saludó al grupo y brevemente indicó que durante ésta y la siguiente sesión de trabajo en la clase de matemáticas se llevarían a cabo distintas actividades y que se resolverían problemas y ejercicios de un tema en particular, pero no mencionó, a propósito, de qué tema se trataba. Enseguida, pidió a los alumnos que vieran con atención en la televisión una cápsula de videograbación de 6 minutos sobre proyecciones de sombras.

Luego se preguntó a los alumnos si habían entendido de qué trataba el problema visto en la videograbación. Contestaron que sí y, entonces, el maestro pidió que alguno de ellos pasara al pizarrón y explicara mediante un dibujo o un diagrama el planteamiento del problema, sin resolverlo, sólo para mostrar que ya habían entendido de qué trataba. Como ninguno de los alumnos estuvo dispuesto aún para explicar su entendimiento del problema al grupo, el maestro les pidió que durante unos pocos minutos discutieran en sus equipos de qué trataba el problema y, posteriormente, un alumno explicó a sus compañeros su comprensión del mismo.

Se pidió a los alumnos que continuaran trabajando en equipo para resolver el problema. Esto es, que determinaran a qué distancia de una fuente luminosa debería pararse una persona que medía 1.50 m para que su sombra proyectada sobre un telar fuese de 3 m, y a qué distancia para que su sombra fuese de 2 m. El maestro supervisó el trabajo que realizaban los alumnos en cada equipo, y resolvió dudas adicionales acerca del planteamiento del problema. Notó que varios alumnos en distintos equipos habían obtenido las respuestas correctas y les pidió que le explicaran sus procedimientos. Uno de los alumnos pidió una regla graduada, la cual quería utilizar para medir, en un diagrama que había hecho en una hoja, la longitud de un segmento rectilíneo y así verificar si su respuesta era correcta (el maestro le informó que no se tenía una regla graduada y que trataran de verificar sus respuestas "aritméticamente").

Un alumno explicó en el pizarrón que para obtener una sombra de 3 m, la persona que medía 1.50 m debía pararse a una distancia de 2 m de la fuente luminosa —a la mitad, había dicho este alumno—, estando el telar en el que se proyectarían las sombras a 4 m de la fuente luminosa. Luego, otro alumno dibujó en el pizarrón un diagrama análogo, y fue notable que se basara en que como la altura de la persona cuya sombra se tenía que proyectar no cambiaba, podía trazar una línea recta *paralela* a la que representaba al piso para indicar la estatura de la persona, independientemente del lugar dónde estuviera parada en el piso.

Otro alumno explicó en el pizarrón que si multiplicaba 150 cm por 1.3333333333... (esto es, por 1 más $\frac{1}{3}$) obtendría los 2 m de altura; aseveró que el valor 1.3333333333... indicaba la distancia a la que debería pararse la persona de 1.50 m para que su sombra fuese de 2 m. Cuando el maestro preguntó cuál resultado *creían* que era el correcto, si 1.3333333333... m o 3 m, un alumno explicó que él creía que el resultado correcto era el de 3 m, ya que se observaba a simple vista en el diagrama que el punto donde se cruzan las líneas que representan la altura de la persona y la que une el punto que representa la fuente luminosa con el extremo superior de la sombra de 2 m, se da a 3 m de distancia de la fuente luminosa y no a 1.3333333333... metros.

El maestro hizo un breve resumen de los resultados obtenidos sin el uso de operaciones aritméticas. Indicó que a continuación plantearía un nuevo problema parecido al que habían resuelto. Además, se pidió que cuando hubiesen resuelto este nuevo problema, trataran de verificar si las distancias de 2 m, 3 m y 1.3333333333... m que habían determinado en su resolución del problema anterior eran correctas.

El maestro pidió que se imaginaran un experimento que consistía en proyectar con una fuente luminosa la sombra de una estaca sobre una pantalla. Se describió que la estaca medía 10 cm y la distancia entre la fuente luminosa y la pantalla era de 2 m. Primero se quería que la longitud de la sombra proyectada fuese de 20 cm. ¿A qué distancia de la fuente luminosa debería colocarse la estaca para que ocurriera lo anterior? Este planteamiento se hizo sólo en forma verbal, sin recurrir a representaciones gráficas en el pizarrón o mediante algún otro material.

Enseguida, el maestro les entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 1*, en la que se pedía completar una tabla con datos sobre el problema planteado de la estaca. El maestro explicó en qué consistía esta actividad de completar la tabla, haciendo notar que, por ejemplo, en la primera línea aparecía que la distancia de la estaca a la fuente luminosa era de 20 cm, pero hacía falta el tamaño en centímetros de la sombra proyectada. El tamaño de la estaca y la distancia entre la fuente luminosa y la pantalla no cambiaban.

El maestro supervisó el trabajo que realizaban los alumnos en cada equipo y dio algunas sugerencias para que avanzaran. En un equipo, se les ayudó a visualizar qué ocurría con el tamaño de la sombra conforme la estaca se alejaba de la fuente luminosa o se acercaba a ésta; en otro equipo, preguntaron si podían utilizar una regla de tres para hacer sus cálculos y se les dijo que trataran de usarla, y en otro equipo se les indicó que explicaran qué ocurría cuando la distancia entre la estaca y la fuente luminosa era de 200 cm, el caso del último renglón en la *Hoja de trabajo 1*. Luego, en este tercer equipo se les pidió que resolvieran el caso en que esa distancia era de 100 cm. Obtuvieron las respuestas correctas en estos casos.

La misma tabla que contenía la *Hoja de trabajo 1* se mostró en una cartulina pegada en el pizarrón para que los alumnos la fueran completando y así todos pudieran verificar sus respuestas. Un alumno completó el dato faltante en la tercera fila correspondiente a la primera columna; como el número 50 estaba en ambas columnas de la tabla, se pidió a este alumno que indicara cuál había tomado: estaba trabajando con el de la segunda columna, es decir, tomó el tamaño de la sombra igual a 50 cm. Este mismo alumno completó la última fila de la tabla, en la que se tomó una distancia de 200 cm de la estaca a la fuente luminosa. Explicó que en este caso la estaca quedaba pegada a la pantalla y sin necesidad de cálculos anotó el dato que faltaba: 10 centímetros.

El maestro preguntó al grupo cuál era el resultado con el que se completaba la fila donde aparece el número 100 como distancia en centímetros de la estaca a la fuente luminosa (la octava fila). Algunos alumnos respondieron que la respuesta era 20 y el maestro anotó este resultado en la tabla. Como se indicó antes, estos dos casos, el de 200 cm y el de 100 cm como distancia, por sugerencia del maestro, ya habían sido resueltos correctamente en uno de los equipos antes de que se expusieran a todo el grupo.

Una alumna completó en la cartulina sobre el pizarrón los resultados que hacían falta en las filas 10, 9, 7, 5, 2 y 1, en este orden, y luego otro alumno completó los que faltaban en las filas 4 y 6. Así, se terminó de completar la tabla de la *Hoja de trabajo 1*, habiendo quedado como se muestra a continuación.

Tabla 1

Distancia en centímetros (cm) de la estaca a la fuente luminosa *d*	**Tamaño en centímetros (cm) de la sombra proyectada** *s*
20	**100**
25	80
40	50
31.25	64
50	40
62.5	32
80	25
100	20
125	16
160	**12.5**
200	**10**
Tamaño de la estaca: 10 cm Distancia de la fuente luminosa a la pantalla de proyección: 200 cm	

Mientras se entregaban a cada equipo fotocopias de la *Hoja de trabajo 2*, se indicó que en cuanto se completara la tabla 2 contenida en esta hoja, con referencia al problema planteado de la estaca, se verificarían los resultados con los que habían completado la tabla 1, así como los que obtuvieran para la nueva tabla. El maestro mostró, en la *Hoja de trabajo 2* contenida en una cartulina pegada en el pizarrón, que algunos datos coincidían con los de la tabla 1, escogiendo en particular la primera fila, en la que en la segunda columna aparece el dato 100 como tamaño en centímetros de la sombra proyectada. Preguntó a qué distancia estaría en ese caso la estaca de la fuente luminosa, y los alumnos contestaron que a 20 cm. Los datos en las filas 1, 6, 9 y 11 de la tabla 2 coincidían con los de las filas 1, 7, 10 y 11, respectivamente, de la tabla 1. Así, en la tabla 2 el maestro anotó los resultados que hacían falta en las filas que coincidían con la tabla 1: en la fila 1, 20 correspondía a 100; en la fila 11, 200 correspondía a10; en la 6, 80 correspondía a 25, y en la 9, 160 a 12.5, que fue el orden en que los identificaron los alumnos.

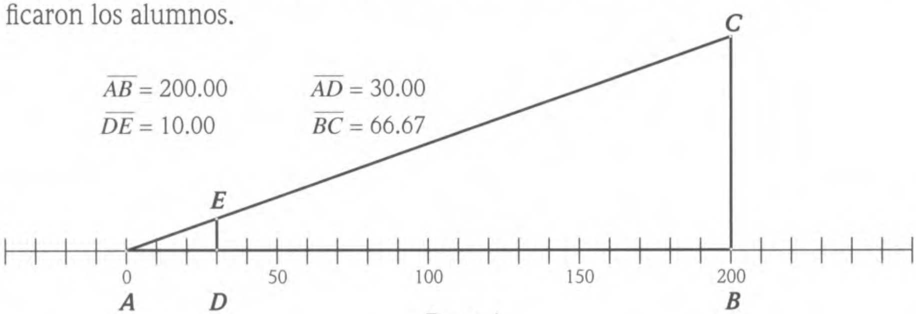


Figura 1

Los alumnos de un equipo indicaron que la segunda fila de esta tabla se completaba con el número 25 en la primera columna. El maestro anotó esta respuesta en la tabla de la cartulina sobre el pizarrón (aunque era incorrecta). Les tomó aproximadamente 3 minutos a los alumnos para empezar a dar las respuestas correctas que completaban la tabla. En un equipo, mediante una regla de tres calcularon que la cuarta fila de la tabla se completaba con 33.3333... en la segunda columna. Cuando dieron su respuesta, el maestro preguntó, antes de anotar, cuál medida de 60 cm habían tomado, si la de la primera columna en la cuarta fila o la de la segunda columna en la tercera fila: habían tomado la primera de éstas.

Antes de que los alumnos continuaran dando sus respuestas para completar la tabla 2, el maestro proyectó en el pizarrón mediante un cañón para computadora un esquema del problema, diseñado con *software* de geometría dinámica (véase la figura 1). En este esquema, anotando el dato correspondiente a la distancia de la fuente luminosa a la estaca, $\overline{AD}$, se obtenía automáticamente el tamaño de la sombra sobre la pantalla, $\overline{BC}$, a la vez que el esquema mostrado cambiaba de acuerdo con los datos utilizados.

Así, se mostró qué ocurría al tomar $\overline{AD}$ = 20 cm. Antes de ver el resultado que se obtenía utilizando el *software*, se pidió a los alumnos que dijeran qué valor numérico se obtendría para el tamaño de la sombra y contestaron que 100, pues ya habían calculado este resultado para la tabla 1. Luego se tomó $\overline{AD} = 25$ cm y se obtuvo $\overline{BC} = 80$ cm, lo cual indicaba que la respuesta dada previamente para $\overline{BC} = 75$ cm no era $\overline{AD} = 25$ cm; para este caso el maestro sólo comentó que algo estaba mal, y continuó probando con otros valores: para $\overline{AD} = 60$ cm se obtuvo $\overline{BC} = 33.33$ cm; para $\overline{AD} = 80$ cm se obtuvo $\overline{BC} = 25$ cm; para $\overline{AD} = 160$ cm se obtuvo $\overline{BC} = 12.5$ cm, y para $\overline{AD} = 200$ cm se obtuvo $\overline{BC} = 10$ cm. Faltaba completar seis filas, incluyendo la segunda. Los alumnos hicieron los cálculos para completar estas filas restantes. Después, el maestro mostró la verificación de cada uno de estos resultados con el modelo hecho mediante *software* de geometría dinámica, y anotó los resultados correctos en la tabla de la cartulina sobre el pizarrón, correspondiente a la *Hoja de trabajo 2*, habiendo quedado ésta como se muestra a continuación.

Tabla 2

Distancia en centímetros (cm) de la estaca a la fuente luminosa d	**Tamaño en centímetros (cm) de la sombra proyectada** s
20	**100**
26.67	75
33.33	60
60	33.33
75	26.67
80	**25**
120	16.67
150	13.33
160	**12.5**
180	**11.11**
200	**10**
Tamaño de la estaca: 10 cm Distancia de la fuente luminosa a la pantalla de proyección: 200 cm	

El maestro pidió que alguien explicara en el pizarrón qué procedimiento habían seguido para hacer sus cálculos y completar las tablas 1 y 2. Una alumna explicó cómo había utilizado una regla de tres. Enseguida, preguntó el maestro si alguien podía explicar gráficamente lo que se había hecho con números y un alumno dibujó para ello en el pizarrón un esquema parecido al de la figura 1.

Con estas dos exposiciones, se concluyó esta primera sesión de trabajo. El maestro felicitó a los alumnos y brevemente hizo resaltar los procedimientos que ellos habían ideado para resolver los problemas planteados en las actividades de esta sesión.

Segunda sesión

Después de saludar a los alumnos, el maestro explicó que en esta segunda sesión iban a continuar aplicando los conocimientos que habían obtenido durante la primera sesión de trabajo en la resolución de diversos problemas. Antes, para revisar los logros de los alumnos en la primera sesión de trabajo, se planteó en el pizarrón esquemáticamente el problema de determinar a qué distancia de una fuente luminosa debían pararse dos personas de 1.5 m de estatura para que sus sombras sobre una pantalla a 4 m de distancia de la fuente luminosa fuesen, respectivamente, de 3 m y de 2 m. Luego se mostró en forma resumida cómo había resuelto este problema uno de los alumnos mediante el procedimiento de trazar en la representación gráfica una línea recta paralela a la horizontal que representaba el piso, a una distancia equivalente a 1.5 m de éste. El maestro preguntó si los resultados habían sido 2 m y 3 m, respectivamente; la respuesta de los alumnos fue afirmativa.

El maestro pidió que mediante alguno de los procedimientos encontrados en la primera sesión de trabajo verificaran que éstas eran las respuestas correctas. Después de aproximadamente 1 minuto de trabajo en equipo, un alumno indicó cómo había utilizado una regla de tres para obtener los resultados de 2 m y 3 metros.

A continuación, el maestro mostró en el pizarrón una cartulina con los datos que aparecen en la tabla de la *Hoja de trabajo 3*, y entregó a los alumnos fotocopias de la misma. El maestro explicó en qué consistía esta actividad de completar la tabla 3 a partir de una figura análoga a la de problemas anteriores sobre proyecciones de sombras. En esta tabla se tienen cinco líneas de cuatro columnas, y aparecen en cada línea tres datos correspondientes a las medidas de tres segmentos en la figura, y se tenía que calcular la medida de un cuarto segmento.

Mientras los alumnos trabajaban, el maestro se acercó a cada uno de los equipos para hacerles preguntas sobre los procedimientos que seguían o los cálculos que hacían para completar la tabla 3. Después de un periodo de aproximadamente 6 minutos, el maestro pidió a los alumnos que se pusieran de acuerdo sobre quién iba a explicar al grupo los detalles de su trabajo para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 3*.

Cinco alumnos mostraron sus cálculos en el pizarrón para determinar la longitud que faltaba de uno de los cuatro segmentos en cada una de las cinco filas de la tabla 3. El maestro pidió que indicaran qué segmentos de la figura correspondían a los números y que se fijaran en la forma en que se tomaban segmentos correspondientes. Así, los resultados que obtuvieron para cada fila fueron los siguientes:

$$\frac{400\times125}{50}=1\ 000,$$

$$\frac{1\ 500\times75}{375}=300,$$

$$\frac{10\times2}{1}=20,$$

$$\frac{20\times25}{100}=5$$

y

$$\frac{10\times5}{8}=6.25\,.$$

Conforme obtenían cada resultado en el pizarrón, lo fueron anotando en la tabla de la cartulina. La tabla 3 se completó como se muestra a continuación.

Tabla 3

Tamaño en centímetros (cm)			
$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\overline{DE}$	$\overline{DB}$
400	**1 000**	50	125
300	1 500	75	375
10	**20**	1	2
25	100	**5**	20
8	10	5	**6.25**

El maestro informó que se plantearían a continuación otros problemas interesantes, pero que antes se iba a ver una cápsula de videograbación. Esta cápsula de 6 minutos aproximadamente trataba sobre la determinación de la longitud de un lago. Después de ver la videograbación, el maestro preguntó a los alumnos si habían entendido de qué trataba el problema y les pidió que discutieran en equipo su comprensión del mismo. Para auxiliarlos en su discusión, se proyectó en el pizarrón la representación de un lago que aparece en la *Hoja de trabajo 4.* Enseguida, se entregaron fotocopias de la *Hoja de trabajo 4* a los alumnos, así como de la *Hoja de trabajo 5.* En esta última, se incluyen datos de las longitudes de los segmentos mostrados en la *Hoja de trabajo 4*, y se pide que con éstos se determine la longitud del lago. Después de trabajar en equipo durante cerca de 1 minuto, un alumno explicó su comprensión del problema y un método de resolución del mismo.

Después de esto, el maestro les sugirió que utilizaran una regla de tres para verificar si obtenían el mismo resultado. El maestro iniciaba la supervisión del trabajo de los alumnos y notó que en el primer equipo al que se acercó habían obtenido ya el resultado (en menos de 1 minuto) mediante el procedimiento sugerido; una alumna pasó al pizarrón y anotó:

$$\frac{500\times 105}{5} = 1\,000 \text{ y } \frac{700\times 10}{7} = 1\,000$$

Para la siguiente actividad, se entregaron fotocopias de las hojas de trabajo 6 y 7 a los alumnos. En la *Hoja de trabajo 6* aparecen tres gráficas lineales en un mismo sistema de coordenadas rectangulares, que representan el rendimiento en kilómetros por litro de combustible de tres vehículos distintos: una camioneta, un automóvil compacto y uno semicompacto. Primero, debían determinar el rendimiento en kilómetros de cada vehículo para 10 litros, y luego para 6 litros.

Los resultados del primer caso los podían determinar visualmente a partir de la gráfica, y así lo hicieron. Indicaron que los resultados eran, respectivamente, 70 km, 160 km y 120 km. El maestro pidió a los alumnos que anotaran estos resultados en su hoja de trabajo. El rendimiento de 6 litros de combustible lo tenían que determinar con exactitud; así que tuvieron que hacer cálculos. El maestro hizo notar que a partir de las gráficas no era tan evidente cuáles eran los resultados, y les sugirió que utilizaran lo que habían aprendido en esta sesión de trabajo e intentaran determinar los resultados mediante cálculos y no mediante visualización directa de las gráficas.

La siguiente actividad consistió en completar la tabla 4 que aparece en la *Hoja de trabajo 7*. En cuanto el maestro dio las instrucciones para esta actividad, un alumno indicó que ya había completado la primera fila de la tabla 4. Luego, otro explicó cómo había completado la segunda fila de la tabla.

Durante casi cinco minutos, el maestro se dedicó a revisar lo que habían hecho en cada equipo para calcular los resultados con los que se tenía que completar la tercera fila de la tabla, aunque en el equipo del alumno que expuso los resultados para la segunda fila, siguiendo el mismo procedimiento, habían llegado a los resultados correctos muy pronto. A causa de que ya se había terminado el tiempo de la clase y ninguno de los alumnos estuvo dispuesto a exponer sus procedimientos y resultados, el maestro explicó lo que había observado que habían hecho en sus equipos: a partir de la proporción $\frac{120}{10} = \frac{400}{?}$, obtuvieron el resultado $\frac{400\times 10}{120} = 33.3\ldots$. Así, la tabla 4 quedaba como se muestra a continuación.

Tabla 4

Consumo (litros)	Rendimiento (km)		
	Camioneta	Auto semicompacto	Auto compacto
11	**77**	**132**	**176**
18.5	**129.5**	**222**	**296**
33.33		400	

Con esta actividad concluyó la segunda sesión de trabajo, y ya no se pidió que se anotaran los otros dos datos en la tercera fila de la tabla 4. Se indicó a los alumnos que en las siguientes sesiones se resolverían problemas de aplicación de lo que habían desarrollado durante estas dos sesiones.

Lo que hicieron los alumnos

Acerca del problema de la proyección de sombras en el teatro, después de discutir en equipo, un alumno explicó su comprensión de este problema de la siguiente manera. Hizo un diagrama en el pizarrón trazando una línea vertical a la que asignó una longitud de 3 m, que era la de una de las sombras que se tenían que proyectar, y sobre la misma vertical indicó con otra marca una longitud más pequeña a la que le asignó 2 m, que era la de la otra sombra que se tenía que proyectar. A partir del pie de la vertical trazó una horizontal —que era el piso, según indicó— a la que le asignó una longitud de 4 m. Señaló que en el otro extremo de la horizontal estaba la fuente luminosa, y que la persona cuya sombra se tenía que proyectar medía 1.50 m de altura. Entonces, explicó que se debía determinar a qué distancia de la fuente luminosa estaría parada la persona para que "se afectara el tamaño de la sombra".

Después, otro alumno explicó en el pizarrón que, para obtener una sombra de 3 m, la persona que medía 1.50 m debía pararse a una distancia de 2 m de la fuente luminosa. Este alumno trazó en el pizarrón un diagrama análogo al que había dibujado antes su compañero que explicó el planteamiento del problema.

Su procedimiento de resolución se dio bajo un pensamiento analítico, esto es, representó con un segmento vertical a la persona de 1.50 m de altura, cuya sombra se tenía que proyectar, diciendo que estaba parada exactamente a la mitad del camino de la fuente luminosa al telar; luego, unió con un segmento rectilíneo el punto que representaba a la fuente luminosa con el extremo superior del segmento vertical que representaba a la persona y lo prolongó hasta su intersección con el segmento rectilíneo que representaba el telar, e indicó que la distancia de este punto de intersección a la horizontal que representaba el piso era de 3 m. Así fue como este alumno y sus compañeros de equipo "vieron" que la persona debía pararse exactamente a la mitad.

Otro alumno dibujó en el pizarrón un diagrama análogo al que usó el alumno anterior: trazó primero la vertical para representar la tela en la que se proyectarían las sombras y marcó en ella una distancia para representar 3 m y otra para representar 2 m de altura; luego, trazó la horizontal en la que marcó una distancia para representar los 4 m del pie del telar hasta la fuente luminosa. Hizo notar que como la altura de la persona cuya sombra se tenía que proyectar no cambiaba, que era siempre de 1.50 m, podía trazar una línea que indicara esta altura de la persona desde el piso, independientemente de dónde estuviera parada; esta línea resultó ser una línea recta *paralela* a la que representaba al piso en el diagrama. Enseguida, trazó un *segmento rectilíneo* desde el punto que representaba los 3 m en el telar hasta el punto que representaba a la fuente luminosa. Señaló *el punto de intersección* de este segmento con la línea que representaba la altura de la persona y desde éste trazó una *perpendicular* a la línea que representaba el piso. Indicó que la distancia del *pie de esta perpendicular* a la fuente luminosa era de 2 m (el alumno no usó los términos indicados con itálicas). Entonces, el maestro le pidió a este alumno que utilizara el mismo procedimiento que acababa de describir para determinar qué debía hacer la persona cuya su sombra tenía que ser de 2 m. Trazó un *segmento rectilíneo* desde el punto que representaba los 2 m en el telar hasta el punto que representaba a la fuente luminosa. Señaló *el punto de intersección* de este segmento con la línea que representaba la altura de la persona y desde éste trazó una *perpendicular* a la línea que representaba el piso. Indicó que la distancia del *pie de esta perpendicular* a la fuente luminosa era de 3 metros.

Un alumno completó el dato faltante en la tercera fila de la tabla contenida en la *Hoja de trabajo 1*, correspondiente a la primera columna. Explicó que el resultado fue obtenido en su equipo mediante la regla de tres $\frac{50}{10}=\frac{200}{?}$. Este ejemplo muestra que los alumnos de este equipo habían utilizado la proporción "tamaño de la sombra *es a* tamaño de la estaca *como* distancia de la fuente luminosa a la pantalla *es a* distancia desconocida". La generalización de esta proporción para el problema que estaban resolviendo los alumnos equivale a considerar que "el tamaño de la sombra es inversamente proporcional a la distancia de la estaca a la fuente luminosa", esto es, el tamaño de la sombra *disminuye* conforme la distancia de la estaca a la fuente luminosa *aumenta.*

Para terminar de completar la tabla 2, una alumna dijo que ya había calculado el resultado correspondiente a $\overline{AD}$ = 150 cm (véase la figura 1): era $\overline{BC}$= 13.33 cm. Explicó que había multiplicado 10 por 200 y dividido el resultado, 2 000, entre 150. Un alumno dijo que había calculado que para $\overline{AD}$ = 120 cm, $\overline{BC}$ = 16.6666666667 cm. Enseguida, otra alumna indicó que para $\overline{AD}$ = 180 cm había obtenido $\overline{BC}$ = 11.1111 … cm; luego, otro alumno indicó que para $\overline{AD}$ = 75 cm había obtenido $\overline{BC}$ = 26.666 … cm. Para la tercera fila, en la que aparece $\overline{BC}$ = 60 cm en la segunda columna, un alumno había calculado $\overline{AD}$ = 33.333 … . Otro alumno dijo que este resultado ya se tenía, pero había hecho referencia a la cuarta fila, en la que aparecen intercambiados estos valores: $\overline{AD}$ = 60 cm y $\overline{BC}$ = 33.333 … cm. Así, finalmente, el maestro pidió a los alumnos que determinaran el resultado correcto para completar la segunda fila. Tomó un poco más de 1 minuto para que en uno de los equipos dijeran que para $\overline{BC}$ = 75 cm, $\overline{AD}$ era igual a 26.666… .

Una alumna explicó cómo había utilizado una regla de tres para hacer sus cálculos y completar las tablas 1 y 2: había multiplicado 10 por 200 y siempre, dijo, le daba 2 000. Este resultado lo dividía entre la distancia correspondiente de la estaca a la fuente luminosa. Ejemplificó con la proporción

$$\frac{80}{10}=\frac{200}{?}\text{, obteniendo que ? = }\frac{2\ 000}{80}=25,$$

como se puede ver en la sexta fila de la tabla 2. Luego, un alumno dibujó en el pizarrón un esquema parecido al de la figura 2 para explicar gráficamente lo que se había hecho con números. Anotó los valores correspondientes a cada uno de los segmentos rectilíneos $\overline{CB}$ = 25 cm, $\overline{AC}$ = 2 m, $\overline{AE}$ = 80 cm y $\overline{BD}$ = 10 cm e indicó qué representaba cada una de estas cantidades en el contexto del problema de la proyección de la sombra de la estaca.

En la segunda sesión, un alumno explicó que había utilizado una regla de tres para verificar los resultados propuestos como solución al problema de la proyección de las sombras en el teatro: había multiplicado 1.5 por 4, lo cual da 6, y al dividir este resultado entre 3, se obtenía 2. Lo mismo hizo para el otro caso: $\frac{1.5\times 4}{2}=3$.

Después de trabajar en equipo durante cerca de 1 minuto sobre el problema de determinar la longitud de un lago, un alumno explicó su comprensión del problema y la resolución del mismo de la siguiente manera. Primero, anotó en la proyección sobre el pizarrón los datos que aparecen en la *Hoja de trabajo 5* de las longitudes de los segmentos rectilíneos marcados en el diagrama de la *Hoja de trabajo 4*. Luego, indicó que en su equipo habían notado que de A a C se tenían 700 m y de C a D, 7 m; por lo que $\overline{CD}$ era 100 veces menor que $\overline{AC}$. Análogamente, indicó que lo mismo ocurría con las distancias $\overline{BC}$ y $\overline{CE}$: que $\overline{BC}$ era 100 veces mayor que $\overline{CE}$. Así, expresó que, por lógica, $\overline{AB}$ debiera ser 100 veces menor que $\overline{ED}$; y que como $\overline{ED}$ medía 10 m, $\overline{AB}$ era igual a 1 000 m. Luego, una alumna anotó en el pizarrón dos formas de llegar al mismo resultado: $\frac{500\times 105}{5}$ = 1 000 y $\frac{700\times 10}{7}$ = 1 000.

Un alumno anotó en el pizarrón las proporciones que había utilizado para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 6*:

$$\frac{10}{70}=\frac{6}{?},\ \frac{10}{160}=\frac{6}{?}\ \text{y}\ \frac{10}{120}=\frac{6}{?},$$

y los resultados que había obtenido para cada vehículo:

$$\frac{70\times 6}{10}=42,\ \frac{16\times 6}{10}=96 \text{ y } \frac{120\times 6}{10}=72.$$

Un alumno hizo lo siguiente para completar la tabla 4 en la *Hoja de trabajo 7*: para la camioneta usó la proporción $\frac{70}{10}=\frac{?}{11}$, y así obtuvo que la camioneta recorrería $\frac{70\times 11}{10}=77$ kilómetros con 11 litros de combustible. Para el automóvil semicompacto utilizó la proporción $\frac{120}{10}=\frac{?}{11}$, habiendo obtenido que este vehículo recorrería $\frac{120\times 11}{10}=132$ kilómetros con 11 litros de combustible. Luego, usó la proporción $\frac{160}{10}=\frac{?}{11}$ y obtuvo que para el automóvil compacto el resultado era $\frac{160\times 11}{10}=176$ kilómetros.

Para completar la segunda línea de la tabla, un alumno explicó que había hecho algo "más fácil": se había dado cuenta de que la camioneta con 10 litros recorría 70 km. Al dividir 70 entre 10 obtuvo 7 km/litro. Entonces, sólo multiplicó 7 km/litro por 18.5 litros y obtuvo 129.5 km. De la misma manera, obtuvo que para el automóvil compacto se tenía $\frac{160}{10}\times 18.5=296$ km y para el automóvil semicompacto se tenía $\frac{120}{10}\times 18.5=222$ kilómetros.

Respuestas no esperadas

No se esperaba que se utilizara el procedimiento geométrico de trazar una línea recta paralela a la que representaba el piso con base en que la altura de la persona cuya sombra se tenía que proyectar en la escena de teatro no cambiaba.

Respecto a este mismo problema, un alumno propuso que si se multiplicaba 150 cm por 1.3333333333... se obtenían los 2 m de altura. No se esperaba que se dijera que el valor 1.3333333333... indicaba la distancia a la que debería pararse la persona de 1.50 m para que su sombra fuese de 2 m. Aunque se le dijo al alumno que había hecho bien sus cálculos, no interpretó adecuadamente su resultado y el maestro no discutió esta situación con el grupo.

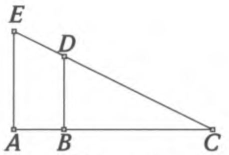


Figura 2

No se esperaba que para la tabla 2 dieran como respuesta el número 25 para la segunda fila en la primera columna, correspondiente a 75 en la segunda columna, pues en la tabla 1 se tenía ya que 25 en la primera columna correspondía a 80 en la segunda.

Dificultades

Nótese que en la tabla 1 la cuarta fila aparece fuera de lugar (debiera intercambiarse con la tercera).

Reglas que no quedaron claras para el desarrollo de las actividades

No se esperaba que algún alumno requiriera una regla graduada para obtener resultados de algunos de los problemas mediante medición directa.

Planeación de las actividades del taller de los maestros

Inicio (1 min). El coordinador de las actividades de trabajo saluda al grupo de maestros participantes en el taller y explica brevemente que se trabajará con problemas de matemáticas que corresponden a los contenidos de los programas de la educación secundaria.

Las sombras en una escena de teatro (2 min). Se explica brevemente, sólo en forma verbal (sin hacer uso de representaciones gráficas en el pizarrón o con algún otro material), el problema de determinar a qué distancia de un telar en un teatro deben pararse dos personas que miden 1.50 m de estatura cada una, para que mediante una fuente luminosa a determinada distancia del telar, sus sombras proyectadas sean respectivamente de 2 m y 3 m; enseguida, los maestros trabajan por parejas, con el auxilio del coordinador del taller, para resolver el problema planteado de las sombras en el teatro (fotocopias, hojas en blanco, lápices, plumines y escuadras).

Exposición (4 min). Uno de los maestros explica a los demás participantes en el taller su comprensión del problema planteado; luego, otro de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido para resolver el problema de las sombras en el teatro, así como los resultados obtenidos (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 1 (10 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 1* a los maestros, el coordinador del taller explica brevemente y discute con ellos en qué consiste la primera actividad del taller: completar datos en la tabla 1 sobre el problema planteado de la estaca; se pide a los maestros que conjeturen cuáles serían algunos de los resultados para completar esta tabla; trabajan por parejas para completarla, con el auxilio del coordinador del taller; después, uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido para determinar los valores con los que se completa la tabla, y se discute con los maestros cuál sería la justificación de los procedimientos seguidos (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras, pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 2 (8 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 2* a los maestros, el coordinador del taller explica brevemente y discute con ellos en qué consiste la actividad de completar la tabla que aparece en esta hoja; los maestros trabajan por parejas para completar esta tabla, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido, y se discute sobre la justificación de ese procedimiento; finalmente, se proyecta un esquema del problema, diseñado con *software* de geometría, para verificar los resultados con que se completaron las tablas 1 y 2 de las hojas de trabajo respectivas (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 3 (8 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 3* a los maestros, el coordinador del taller explica brevemente y discute con ellos en qué consiste la actividad: se pide anotar los datos faltantes en una tabla de acuerdo con un esquema que representa el problema de proyección de sombras de un objeto sobre una pared; los maestros trabajan por parejas para completar esta tabla, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido, y se discute sobre la justificación de ese procedimiento (hojas en blanco, fotocopias, plumines, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 4 (5 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 4* a los maestros, el coordinador del taller explica brevemente y discute con ellos de qué se trata el problema planteado sobre consumo de combustible de vehículos; los maestros trabajan por parejas para contestar las preguntas planteadas en esta hoja, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido (fotocopias, hojas en blanco, plumines, y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 5 (5 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 5* a los maestros, el coordinador del taller explica y discute con ellos de qué se trata el problema con cuyas soluciones se debe completar la tabla que aparece en esta hoja de trabajo; los maestros trabajan por parejas para completar esta tabla, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller el procedimiento seguido, y se discute sobre la justificación de ese procedimiento (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Hoja de trabajo 6 (3 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 6* a los maestros, el coordinador del taller explica brevemente y discute con ellos en qué consiste el problema planteado en esta hoja; los maestros trabajan por parejas para resolver este problema, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de ellos presenta ante los demás participantes el procedimiento seguido, y se discute sobre la justificación de ese procedimiento (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Longitud del lago (5 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 7* a los maestros, se muestra el mismo diagrama que aparece en ésta, mediante una proyección en el pizarrón electrónico; el coordinador del taller explica brevemente de manera verbal que el problema consiste en diseñar un procedimiento para determinar la longitud de un lago; los maestros trabajan por parejas para diseñar un procedimiento de resolución del problema del lago, con el auxilio del coordinador del taller, y después uno de ellos presenta ante los demás participantes un procedimiento diseñado para resolver el problema, y se discute sobre la justificación de ese procedimiento (fotocopias, hojas en blanco, plumines y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Conclusión y despedida (1 min). El coordinador del taller agradece a los maestros su participación y se despide.

Descripción de las actividades del taller de los maestros

El coordinador de las actividades del taller inició agradeciendo de antemano a los maestros su participación. Luego explicó que se iban a plantear diversos problemas relacionados con las matemáticas de los planes y programas de estudio de la escuela secundaria (grados 7 a 9).

Se planteó la siguiente situación: en una escena de teatro es necesario proyectar con una fuente luminosa las sombras de dos actores cuya estatura es de 1.50 m, sobre una pantalla que ve el público, de modo que una sombra sea de 2 m y la otra de 3 m, siendo la distancia de la fuente luminosa a la pantalla donde se proyectan las sombras de 4 m. Entonces, se pidió a los maestros que se tomaran algunos minutos para discutir por parejas cómo resolverían este problema.

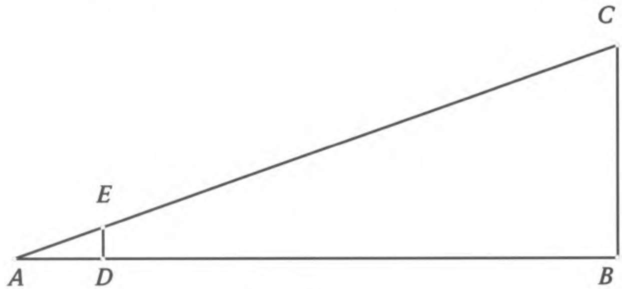


Figura 1

Cuando apenas había transcurrido 1 minuto, el coordinador preguntó si alguien había encontrado algún procedimiento para resolver el problema, aunque todavía no lo hubiesen resuelto. Entonces, un maestro hizo en el pizarrón un diagrama como el que se muestra en la figura 1, para exponer su comprensión del problema, y planteó un método de resolución. En seguida, el coordinador preguntó cuáles eran las soluciones del problema y los maestros contestaron que para obtener una sombra de 3 m la persona debía pararse a una distancia de 2 m de la fuente luminosa, y que para que la sombra fuese de 2 m esa distancia debía ser de 3 metros.

Para desarrollar la siguiente actividad, el coordinador les entregó a los maestros fotocopias de la *Hoja de trabajo 1*. En esta hoja se pedía completar una tabla con datos del experimento de proyectar sobre una pantalla una estaca mediante una fuente luminosa, siendo la estaca de 10 cm de altura y la distancia entre la fuente luminosa y la pantalla de 2 metros.

Se pidió a los maestros que, antes de realizar operaciones aritméticas, contestaran las dos preguntas que aparecen en la *Hoja de trabajo 1*. Sobre cuál sería el tamaño de la sombra si la estaca se colocaba a una distancia de 20 cm de la fuente luminosa, un maestro contestó que del doble y otro contestó que sería de 4 m. A la segunda pregunta, a qué distancia se encontraría la estaca desde la fuente luminosa para que su sombra proyectada fuese de 60 cm, un maestro contestó, sin explicar con precisión los detalles, que sería de "una tercera parte", de la "proporción 60 es a 200", y que simplificando "esa fracción", se obtendría 1/3. Enseguida, indicó el coordinador que se tomaran algunos minutos para hacer sus cálculos y completar la tabla 1 de la *Hoja de trabajo 1.* Mientras los maestros trabajaban por parejas, el coordinador se acercó a cada pareja para pedir que le explicaran qué procedimientos estaban siguiendo y darles sugerencias para su mejor comprensión del problema. Después, uno de los maestros completó correctamente los resultados en la tabla 1, proyectada en el pizarrón electrónico.

Como en las mesas de trabajo los maestros habían comentado que la justificación de los procedimientos seguidos se basaba en el concepto de semejanza de triángulos, el coordinador pidió que alguno de ellos explicara qué significa que dos triángulos son semejantes. Un maestro enunció que esto se cumple cuando "los lados son proporcionales y los ángulos son congruentes". Otro maestro explicó que una condición justifica a la otra, esto es, que si los lados homólogos de los triángulos son proporcionales, entonces, los ángulos son congruentes, y recíprocamente.

A continuación, otro maestro expresó que a partir de la tabla completada se veía que se trataba de un problema de variación directamente proporcional. El coordinador preguntó por qué decía que se trataba de un problema de variación directamente proporcional, y el maestro dio como explicación que al multiplicarse los valores en la misma fila el producto era el mismo para cualquier fila, una constante. El coordinador preguntó al grupo de maestros si estaban de acuerdo con esta observación, y uno de ellos manifestó que no, y este maestro explicó la situación en términos de variables, indicando que se tenían dos en este caso: d, la distancia de la estaca a la fuente luminosa, y s, el tamaño de la sombra. Se hizo notar que conforme aumentaba d, disminuía s; por tanto, se trataba de una variación inversamente proporcional.

La siguiente actividad consistió en completar la tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 2*, que se les había entregado a los maestros junto con la *Hoja de trabajo 1.*

Mientras trabajaban por parejas, el coordinador preguntó si había alguna dificultad adicional para desarrollar esta actividad; el maestro que había explicado a los demás cómo completar la tabla 1 comentó que estaba mucho más fácil completar la tabla 2, ya que podían utilizar los resultados que habían obtenido para aquélla. Así que ya no se pidió que alguien anotara en el pizarrón los resultados obtenidos para completar la tabla 2.

Entonces, se proyectó en el pizarrón electrónico un esquema del problema, diseñado con software de geometría dinámica (véase la figura 2 en la sección "Descripción de las actividades con los alumnos"), para verificar los resultados con que se completaron las tablas 1 y 2. En este esquema, al anotar el dato correspondiente a la distancia de la fuente luminosa a la estaca, $\overline{AD}$, se obtenía automáticamente el tamaño de la sombra sobre la pantalla, $\overline{BC}$, a la vez que el esquema cambiaba de acuerdo con los datos utilizados. Se mostró que para $\overline{AD} = 60$ cm se obtenía $\overline{BC} = 33.33\ldots$ cm. Y así se verificaron otros tres resultados.

A continuación, el coordinador entregó a los maestros fotocopias de la *Hoja de trabajo 3,* y explicó en qué consistía esta actividad de completar la tabla 3 de esta hoja de trabajo. Después uno de los maestros completó correctamente los resultados de la tabla 3 en el pizarrón electrónico.

Enseguida, el coordinador pidió que alguien explicará qué triángulos eran semejantes en la figura que aparecía en el pizarrón electrónico, que era la misma de la *Hoja de trabajo 3*, señalando cuáles eran los lados y los ángulos correspondientes, y un maestro indicó estos elementos en la figura.

Para la siguiente actividad, el coordinador entregó fotocopias de la *Hoja de trabajo 4* a los maestros, y explicó algunos detalles del problema planteado sobre consumo de combustible de vehículos. En esta hoja de trabajo aparecen tres gráficas lineales en un mismo sistema de coordenadas rectangulares que representan el rendimiento en kilómetros por litro de combustible de tres vehículos distintos: una camioneta (cuya gráfica está marcada con un diamante), un automóvil compacto (marcada con un cuadrado) y uno semicompacto (marcada con un triángulo). Se debía determinar el rendimiento en kilómetros de cada vehículo para 6 litros de combustible.

Un maestro comentó que ya había determinado que con 6 litros de combustible la camioneta (en realidad se refería al automóvil semicompacto) recorrería 30 km. Como explicó que había determinado este resultado visualmente, el coordinador le señaló que se pedía el resultado exacto. Primero, se le hizo notar que considerara que la gráfica correspondiente a la camioneta era la marcada con un diamante. Entonces dijo que "más o menos" eran 95 km o 96 km. Se le indicó que se pedía hacer el cálculo con exactitud. Después, este mismo maestro explicó que el resultado exacto era 96 km y que lo había obtenido a partir de que se trataba de una variación directamente proporcional; que había planteado la ecuación de la recta y sustituyendo el valor 6 había obtenido el resultado. Finalmente, el coordinador le pidió que intentara llegar al resultado utilizando lo que hasta ese momento se había discutido en el taller y que no se basara en la ecuación de la línea recta.

Después de que una maestra explicó cómo había determinado que la camioneta recorre 96 kilómetros con 6 litros de combustible, se discutió este resultado a partir de lo que se veía en la gráfica. Entonces, el coordinador preguntó en qué dato se habían basado para el automóvil compacto: se habían basado en que 8 litros correspondía a 60 km y el resultado obtenido fue que este automóvil recorría 45 km con 6 litros de combustible. Análogamente, ocurrió que para el automóvil semicompacto se habían basado en que 4 litros correspondía a 20 km (después, un maestro indicó que pudieron haberse basado en que 8 litros correspondía a 40 km) y el resultado obtenido fue que este automóvil recorría 30 km con 6 litros de combustible.

La siguiente actividad consistió en completar la tabla 4 que aparece en la *Hoja de trabajo 5*. Después de un poco más de 1 minuto de trabajar en equipo, uno de los maestros completó la tabla 4 en el pizarrón electrónico, habiendo quedado ésta como se muestra a continuación.

Tabla 4

Consumo (litros)	Rendimiento (km)		
	Camioneta	Auto semicompacto	Auto compacto
11	**176**	**55**	**82.5**
18.5	**296**	**92.5**	**138.75**
80	**1 280**	400	**600**

El coordinador explicó en qué consistía el problema planteado en la *Hoja de trabajo 6*. Luego, uno de los maestros participantes en este taller explicó su método de resolución en el pizarrón electrónico sin ninguna dificultad, como un problema de naturaleza muy rutinaria para él: planteó la proporción $\frac{6}{x}=\frac{10}{1.25}$ y a partir de ésta obtuvo que $x = \frac{6\times 1.25}{10} = 0.75$.

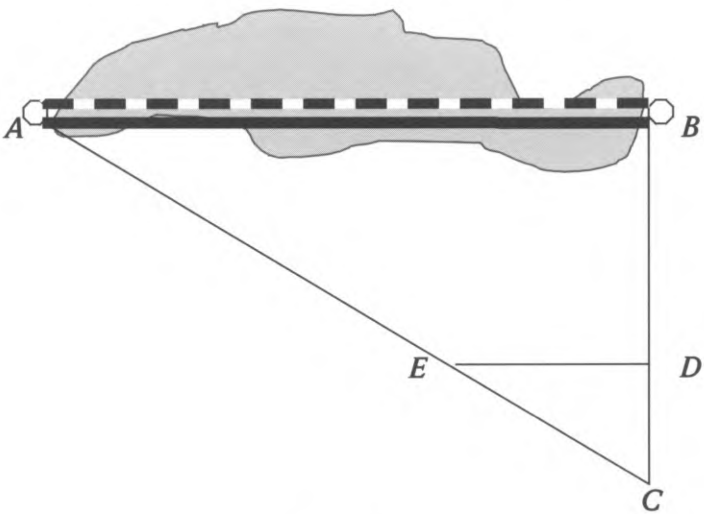


Figura 2

El coordinador explicó en qué consistía el problema planteado en la *Hoja de trabajo 7*, mostrando el diagrama del lago en el pizarrón electrónico; se puso énfasis en que sí se tiene acceso a cada uno de los puntos A y B, los dos extremos más alejados del lago entre sí, pero que no se puede medir directamente la distancia que hay del punto A al punto B. Los maestros trabajaron por parejas durante casi dos minutos diseñando algún procedimiento para resolver el problema del lago. Según observó el coordinador del taller, los procedimientos diseñados estuvieron basados en la semejanza de triángulos. Un maestro explicó ante los demás uno de estos procedimientos y, con la ejemplificación que hizo del problema del lago dando valores fijos a determinadas longitudes del diagrama que se muestra en la figura 2, concluyó este taller de matemáticas para maestros de secundaria.

Lo que hicieron los maestros

Acerca del problema de la proyección de sombras en el teatro, un maestro hizo en el pizarrón un diagrama como el que se muestra en la figura 1, anotando que se tomaban $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$ y $\overline{DE} = 1.5$. Luego indicó que por semejanza de triángulos, "en cuanto a proporción", se tenía que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}, \text{ por lo que } \overline{AD} = \frac{\overline{AB} \times \overline{DE}}{\overline{BC}},$$

y explicó que sustituyendo los valores numéricos se tendría la solución del problema para obtener una sombra de 3 m, y que cambiando este valor de $\overline{BC}$ por 2 m, se tendría la solución de la otra parte del problema. De esta manera, el maestro que expuso su comprensión del problema, planteo asimismo un método de resolución.

El maestro que completó correctamente los resultados en la tabla 1, proyectada en el pizarrón electrónico, antes de anotarlos explicó que se había basado en la proporción $\frac{d}{200} = \frac{10}{s}$, siendo d la distancia de la estaca a la fuente luminosa y s el tamaño de la sombra, como se indica en los encabezados de las columnas de la tabla 1.

El maestro que anotó los resultados correctos que completaban la tabla 3 proyectada en el pizarrón electrónico, explicó cómo había determinado el número que hacía falta en la segunda fila de la tabla. Auxiliándose del esquema que acompañaba a la tabla 3, mostró que había utilizado la proporción $\frac{1\,500}{375}=\frac{x}{25}$ para obtener $x = 300$.

En cuanto al problema de kilómetros recorridos por litro de combustible, una maestra explicó ante los demás maestros que se había basado en que era claro a partir de las gráficas que la camioneta recorría 160 km con 10 litros; así que debía determinar cuántos kilómetros recorrería la camioneta con 6 litros. Esto es, usó la proporción $\frac{10}{160}=\frac{6}{?}$ y, verbalmente, explicó que las operaciones que había hecho fueron $\frac{6\times160}{10} = 96$.

El maestro que completó correctamente la tabla 4 en el pizarrón electrónico, ejemplificó el procedimiento mediante el cual había obtenido los resultados, explicando que como la camioneta rinde 16 kilómetros por litro, sólo multiplicó 11 por 16 y así obtuvo 176. Desde luego que este procedimiento equivale gráficamente a considerar un triángulo rectángulo cuya longitud de base represente 1 litro, y su altura el rendimiento en kilómetros (1 es a 16, en el caso de la camioneta) semejante al triángulo rectángulo cuya longitud de base represente la cantidad de litros dada, y su altura el rendimiento en kilómetros que se tiene que determinar (11 es a x, en el caso de la camioneta). Esto es, a partir de que $\frac{1}{16}=\frac{11}{x}$ se obtiene que $x = \frac{11\times16}{1} = 176$.

Para el problema del lago, planteado en la *Hoja de trabajo 7*, un maestro describió el siguiente procedimiento de resolución. Trazó una línea perpendicular a $\overline{BC}$ hasta determinado punto C, como se muestra en el diagrama de la figura 2. Unió el punto A con el punto C mediante un segmento rectilíneo y trazó $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AB}$ (esto es, perpendicular a $\overline{BC}$) por determinado punto D intermedio de $\overline{BC}$. Enseguida, hizo notar que de esta manera se formaban dos triángulos semejantes: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$; por lo que entre otras proporciones se obtenía que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$, siendo entonces $\overline{AB} = \frac{\overline{BC}\times\overline{DE}}{\overline{CD}}$. Y ejemplificó dando los valores $\overline{BC} = 10$ m, $\overline{CD} = 2$ m y $\overline{DE} = 5$ m, en cuyo caso la longitud $\overline{AB}$ del lago sería de 25 metros.

Respuestas esperadas

En cuanto al problema de la proyección de sombras en el teatro, sí se esperaba que alguien lo explicara mediante un diagrama como el de la figura 1.

Sí se esperaba que utilizaran sus conocimientos de semejanza de triángulos para resolver los distintos problemas que se plantearon durante el taller.

Sobre semejanza de triángulos, sí se esperaba que pudieran distinguir entre la definición y los teoremas de que *a)* si los lados homólogos de dos triángulos son proporcionales, entonces, los ángulos homólogos son congruentes, y *b)* que si los ángulos homólogos de dos triángulos son congruentes, entonces, los lados homólogos de los triángulos son proporcionales. Aunque también se esperaba que se discutiera con este grupo de maestros que es suficiente la congruencia de dos ángulos homólogos para que los triángulos sean semejantes, lo cual no se dio.

Se esperaba que no tuvieran dificultades adicionales para completar la tabla 2 y que ya no hubiese necesidad de discutir los resultados en ésta.

En cuanto al problema del lago, sí se esperaba que el procedimiento de resolución que diseñaran estuviese basado en la determinación de triángulos semejantes.

Respuestas no esperadas

No se esperaba que quien explicara su comprensión del problema de la proyección de sombras en el teatro inmediatamente planteara un método de resolución.

En cuanto al problema de la proyección de la sombra de la estaca, no se esperaba como respuesta a la pregunta de que si la estaca se colocaba a una distancia de 20 cm de la fuente luminosa, el tamaño de la sombra sería del doble o de 4 m. La respuesta correcta a la pregunta de a qué distancia se encontraría la estaca desde la fuente luminosa para que su sombra proyectada fuese de 60 cm es a 33.33... cm. Pero no se esperaba que alguien diera esta respuesta tan rápido, aunque sin explicar con precisión los detalles: un maestro indicó que esa distancia sería de "una tercera parte", de la "proporción 60 es a 200", y que simplificando "esa fracción", se obtendría 1/3.

No se esperaba que con referencia a la tabla 1, ya con todos los resultados, se trataran los temas de variación directamente proporcional e inversamente proporcional, y mucho menos que algún maestro inicialmente dijera que el problema de la proyección de la sombra de la estaca era uno de variación directamente proporcional, porque los productos de los dos datos en una misma fila era constante para todas las filas.

En cuanto al problema de las gráficas del kilometraje recorrido por consumo de combustible de vehículos, no se esperaba que los maestros confiaran demasiado en la visualización para obtener los resultados; tampoco se esperaba que alguien lo resolviera mediante la determinación de las ecuaciones de estas gráficas lineales. Luego, para completar la tabla 4 referente a este mismo problema, no se esperaba que alguien determinara primero cuántos kilómetros recorría cada vehículo por 1 litro de combustible y, luego, simplemente multiplicar el resultado por el número de litros que aparecen en la tabla.

En cuanto al problema del lago, no se esperaba que quien expuso ante los demás un procedimiento de resolución mediante semejanza de triángulos planteara un ejemplo con medidas precisas (esto es, se esperaba que hiciera sólo el planteamiento general de resolución).

Reglas que no quedaron claras para el desarrollo de las actividades

Uno de los maestros intentó utilizar expresiones algebraicas para representar las gráficas de la distancia recorrida por distintos vehículos dependiendo del consumo de combustible, por lo que se entiende que faltó dar énfasis a que el tema de estudio durante el taller era de geometría, y particularmente de semejanza de triángulos.

Lo que señalaron los maestros

Un señalamiento que destacó durante el desarrollo del taller, fue que quien expuso ante todos su resolución del problema de la *Hoja de trabajo 6* comentó que ya había resuelto muchos problemas parecidos a éste.

Recomendaciones para la enseñanza

El maestro debe estar alerta para captar cuándo los alumnos plantean procedimientos de resolución inesperados o, incluso, desconocidos por uno. En las sesiones de trabajo del módulo **Medición y semejanza de triángulos**, no esperaba el maestro que se propusiera como método de resolución del problema de las sombras en el teatro la utilización de una línea recta paralela al piso, para representar *la invariancia* de la altura de la persona independientemente de dónde estuviese parada con referencia a la fuente luminosa. Como maestro, se debe estar preparado para identificar o encontrar lo que no se busca, a partir de las propuestas de los alumnos.

Por otra parte, también debe ponerse atención a respuestas erróneas de los alumnos: tales respuestas pueden surgir de interpretaciones equivocadas de procedimientos correctos. Por ejemplo, en cuanto al mismo problema de las sombras en el teatro, en una sesión subsiguiente convendrá retomar la respuesta de uno de los alumnos, quien propuso que el valor 1.3333333333... indicaba la distancia a la que debería pararse la persona de 1.50 m para que su sombra fuese de 2 m. Implícitamente, este alumno lo que hizo fue lo siguiente: en el esquema de la figura 3, los triángulos *CBD* y *CAE* son semejantes, siendo la longitud de $\overline{CA}$ de 4 m, la de $\overline{BD}$ de 1.5 m y la de $\overline{AE}$ de 2 m. Se quiere determinar la longitud de $\overline{CB}$. Luego, por la semejanza de estos triángulos,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{2}{1.5} \text{ o } \frac{4}{\overline{CB}} = \frac{2}{1.5}\text{; por lo que } \overline{CB} = 4\left(\frac{1.5}{2}\right) = 3.$$

Si la cuarta proporcional que se tuviera que determinar fuese $\overline{AE}$, se tendría que

$$\frac{4}{3}=\frac{x}{1.5};$$

así,

$$x=(\frac{4}{3})\,(1.5)=(1.3333333333\ldots)\,(1.5)=2.$$

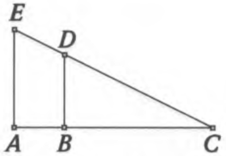


Figura 3

Vale la pena subrayar que $\frac{4}{3}$ representa la razón de $\overline{CA}=4$ —la distancia de la fuente luminosa al telar (véase la figura 3)— a $\overline{CB}=x$ m —la distancia desde la fuente luminosa al punto donde debe pararse la persona para que su sombra sea de 2 m sobre el telar—. Esto es así porque

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BD}}=\frac{2}{1.5}=\frac{4}{3}.$$

En un principio es conveniente aceptar como argumentos de validación de los resultados de los alumnos los que expresan con base en la visualización; en un momento subsiguiente del desarrollo de la sesión de trabajo, se validarán los resultados en otros ámbitos, como el aritmético.

En sesiones de trabajo subsiguientes, deben retomarse las ideas que manifestaron los alumnos en las explicaciones de su utilización de la regla de tres para discutir los conceptos de variación directamente proporcional y variación inversamente proporcional (por ejemplo, recuérdese que una alumna había explicado cómo había multiplicado 10 por 200 y siempre, dijo, le daba

2 000, cuando utilizó una regla de tres para hacer sus cálculos y completar las tablas 1 y 2).

Ampliación del tema

La geometría de la semejanza

En este apartado se presentan algunas aplicaciones de la geometría de la semejanza, en la que está implicado el concepto de proporcionalidad. La primera aplicación que se expone a continuación es el procedimiento de determinación de la circunferencia de la Tierra llevado a cabo por Eratóstenes, el segundo trata de la determinación de la media proporcional de dos segmentos rectilíneos dados, según lo expuso Euclides, y el tercero es una deducción de la "fórmula de Herón".

El cálculo que hizo Eratóstenes de la circunferencia de la Tierra

Se dice que el famoso geógrafo, matemático y astrónomo griego Eratóstenes de Cirene (ahora Shahhat, Libia; *ca.* 276-194 a.n.e.) —quien era apodado "Beta", igual que la segunda letra del alfabeto griego, β, porque era considerado el segundo en todo lo que hacía— calculó "con exactitud" la circunferencia de la Tierra mediante un método muy ingenioso. Este método, que se explica a continuación, se basa en un argumento en el que intervienen líneas rectas paralelas.

Eratóstenes había notado que al mediodía del solsticio de verano los rayos del Sol caían directamente hacia el interior de un pozo profundo en Siena (ahora Aswan, un lugar que se localiza en el trópico de Cáncer), al mismo tiempo que en Alejandría hacían un ángulo igual a la vigésima quinta parte de un ángulo llano,

$$\frac{180^\circ}{25} = 7.2^\circ,$$

con respecto al cenit (véase la figura 1). Alejandría está situada aproximadamente a 5 000 estadios hacia el norte de Siena (sobre el mismo meridiano), según la estimación de Eratóstenes (se sospecha que realmente no midió esta distancia).

Así, Eratóstenes calculó que la Tierra tiene una circunferencia de

$$C = 2 \times 25 \times 5\,000 \text{ estadios} = 250\,000 \text{ estadios.}$$

Como sabemos, una circunferencia completa equivale a 360°. Luego, mediante una regla de tres simple en la que se usen las medidas que determinó Eratóstenes, se obtiene que

$$\frac{C}{360^\circ} = \frac{5\,000 \ \textit{estadios}}{7.2^\circ}$$

$$C = \frac{360^\circ \ (5\,000 \ \textit{estadios})}{7.2^\circ}$$

$$C = 250\,000 \ \textit{estadios}$$

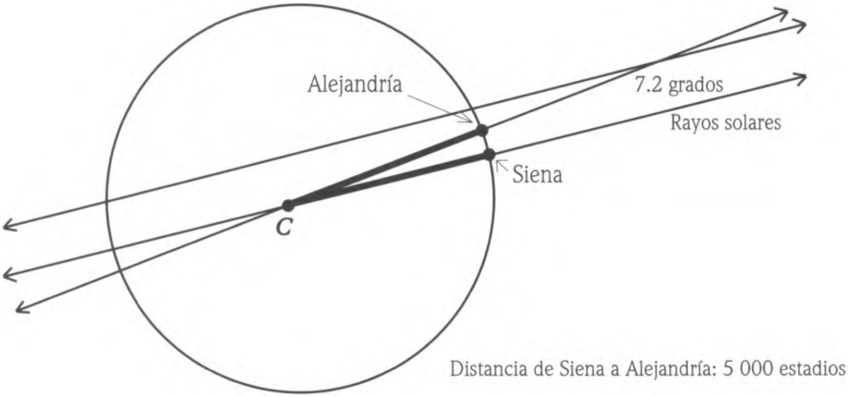


Figura 1. Representación gráfica del procedimiento de Eratóstenes para calcular la circunferencia del planeta Tierra

Dado que $C = 2\pi r$,

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{250\ 000\ estadios}{2 \times 3.14159} = 39\ 788.77\ estadios.$$

Un estadio, que tenía 300 cúbitos egipcios reales, equivale a 516.7 pies o 157.49 m. Con esta información se puede determinar el radio y la circunferencia de la Tierra (se está considerando, como lo hizo Eratóstenes, que la Tierra es esférica) en unidades de medida que se usan actualmente:

$$C = 250\ 000\ estadios = 250\ 000\ estadios \times 157.49\ \frac{m}{estadios}$$

$$= 39\ 372\ 500\ \text{m} = 39\ 372.5\ \text{km}$$

y

$$r = 39\ 788.77\ estadios \times 157.49\ \frac{m}{estadios}$$

$$= 6\ 266\ 333.39\ \text{m} = 6\ 266.33\ \text{km}.$$

Así, de acuerdo con los datos de Eratóstenes, el radio del planeta Tierra es de 6 266.33 km y su circunferencia mide 39 372.5 kilómetros.

En la actualidad, se aceptan como datos más exactos de las medidas del radio y de la circunferencia de la Tierra los siguientes: su radio polar es de 6 356.8 km, y el ecuatorial de 6 378.2 km; su circunferencia ecuatorial es de 40 075.2 km, y la meridional de 40 008.1 kilómetros.

La media proporcional

En el libro VI de los *Elementos* de Euclides, la proposición 13 es un problema en el que se pide hallar *la media proporcional* de dos segmentos rectilíneos dados. En la proposición 11 de ese libro se pide hallar una *tercera proporcional* de dos segmentos rectilíneos dados, y en la 12, hallar una *cuarta proporcional* de tres segmentos rectilíneos dados. Veamos cómo se lleva a cabo una construcción de la media proporcional de dos segmentos rectilíneos dados.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ los dos segmentos dados. Colóquense ambos segmentos uno a continuación del otro en línea recta, como se muestra en la figura 2. Trácese el semicírculo AEC tomando al segmento $\overline{AC}$ como diámetro. Trácese la perpendicular a $\overline{AC}$ por el punto B y sea D el punto de intersección de esta perpendicular con la semicircunferencia. Resulta que el segmento $\overline{BD}$ así construido cumple la relación

$$\overline{AB} : \overline{BD} :: \overline{BD} : \overline{BC}.$$

Veamos por qué. Trácense $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$. Como el ángulo ADC es un ángulo inscrito en un semicírculo, es recto. Así, se tiene que

$$\angle ADB + \angle BDC = 90^\circ. \qquad (1)$$

Además,

$$\angle BAD + \angle ADB = 90^\circ \qquad (2)$$

y

$$\angle BDC + \angle DCB = 90^\circ. \qquad (3)$$

Luego, como

$$\angle BDC = 90^\circ - \angle ADB$$

y

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle ADB$$

por las igualdades (1) y (2), se tiene que

$$\angle BDC = \angle BAD. \qquad (4)$$

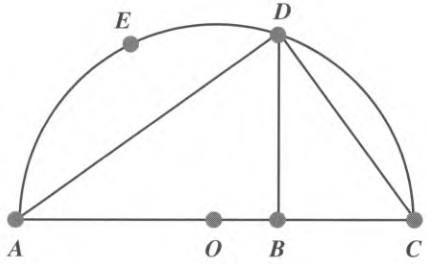


Figura 2. Media proporcional

Por otra parte, por las igualdades (2) y (3) se tiene que

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle BAD$$

y

$$\angle DCB = 90^\circ - \angle BDC,$$

pero por (4),

$$\angle BDC = \angle BAD;$$

luego,

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle BAD$$

y

$$\angle DCB = 90^\circ - \angle BAD.$$

Así,

$$\angle ADB = \angle DCB.$$

Pero según se observa en la figura 2,

$$\angle DCB = \angle DCA.$$

Luego,

$$\angle ADB = \angle DCA. \tag{5}$$

Nótese entonces que en la figura 2 se tienen tres triángulos rectángulos: ΔABD, ΔDBC y ΔCDA. A partir de que el ΔABD y el ΔDBC tienen un ángulo agudo igual, de acuerdo con la igualdad (4),

$$\angle BAD = \angle BDC,$$
$$\Delta ABD \sim \Delta DBC,$$

y a partir de que el ΔABD y el ΔCDA tienen un ángulo agudo igual, de acuerdo con la igualdad (5),

$$\angle ADB = \angle DCA,$$
$$\Delta ABD \sim \Delta CDA.$$

Así que los tres triángulos rectángulos ΔABD, ΔDBC y ΔCDA son semejantes, por lo que existe proporcionalidad entre sus lados correspondientes; en particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}.$$

Nótese entonces que en la primera de estas igualdades se tiene que el segmento construido $\overline{BD}$ es media proporcional de los segmentos dados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, esto es,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

Efectivamente, en la proposición 8 del mismo libro VI de los *Elementos* de Euclides se enuncia que

> *Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.*

Y al final de la demostración de esta proposición 8 se presenta el *corolario* siguiente:

> *A partir de esto queda claro que si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base.*

Por otra parte, obsérvese que si el segmento $\overline{BC}$ es la unidad de medida de longitud, es decir, si $\overline{BC} = 1$, la longitud del segmento $\overline{BD}$, obtenido mediante la construcción que se muestra en la figura 2, es la raíz cuadrada de la longitud del segmento dado $\overline{AB}$. Pues la proporción

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

en este caso es

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{1},$$

de la cual se obtiene que $\overline{AB} \times 1 = \overline{BD} \times \overline{BD}$; esto es, $\overline{BD}^2 = \overline{AB}$. Luego,

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}}\,.$$

Semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras

Se puede hacer uso de la construcción anterior para diseñar una demostración del teorema de Pitágoras basada en semejanza de triángulos.

Dado un triángulo rectángulo ACD cuyo ángulo recto es el $\angle ADC$, como se muestra en la figura 3, trácese la altura correspondiente al vértice D. Sea B el pie de esta altura en el lado $\overline{AC}$, que es la hipotenusa del ΔACD. Según acabamos de ver, como los tres triángulos rectángulos ΔACD, ΔADB y ΔDCB son semejantes, en particular se tiene que

$$\Delta ACD \sim \Delta ADB \tag{6}$$

y

$$\Delta ACD \sim \Delta DCB. \tag{7}$$

A partir de la relación (6), se cumple que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC} \times \overline{AB} = \overline{AC} \times (\overline{AC} - \overline{BC}) = \overline{AC}^2 - (\overline{AC} \times \overline{BC}).$$

Esto es,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - (\overline{AC} \times \overline{BC}). \tag{8}$$

Y de la relación (7) se tiene que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC}. \tag{9}$$

Luego, sustituyendo (9) en (8), se obtiene que $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$. Así,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2.$$

Esto es, el cuadrado de la hipotenusa $\overline{AC}$ de un ΔACD es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$.

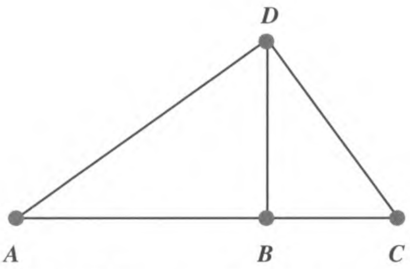


Figura 3. El teorema de Pitágoras a partir de una media proporcional

La "fórmula de Herón"

Utilizaremos el concepto de semejanza de figuras rectilíneas para obtener la "fórmula de Herón". Dadas las longitudes *a, b* y *c* de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ de un ΔABC, como el que se muestra en la figura 4, sea *s* el semiperímetro de este triángulo,

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

y *r* el radio de su círculo inscrito. La circunferencia de este círculo es tangente a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ en los puntos *A', B'* y *C'*, respectivamente. Siendo *O* el centro del círculo, se tiene que $r = \overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'}$. Nótese que

$$a = \overline{BA'} + \overline{A'C}\ ,\ b = \overline{CB'} + \overline{B'A}\ \text{y}\ c = \overline{AC'} + \overline{C'B}$$

y también que

$$\overline{AB'} = \overline{AC'}\ ,\ \overline{BA'} = \overline{BC'}\ \text{y}\ \overline{CA'} = \overline{CB'}.$$

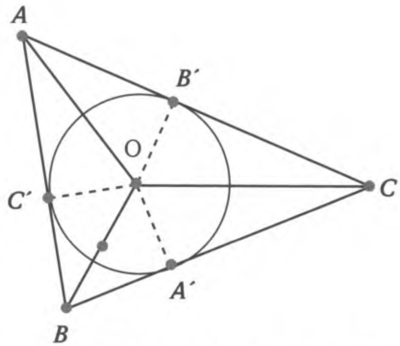


Figura 4. Un triángulo *ABC* y su círculo inscrito

Luego,

$$s-a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{(\overline{CB'}+\overline{B'A})+(\overline{AC'}+\overline{C'B})-(\overline{BA'}+\overline{A'C})}{2}$$

$$= \frac{(\overline{CB'}+\overline{C'A})+(\overline{AC'}+\overline{C'B})-(\overline{BC'}+\overline{B'C})}{2}$$

$$= \frac{\overline{CB'}+\overline{C'A}+\overline{AC'}+\overline{C'B}-\overline{BC'}-\overline{B'C}}{2}$$

$$= \frac{\overline{C'A}+\overline{AC'}}{2} = \frac{\overline{2AC'}}{2} = \overline{AC'},$$

$$s-b = \frac{a+c-b}{2} = \frac{(\overline{BA'}+\overline{A'C})+(\overline{AC'}+\overline{C'B})-(\overline{CB'}+\overline{B'A})}{2}$$

$$= \frac{(\overline{BC'}+\overline{B'C})+(\overline{AC'}+\overline{C'B})-(\overline{CB'}+\overline{C'A})}{2}$$

$$= \frac{\overline{BC'} + \overline{B'C} + \overline{AC'} + \overline{C'B} - \overline{CB'} - \overline{C'A}}{2}$$

$$= \frac{\overline{BC'} + \overline{C'B}}{2} = \frac{2\overline{BC'}}{2} = BC', \text{ y}$$

$$s - c = \frac{a+b-c}{2} = \frac{(\overline{BA'} + \overline{A'C}) + (\overline{CB'} + \overline{B'A}) - (\overline{AC'} + \overline{C'B})}{2}$$

$$= \frac{(\overline{BC'} + \overline{B'C}) + (\overline{CB'} + \overline{C'A}) - (\overline{AC'} + \overline{C'B})}{2}$$

$$= \frac{\overline{BC'} + \overline{B'C} + \overline{CB'} + \overline{C'A} - \overline{AC'} - \overline{C'B}}{2}$$

$$= \frac{\overline{B'C} + \overline{CB'}}{2} = \frac{2\overline{B'C}}{2} = B'C.$$

Esto es,

$$s - a = \overline{AC'} = \overline{AB'},$$

$$s - b = \overline{BC'} = \overline{BA'} \text{ y}$$

$$s - c = \overline{B'C} = \overline{A'C}.$$

Ahora levántese una línea perpendicular al segmento $\overline{BO}$ por su extremo O y una línea perpendicular al segmento $\overline{BC}$ por su extremo C; estas dos perpendiculares se intersecarán en un punto D. Se forman así dos triángulos rectángulos, el ΔBOD y el ΔBCD, cuya hipotenusa común es el segmento rectilíneo $\overline{BD}$. Entonces, si se traza una circunferencia con diámetro $\overline{BD}$, ésta necesariamente pasará por el punto O —vértice del ángulo recto del ΔBOD— y por el punto C —vértice del ángulo recto del ΔBCD—. Luego, el cuadrilátero $BOCD$ es inscriptible (véase la figura 5).

Obsérvese que

$$\angle CDB + \angle BOC = 180^\circ. \qquad (10)$$

Además, como $\angle BOA' + \angle A'OC + \angle COB' + \angle B'OA + \angle AOC' + \angle C'OB = 360^\circ$, y siendo $\angle BOA' = \angle C'OB$, $\angle A'OC = \angle COB'$ y $\angle B'OA = \angle AOC'$, al sustituir en la igualdad anterior se obtiene que

$$\angle BOA' + \angle A'OC + \angle A'OC + \angle AOC' + \angle AOC' + \angle BOA' = 360^\circ$$

o, lo que es lo mismo, $\angle BOA' + \angle A'OC + \angle AOC' = 180^\circ$. Pero

$$\angle BOA' + \angle A'OC = \angle BOC,$$

por lo cual

$$\angle BOC + \angle AOC' = 180^\circ. \qquad (11)$$

Así que a partir de las igualdades (10) y (11) se tiene que $\angle CDB = \angle AOC'$, por lo que los triángulos rectángulos DCB y $OC'A$ son semejantes entre sí. Ahora bien, siendo E el punto de intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{OD}$, nótese que los triángulos rectángulos $EA'O$ y ECD son asimismo semejantes entre sí.

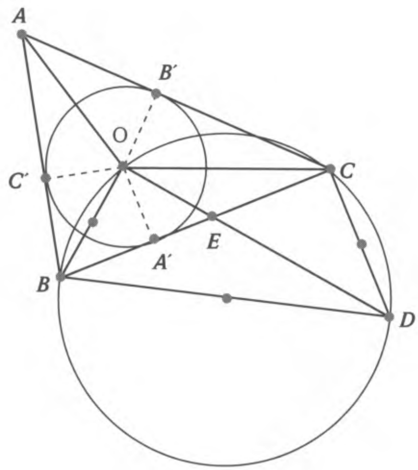


Figura 5

Luego,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'O}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{A'O}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA'}}.$$

Como $\overline{C'O} = \overline{A'O}$, se tiene que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'O}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA'}}.$$

Al sumar 1 al primero y último miembro de esta doble igualdad, se obtiene la siguiente:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC'}}+1=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA'}}+1$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{CE}+\overline{EA'}}{\overline{EA'}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{EA'}}.$$

Así que

$$\frac{\overline{BC}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC}+\overline{AC'}}{\overline{BC}+\overline{AC'}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{EA'}}\times\frac{\overline{BA'}}{\overline{BA'}}$$

o, dado que en el triángulo rectángulo BOE se cumple que $\overline{A'O}$ es media proporcional de $\overline{EA'}$ y $\overline{BA'}$, esto es, $\overline{A'O}^2 = \overline{EA'}\times\overline{BA'}$,

$$\frac{(\overline{BC}+\overline{AC'})^2}{\overline{AC'}\times(\overline{BC}+\overline{AC'})}=\frac{\overline{CA'}\times\overline{BA'}}{\overline{A'O}^2}$$

Luego,

$$\overline{A'O}^2(\overline{BC}+\overline{AC'})^2=(\overline{BC}+\overline{AC'})(\overline{AC'})(\overline{BA'})(\overline{A'C})=s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

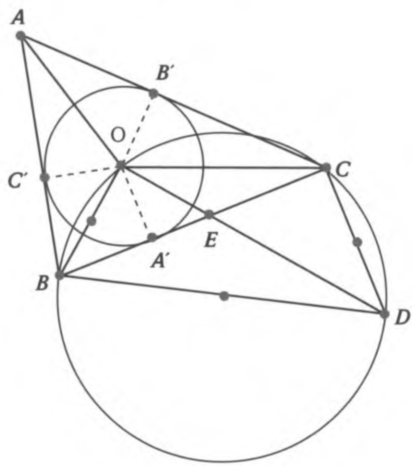


Figura 6

Pero obsérvese que

$$\overline{A'O}\left(\overline{BC}+\overline{AC'}\right)=\overline{A'O}\left(\frac{2\overline{BC}+2\overline{AC'}}{2}\right)=\overline{A'O}\left(\frac{2\left(\overline{BA'}+\overline{A'C}\right)+\left(\overline{AC'}+\overline{AB'}\right)}{2}\right)$$

$$=\overline{A'O}\left(\frac{2\overline{BA'}+2\overline{A'C}+\overline{AC'}+\overline{AB'}}{2}\right)$$

$$=\overline{A'O}\left(\frac{\overline{BA'}+\overline{BC'}+\overline{A'C}+\overline{B'C}+\overline{AC'}+\overline{AB'}}{2}\right)$$

$$=\overline{A'O}\left(\frac{\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}}{2}\right)=\overline{A'O}\,\frac{\overline{BC}}{2}+\overline{A'O}\,\frac{\overline{AC}}{2}+\overline{A'O}\,\frac{\overline{AB}}{2}$$

$$=\overline{A'O}\,\frac{\overline{BC}}{2}+\overline{B'O}\,\frac{\overline{AC}}{2}+\overline{C'O}\,\frac{\overline{AB}}{2}$$

$$= [\acute{a}rea\ (\Delta BOC)] + [\acute{a}rea\ (\Delta COA)] + [\acute{a}rea\ (\Delta AOB)]$$

$$= [\acute{a}rea\ (\Delta ABC)],$$

si se usa la fórmula para calcular el área de un triángulo multiplicando la base por la altura y dividiendo el producto entre 2. Así que

$$[\acute{a}rea\ (\Delta ABC)]^2 = \overline{A'O}^2\,(BC+AC')^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\acute{a}rea\ (\Delta ABC) = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

que es “la fórmula de Herón”.

B I B L I O G R A F Í A

Bishop, A. J. "Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización", en: R. Cambray, E. A. Sánchez y G. Zubieta B. (comps.), *Antología de educación matemática,* Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, 1992, pp. 29-42. [Inédito: Didactical implications from research on visualization; versión en castellano de R. Cambray N.]

Cambray-Núñez, R."Un fulcro aportado por Euclides para mover el mundo de la geometría", *XI Encuentro de Maestros de Matemáticas, Memorias de las Conferencias Plenarias,* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México, 2003, pp. 59-75.

Cambray-Núñez, R. "El libro I de los *Elementos* de Euclides en las novelas de loros", *Miscelánea Matemática 38,* 2003 (diciembre), pp. 43-63. [Revista publicada por la Sociedad Matemática Mexicana.]

Daus, P. H. "Why and how we should correct the mistakes of Euclid", *Mathematics Teacher 53,* 1960, pp. 576-581.

Euclides. *Elementos* (vol. 2: libros V-IX), Madrid, Gredos, 1994. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños.]

Freudenthal, H. "Problemas mayores de la educación matemática", en: R. Cambray, E. A. Sánchez y G. Zubieta B. (comps.), *Antología de educación matemática,* Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, 1992, pp. 7-27.

Gemmignani, M. C. "On the geometry of Euclid", *The Mathematics Teacher 60,* 1967, pp. 160-164.

Hofmann, J. E. *Historia de la matemática: Desde el comienzo hasta la Revolución francesa.* México, Limusa, 2002.

Katz, V. J. *A History of mathematics: An Introduction.* Nueva York, Addison-Wesley, 1998.

Meder, A. E., Jr. "What is wrong with Euclid?", *Mathematics Teacher 51,* 1958, pp. 578-584.

Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's Elements / Proclus.* Princeton University Press, Princeton, 1992/1970. [Int., notas y trad. al inglés de Glenn R. Morrow; prefacio de Ian Mueller a la ed. de 1992.]

Rey Pastor, J. y J. Babini *Historia de la matemática,* vol. 1. Barcelona, Gedisa, 2000. [Prefacio de J. Vernet.]

Schubring, G. "Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto", *Mathesis 8,* 3, 1992, pp. 273-298. [On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author, *For the Learning of Mathematics 7* (1987), 3, pp. 41-51; versión en castellano de R. Cambray N.]

Serra, Michael. *Discovering geometry. An inductive approach.* Berkeley, CA., Key Curriculum Press, 1997.

APÉNDICE A

HOJAS DE TRABAJO PARA LAS ACTIVIDADES CON LOS ALUMNOS

Primera sesión

Hoja de trabajo 1

1. Completen la tabla siguiente:

Tabla 1

Distancia en centímetros (cm) de la estaca a la fuente luminosa d	Tamaño en centímetros (cm) de la sombra proyectada s
20	
25	
	50
	64
50	
	32
	25
100	
125	
	12.5
200	
Tamaño de la estaca: 10 cm Distancia de la fuente luminosa a la pantalla de proyección: 200 cm	

Expliquen qué hicieron.

Hoja de trabajo 2

2. Completen la tabla 2 siguiente.

Tabla 2

Distancia en centímetros (cm) de la estaca a la fuente luminosa d	Tamaño en centímetros (cm) de la sombra proyectada s
	100
	75
	60
60	
75	
80	
120	
150	
	12.5
180	
	10
Tamaño de la estaca: 10 cm Distancia de la fuente luminosa a la pantalla de proyección: 200 cm	

Expliquen qué hicieron.

Segunda sesión

Hoja de trabajo 3

Completen la tabla 3 con base en la figura 1.

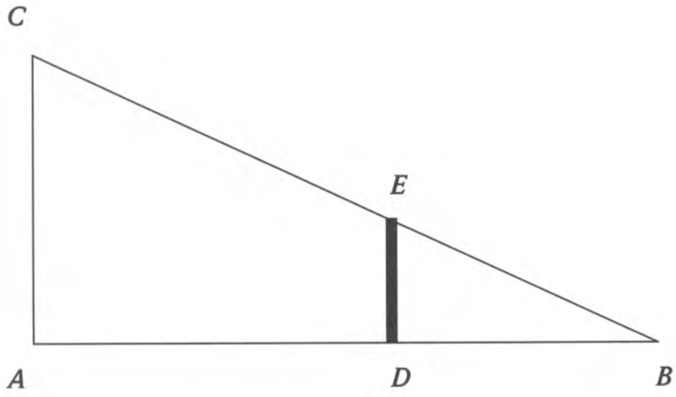
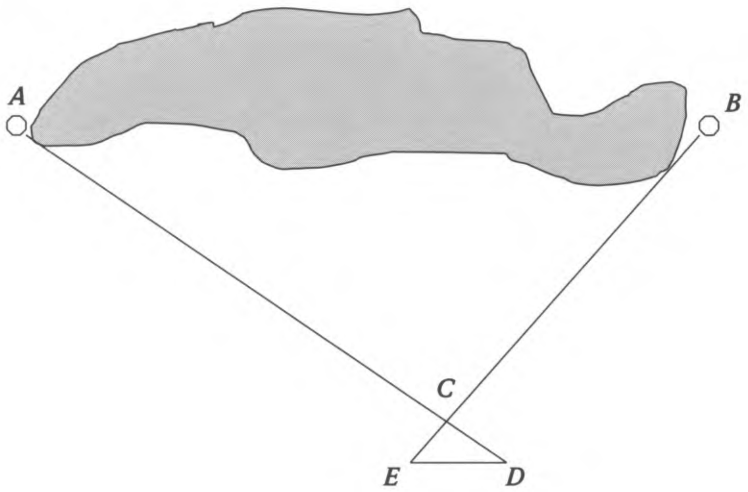


Figura 1

Tabla 3

Tamaño en centímetros (cm)			
$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\overline{DE}$	$\overline{DB}$
400		50	125
	1 500	75	375
10		1	2
25	100		20
8	10	5	

Hoja de trabajo 4



Hoja de trabajo 5

Un grupo de alumnos de secundaria calculó la longitud AB del lago habiendo medido las distancias que se muestran en el diagrama de la *Hoja de trabajo 4*, las cuales sí son accesibles.

La distancia $\overline{AC} = 700$ m.

La distancia $\overline{BC} = 500$ m.

Prolongaron la línea $\overline{AC}$ hasta el punto D, y la línea $\overline{BC}$ hasta el punto E tomando las distancias

$$\overline{CD} = 7 \text{ m}$$

y

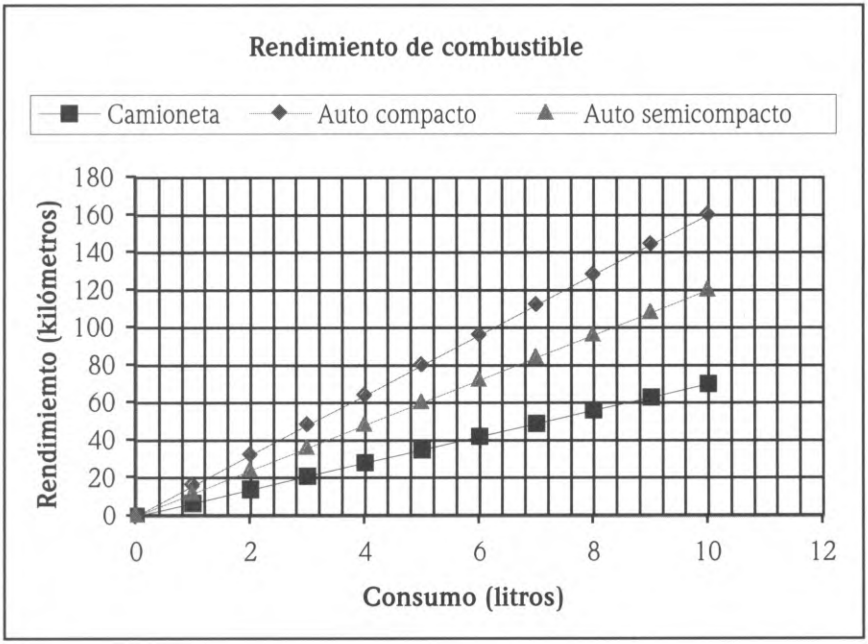
$$\overline{CE} = 5 \text{ m},$$

y luego midieron la distancia $\overline{ED} = 10$ m.

Con estos datos, ¿puedes calcular cuál es la longitud $\overline{AB}$ del lago?

Hoja de trabajo 6

Observen las siguientes gráficas:



¿Cuántos kilómetros puede recorrer cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 10 litros?

Camioneta: _______________

Auto compacto: _______________

Auto semicompacto: _______________

¿Cuántos kilómetros, exactamente, puede recorrer cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 6 litros?

Camioneta: _______________
Auto compacto: _______________
Auto semicompacto: _______________

Hoja de trabajo 7

Completa la siguiente tabla:

Tabla 4

Consumo (litros)	Rendimiento (km)		
	Camioneta	Auto semicompacto	Auto compacto
11			
18.5			
		400	

APÉNDICE B

HOJAS DE TRABAJO PARA LAS ACTIVIDADES CON LOS MAESTROS

Hoja de trabajo 1

Se lleva a cabo un experimento de proyectar la sombra de una estaca de 10 cm de altura sobre una pared a 2 m de distancia de la fuente luminosa.

- ¿Cuál creen que será el tamaño de la sombra proyectada si la estaca está a 20 cm de distancia de la fuente luminosa?
- ¿A qué distancia creen que estará la estaca de la fuente luminosa si la sombra proyectada es de 60 cm?

1. Completen la tabla 1 y la tabla 2 siguientes.

Tabla 1

[Se usó la misma tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 1* empleada en la primera sesión con los alumnos.]

Hoja de trabajo 2

Tabla 2

[Se usó la misma tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 2* usada en la primera sesión con los alumnos.]

Hoja de trabajo 3

Completen la tabla 3 con base en la figura 1.

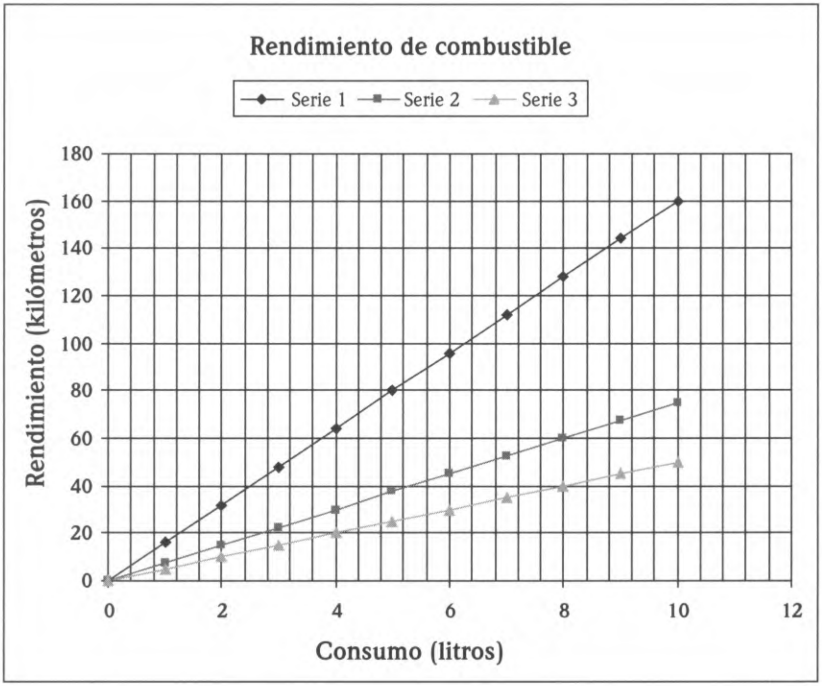
[Se usaron la misma tabla y la misma figura que aparece en la *Hoja de trabajo 3* usada en la segunda sesión con los alumnos.]

Figura 1

Tabla 3

Hoja de trabajo 4

Observen las siguientes gráficas.



¿Cuántos kilómetros puede recorrer, exactamente, cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 6 litros?

Camioneta: ______________

Auto compacto: ______________

Auto semicompacto: ______________

Hoja de trabajo 5

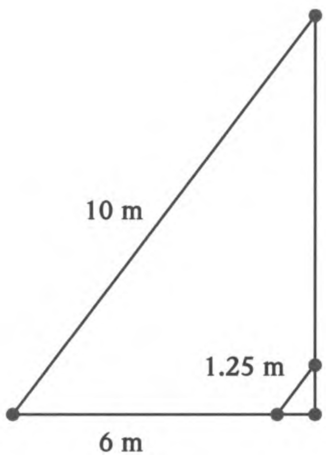
Completa la siguiente tabla.

[Se usó la misma tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 7* usada en la segunda sesión con los alumnos.]

Tabla 4

Hoja de trabajo 6

Una escalera de 10 m de largo se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a 6 m de la base del edificio. ¿A qué distancia de la base del edificio debe colocarse un bastón que tiene 1.25 m de largo para que, apoyado sobre el mismo edificio, tenga la misma inclinación que la escalera?



El módulo 8: *Medición y semejanza de triángulos*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Geometría
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacán 1031. CP. 03100, Col. del Valle.