UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria

Tesis que, para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Línea: Educación Matemática

P r e s e n t a

Claudia Martínez Montes

Directora de tesis: Dra. Cristianne Butto Zarzar

México, D.F. Diciembre de 2012.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco a mis padres su guía, apoyo, confianza y cariño de siempre.

- A mis hermanos por sus consejos, sus palabras de aliento, y porque a pesar de la distancia sé que puedo contar con ellos en todo momento.

- Agradezco a la Dra. Cristianne Butto Zarzar dirigir esta tesis, compartir sus conocimientos, sus consejos y comentarios en el desarrollo de esta investigación. También su apoyo para la culminación de un ciclo en mi profesionalización docente.

- A los niños que participaron en el estudio porque juntos aprendimos. También a sus padres por la confianza para que sus hijos asistieran a las sesiones de trabajo; en especial a la señora Magdalena Maya y esposo por el apoyo incondicional durante la sesiones de intervención con los niños.

- Gracias a la Dra. Mariana Sáiz Roldán, a la Mtra. Edda Norma Jiménez de la Rosa y Barrios, al Dr. José Luis Cortina Morfin y al Dr. Laurentino Lucas Campo el tiempo dedicado a la lectura de esta tesis y sus observaciones para enriquecerla.

- Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar la investigación *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria.*

- Agradezco a la Secretaría de Educación Pública el otorgamiento de beca-comisión durante cinco semestres para hacer mis estudios de Maestría en Desarrollo Educativo y la elaboración de ésta tesis.

RESUMEN

Los niños a temprana edad son capaces de resolver una variedad de problemas aritméticos; por ejemplo, en situaciones de compra-venta con cantidades pequeñas, ellos saben cuánto deben pagar por algún producto y cuánto les deben dar de cambio, entre otras situaciones de la vida diaria donde se enfrentan a problemas matemáticos. Por otro lado, la resolución de problemas aditivos es un tema de investigación, en Matemática Educativa ha sido estudiado por varios autores. Vergnaud (1991), ***Los problemas de tipo aditivo****; Puig y Cerdán (1989),* ***Problemas aritméticos escolares****; Castro, Rico y Castro (1995),* ***Estructuras Aritméticas Elementales****. Maza (1999),* ***Enseñanza de la suma y la resta*** *y Bermejo (2004),* ***Aprendiendo a sumar y restar****. En este estudio investigamos los procesos de resolución de los estudiantes al solucionar problemas de estructura aditiva, las estrategias que utilizan y las dificultades que enfrentan con tipos y sub-tipos de problemas asociados a la adquisición de reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Los objetivos del estudio son: 1) Investigar las estrategias y las representaciones externas que hacen los niños al resolver problemas aditivos. 2) Diseñar una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos para trabajar con los niños de 2° grado de educación primaria. 3) Verificar la viabilidad de la secuencia. El marco teórico se fundamenta en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990). La metodología del estudio es de corte cualitativa, de tipo descriptivo-explicativo. Se trabajó con diez estudiantes de 2° grado de educación básica de una escuela pública del Distrito Federal. Etapas del estudio: 1a. Diseño y aplicación de cuestionarios iniciales de escritura numérica y resolución de problemas aditivos, seguidos de entrevistas clínicas individuales. 2a. Diseño y aplicación de secuencia didáctica sobre problemas aditivos explorando el modelo funcional (Problemas de tipo combinación con final desconocido* y *diferencia desconocida; comparación con diferencia desconocida, igualación con diferencia desconocida* y *grande desconocido,* y *cambio disminuyendo con inicio desconocido). 3a. Diseño y aplicación de cuestionario final. 4a. Análisis de los resultados. Después de la intervención didáctica se observaron mejoras en la resolución de problemas; los niños comprendían mejor la estructura sintáctica y semántica de los problemas, pasaron de resolver los problemas por medio de representaciones internas y externas con objetos, dibujos o la manipulación de sus dedos a tener mayor familiaridad con el uso del algoritmo. Esto muestra que la capacidad de los estudiantes para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas es un proceso largo que requiere la exploración de diversos aspectos en el salón de clases: didácticos, matemáticos y cognitivos, para que, finalmente, los estudiantes puedan desarrollar otro tipo de habilidades matemáticas.*

ÍNDICE

Lista de tablas **Página**

Lista de figuras **Página**

Lista de anexos **Página**

INTRODUCCIÓN

Todos los días nos enfrentamos con información numérica en diversos contextos; por ejemplo, el costo de los alimentos y productos, el precio de los combustibles, el número de asistentes a alguna actividad. En las noticias vemos cifras que explican alguna situación, como el costo del barril del petróleo, precio del dólar o el euro, resultados de encuestas de candidatos a ocupar puestos gubernamentales, entre otros. Para comprender la información numérica con la que se relacionan a diario, los estudiantes necesitan apropiarse de una parte de contenidos matemáticos y de algoritmos, para lidiar con esas situaciones de manera satisfactoria. En la escuela los niños deben no sólo apropiarse de esos contenidos escolares sino también ser capaces de resolver problemas que involucren dicho contenido.

Por otro lado, en los últimos años el desempeño de los estudiantes en matemáticas no ha sido muy satisfactorio. Los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales nos muestran datos desalentadores sobre el aprendizaje de las matemáticas. Estas evaluaciones revelan una serie de dificultades que tanto maestros como estudiantes presentan en la enseñanza y en el aprendizaje de los contenidos escolares.

La investigación en educación matemática presenta estudios y propuestas de diversos autores en la resolución de problemas de estructura aditiva. En la década de los 80 las investigaciones realizadas por Vergnaud sitúan los problemas de estructura aditiva dentro de lo que el autor define como campo conceptual aditivo, a partir de seis categorías; cada categoría integra clases y subclases de problemas. Para el referido autor la complejidad de los problemas varía en función de la categoría y de la clase o subclase.

Maza (1999) divide los problemas de estructura aditiva en cuatro tipos: combinación, cambio aumentando, cambio disminuyendo, comparación e igualación. A partir de estos cuatro tipos de problemas se generan subtipos de problemas. La dificultad de los niños con estos problemas reside principalmente en la complejidad conceptual y en el tipo y subtipo de problemas, el lugar de la incógnita (inicio desconocido, final desconocido, cambio o diferencia desconocida), así como también en la magnitud de las cantidades, los soportes de representación y a la estructura sintáctica (por ejemplo: si se presenta en una ilustración 16 paletas y 9 niños, y se pregunta al niño: ¿cuántas paletas hay más que niños?, los niños presentarán mayor dificultad ante esta pregunta que si se cambia el problema de la siguiente manera: la maestra Lulú llevo estas paletas al salón y regaló una a cada niño, ¿cuántas paletas le sobraron?). Y reside también en la semántica de los problemas; por ejemplo: Luis tiene 16 canicas azules y 28 canicas rojas, ¿cuántas canicas tiene en total? Los niños presentan menor dificultad ante este problema que si se les presenta el siguiente: Luis tiene 16 canicas azules y 28 canicas rojas, ¿cuántas canicas azules le faltan para tener la misma cantidad de canicas rojas?

Otro aspecto que debe ser considerado es el de los modelos matemáticos existentes, a partir de los cuales se organiza la formulación de dichos problemas.

Otra dificultad que presentan los estudiantes al resolver problemas de estructura aditiva y realizar una sustracción son acciones como: pedir prestado o llevar. De acuerdo con Lerner (1997), la única explicación que podemos encontrar para estos hechos es que no se ha brindado a los niños la posibilidad de comprender que procedimientos como *llevar* y *pedir prestado* están estrechamente vinculados con las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Consideramos que en lugar de emplear el término *llevar*, se podría manejar cómo hacer cambios: agrupar conjuntos de diez objetos, de cien y de mil para relacionar con unidades, decenas y centenas; al trabajar el concepto de valor posicional del número, se entenderá por qué al cambiar de columna el valor del número cambia.

Como se mencionó anteriormente, los problemas de estructura aditiva de acuerdo con Vergnaud (2010) están concentrados en seis categorías, las cuales generan diferentes clases y subclases de problemas. Sin embargo, el planteamiento y resolución de problemas aditivos que se trabajan comúnmente en las escuelas, según Maza (1999), nos remite a problemas de cambio aumentando y combinación en el caso de la adición y para la sustracción cambio disminuyendo, sin tomar en cuenta los demás tipos y subtipos de problemas. De ahí surgen preguntas como: ¿por qué sólo son trabajados ese tipo de problemas aditivos? y ¿qué hace falta para trabajar otros tipos de problemas aditivos? En este sentido, con la investigación *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria,* se indagó la manera como se pueden plantear diferentes tipos de problemas aditivos con los estudiantes, considerando la edad cronológica de los alumnos, su contexto, la estructura misma de los problemas, el orden y la presentación de información, entre otros aspectos. También se considera relevante conocer las estrategias que los estudiantes emplean en la resolución de cada uno de los problemas propuestos, el proceso que desarrollan para llegar al resultado, y las dificultades o habilidades que genera un problema de acuerdo con su estructura.

Si partimos de plantear un problema a los estudiantes para resolverlo, el niño puede recurrir a herramientas como: objetos manipulables (uso de los dedos de las manos, fichas y semillas), representaciones gráficas o representaciones simbólicas. La escuela retoma esas ideas intuitivas; propone y organiza estrategias que evolucionarán hasta las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

A partir de lo expuesto proponemos estudiar los procesos de *la resolución de problemas de estructura aditiva* que desarrollan los estudiantes dentro del salón de clases en 2º grado de primaria; así como los procedimientos y estrategias que utilizan, y las dificultades que se les presentan al resolver los diferentes tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva asociados al sistema de numeración decimal indo-arábigo.

Los objetivos del estudio fueron: 1) Investigar las estrategias y las representaciones externas que hacen los niños al resolver problemas aditivos. 2) Diseñar una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos para trabajar con los niños de 2° grado de educación primaria. 3) Verificar la viabilidad de la secuencia.

El marco teórico se fundamenta en la *teoría de los campos conceptuales* de Vergnaud (1990). La metodología del estudio es de corte cualitativa, de tipo descriptivo-explicativo. Se trabajó con diez estudiantes de 2° grado de educación básica de una escuela pública del Distrito Federal. Las etapas del estudio fueron cuatro. 1ª Diseño y aplicación de cuestionarios iníciales de escritura numérica y resolución de problemas de estructura aditiva, seguida de entrevistas clínicas individuales. 2ª Diseño y aplicación de secuencia didáctica sobre problemas de estructura aditiva explorando el modelo funcional (problemas del tipo combinación con diferencia desconocida, comparación con grande desconocido, combinación con inicio desconocido y cambio aumentando con inicio desconocido). 3ª Diseño y aplicación de cuestionario final. 4ª Análisis de los resultados.

El estudio se divide en ocho capítulos. En el primer capítulo *Antecedentes del estudio: Pruebas nacionales e internacionales y reformas institucionales,* se muestran las pruebas nacionales e internacionales y cómo los aprendizajes matemáticos se ven reflejados en ellas. También se describen el Programa Sectorial de Educación 2007 – 2012, la Reforma Integral de educación Básica y su incidencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo dos *Antecedentes del estudio: Sistema de numeración decimal indo-arábigo*, se revisan los estudios más sobresalientes del sistema de numeración decimal indo-arábigo y la relación que mantiene ese sistema con el aprendizaje y la enseñanza en los niños de segundo grado de primaria.

En el capítulo tres *Antecedentes del estudio: Problemas de estructura aditiva* se revisan investigaciones destacadas, sobre los problemas de estructura aditiva.

El capítulo cuatro *Marco teórico*, describe y analiza conceptos que forman parte de las bases teóricas para el desarrollo de este estudio.

El capítulo cinco *Metodología*, aborda la metodología empleada y la población con la que se trabajó, se presenta el tipo y corte del estudio, así como las etapas.

En el capítulo seis *Resultados de la primera etapa del estudio*, presenta los resultados de los cuestionarios iniciales de escritura numérica y problemas aditivos, seguidos de entrevistas clínicas individuales: de forma ordenada y amplia muestra las respuestas que dieron los niños, agrupadas en categorías; así como el análisis de dichos resultados.

El capítulo siete *Resultados de la segunda etapa del estudio*, describe la aplicación de actividades de la secuencia didáctica aplicada a los niños.

El capítulo ocho *Resultados de la tercera etapa del estudio,* da cuenta de la aplicación del cuestionario final de problemas aditivos aplicado a los niños. Finalmente se incluyen las conclusiones generales del estudio.

I. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: PRUEBAS NACIONALES E INTERNACIONALES Y REFORMAS INSTITUCIONALES

Este capítulo se divide en dos apartados: en el primero se presentan de manera general las pruebas nacionales e internacionales, y por medio de ellas cómo se refleja la situación educativa en México; de manera específica se analizaron los resultados en la asignatura de matemáticas.

En el segundo apartado se presenta una descripción del Programa Sectorial de Educación (PSE) 2007 – 2012; así como la influencia de éste en la organización de la Reforma integral de Educación Básica (RIEB). Se inicia con la descripción del PSE, sus objetivos y de qué manera es vista la educación matemática en éstos. Posteriormente, se describe la Reforma de Educación Primaria 2009 y cómo se abordan la asignatura de matemáticas. Después se describe el Plan de Estudios 2011 de Educación Primaria, donde se destaca la manera como están organizados los contenidos matemáticos y su abordaje escolar. Finalmente, se recuperan elementos para nuestro estudio.

1.1 Pruebas nacionales e internacionales

En los últimos años la situación en educación básica no ha sido satisfactoria: los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales nos muestran datos desalentadores sobre el desempeño de los estudiantes en matemáticas.

Por ejemplo, la prueba del *Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes* (PISA, por sus siglas en inglés), consiste en un estudio periódico y comparativo, promovido y organizado por la *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos* (OCDE), en el cual participan los países miembros y no miembros de la organización (asociados). Esta prueba muestra en qué medida los estudiantes de 15 años, que están por concluir o han concluido su educación secundaria, han adquirido conocimientos y habilidades relevantes en el campo de la lectura, las matemáticas y la ciencia. De acuerdo a información encontrada en la página *http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm*, la prueba PISA se aplica cada tres años y en cada ciclo se enfatiza un área o dominio diferente: en 2003 matemáticas, siendo la resolución de problemas un área temática especial; en 2009 lectura; y en 2012 matemáticas. Se utilizan muestras representativas de cada país, de tal manera que sea posible realizar inferencias para el país en su conjunto.

El documento *México en PISA 2009*, señala que los resultados de PISA se presentan en una escala global para cada una de las tres áreas: lectura, matemáticas y ciencia, y por subescalas (sólo para el área principal). En la escala global y las subescalas existen niveles de desempeño diferenciados por un rango de puntaje. Los puntajes de los niveles de desempeño se clasifican en 7. De manera general, los niveles de desempeño de las escalas son: sí el estudiante se encuentra en el nivel 6, 5 o 4 significa que puede realizar actividades de alta complejidad cognitiva, científicas u otras. Sí el estudiante se encuentra en el nivel 3, se ubica por arriba del mínimo necesario y, por ello, bastante bueno, aunque no del nivel deseable para la realización de las actividades cognitivas más complejas. El nivel 2 se considera como el mínimo adecuado para que un joven pueda desempeñarse en la sociedad. El nivel 1 y 0, indica que los conocimientos que posee el alumno son insuficientes (en especial el 0) para acceder a estudios superiores.

De acuerdo con el documento *México en PISA 2009*, en la asignatura de matemáticas "…agrupa sólo a 5% de sus estudiantes en los niveles altos, a 44% en los niveles intermedios (Niveles 2 y 3), y a 51% en los niveles inferiores (Nivel I y Debajo del Nivel II)" (INEE, 2010, p. 104).

La información derivada de PISA 2009 permite identificar el nivel de competencia de los estudiantes mexicanos, en comparación con los de otros países participantes. De acuerdo con estos resultados, en el área de matemáticas, México se colocó en el lugar 48 de 65 países.

En el contexto nacional, las entidades que lograron tener un desempeño superior a la media nacional fueron el Distrito Federal, Nuevo León, Chihuahua, Aguascalientes, Colima y Jalisco. Por lo contrario, los Estados que se encontraron por debajo de la media nacional fueron Oaxaca, San Luis Potosí, Tabasco, Guerrero y Chiapas.

1.2 Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo

El *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo* (SERCE) es la evaluación del desempeño de los estudiantes más importante de las desarrolladas en América Latina y el Caribe. Fue organizado y coordinado por el *Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación* (LLECE), como una de las acciones globales de la *Oficina Regional de Educación de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura para América Latina y el Caribe* (OREALC/UNESCO Santiago).

El objetivo del SERCE es la generación de conocimiento acerca de los aprendizajes de matemáticas, lenguaje (lectura y escritura) y ciencias de la naturaleza que los estudiantes de 3° y 6º grados de Educación Primaria han podido lograr en las instituciones educativas de América Latina y El Caribe. En el SERCE participaron 16 países de Latinoamérica y el estado mexicano de Nuevo León.

El estudio, comenzó en 2002, recogió información en 2006, y publicó sus primeros resultados en 2008. La evaluación de los aprendizajes de matemáticas, se basó en pruebas con contenidos curriculares comunes a los países participantes en el estudio, con el fin de establecer dominios de contenidos y procesos cognitivos comunes a los estudiantes de educación primaria de todos los países participantes.

Los estudiantes de 3° grado de Educación Primaria en México se ubicaron con puntuaciones medias superiores, en los niveles III y IV. Los niveles que se manejaron en esta prueba fueron cuatro; en el nivel IV se ubican los niños con mayor desarrollo de habilidades y en el nivel I los niños con menores habilidades.

El enfoque de la prueba SERCE considera que la alfabetización matemática es un proceso permanente, que incluye conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y actitudes (UNESCO y LLECE 2008, p. 14). En este sentido los niños deben desarrollar competencias que les ayuden no sólo a resolver situaciones matemáticas, sino también desenvolverse en cualquier situación escolar o de la vida diaria.

El SERCE es una evaluación donde los países participantes poseen características similares; por ello consideramos que es una prueba más objetiva en sus resultados. Al comparar a México con países latinoamericanos y de El Caribe observamos que sus resultados no son tan alarmantes en comparación a pruebas como PISA donde se compara a México con países desarrollados; incluso, de acuerdo con los resultados del SERCE, se podría decir que la educación en México es satisfactoria.

1.3 Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos

Los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE), es una prueba nacional, diseñada y aplicada por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). Se aplica a muestras representativas de estudiantes de escuelas públicas y privadas, de educación básica. Los grados a evaluar son los terminales de cada nivel escolar: 3º de preescolar, 6º de primaria y 3º de secundaria. Posteriormente, se añade 3º de primaria con el fin de evaluar segmentos de tres años escolares. El número de estudiantes varía de acuerdo con el Estado, el grado a evaluar y la modalidad educativa de que se trate (Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE), General, Indígena o Particular).

La prueba mide el logro educativo del sistema en su conjunto. Es decir evalúa el logro escolar de los estudiantes de educación básica en distintas asignaturas y grados. El plan de evaluación EXCALE se basa en un programa cuatrianual; un mismo grado se evalúa cada cuatro años, por ejemplo: si a tercero de preescolar se evaluó en el 2011, se volverá a evaluar en el 2015. Después de aplicar la prueba, se analizan los resultados con el fin de establecer los niveles de logro de los estudiantes. Los niveles de logro se clasifican en: avanzado, medio, básico y por debajo del básico.

Los resultados de ésta prueba se establecen a partir de los niveles de logro de los estudiantes, y además un análisis estadístico enfatiza en el comportamiento psicométrico de las pruebas aplicadas.

En el Estudio Comparativo de Aprendizaje en Sexto de Primaria en México 2005 – 2007; se señala lo siguiente: en ambas evaluaciones, se aplicaron 130 reactivos en matemáticas. Los reactivos se organizaron a lo largo de la escala 200-800 antes mencionada (avanzado, medio, básico y por debajo del básico. Al comparar los niveles Por debajo del básico y Medio, se percibió

> "…para la población de estudiantes del país hay menos alumnos (3%) en el nivel inferior en 2007 que en 2005; inversamente hay más escolares (3%) en el nivel Medio en 2007 que en 2005. Es decir, en 2007 disminuyeron los educandos con puntuaciones más bajas, mientras que aumentaron aquellos con puntuaciones medias" (INEE, 2008, p. 66).

Por ejemplo, al comparar los resultados del contenido: Resolver problemas que impliquen una suma, en 2005, a nivel nacional, se obtuvo un 76% de aciertos, que pasó a un 77% en 2007. El contenido: Identificar las operaciones que resuelven un problema aditivo, en 2005 se obtuvo un 54 % y en 2007 el 58%. Los resultados de este comparativo, reflejan que en los niveles de aprendizaje entre los años 2005 y 2007 en contenidos de matemáticas hubo un pequeño incremento.

La prueba EXCALE es considerada como una las evaluaciones nacionales más completa, porque en ella se contemplan aspectos del currículo, del contexto social y cultural, así como de las diferentes modalidades educativas.

1.4 Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares

En lo que respecta a la *Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares* (ENLACE), es nacional de aplicación anual, diseñada y aplicada por la Secretaría de Educación Pública (SEP). De acuerdo con la SEP, el propósito de ésta prueba es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados. Se aplica en Educación Básica, a estudiantes de tercero a sexto de primaria y en los tres grados de secundaria, en función de los planes y programas de estudios oficiales.

La prueba mide el resultado del avance educativo de cada alumno en las materias básicas: español, matemáticas y, de manera rotativa, una tercera asignatura, hasta cubrir todo el currículum.

En la evaluación de 2011 en educación primaria fueron evaluados 8, 631, 091 niños en la asignatura de matemáticas. De la población evaluada el 16.5% se ubicó en el nivel insuficiente, el 46.5% en el nivel elemental, el 25. 9 % en el nivel bueno y sólo el 11 % en el nivel excelente (http://www.enlace.sep.gob.mx/ba/). Si integramos el porcentaje de los estudiantes que se colocan en los niveles insuficiente y elemental obtenemos un 63% del total, es decir la mayor parte de los estudiantes; esto es un claro indicador de que hay carencias en la enseñanza matemática.

Ante esta situación el sistema educativo mexicano, en su afán por mejorar la calidad educativa y corresponder a las sugerencias de organizaciones internacionales como la OCDE, se ha centrado en la evaluación, ya no sólo de los estudiantes sino también de los docentes. La SEP evalúa el desempeño de alumnos y profesores a partir de pruebas estandarizadas. En estas pruebas se dejan de lado aspectos propios de la sociedad como las condiciones sociales, culturales y económicas de la población educativa. Pareciera que el Estado, al tomar como referencia los resultados de las evaluaciones para mejorar el nivel educativo, sustenta su toma de decisiones sólo en lo cuantitativo, da relevancia a las cifras que se manifiestan en las estadísticas y emite un juicio de los logros o descensos de la educación sin considerar el contexto real de estudiantes y docentes.

Siguiendo con el propósito de mejorar la calidad de la educación en el país, la SEP trabajó en la Reforma 2011 del Plan y Programas de Estudio. Esta reforma se caracteriza básicamente por la articulación de contenidos de preescolar a secundaria y por el énfasis en el desarrollo de competencias de los estudiantes. Dicha reforma fue planteada en el *Programa Sectorial de Educación* (PSE) 2007 – 2012. A continuación se describen el PSE y las últimas reformas en nuestro país.

1.5 Programa Sectorial de Educación 2007 – 2012

De acuerdo con el Artículo Tercero Constitucional, el Estado es responsable de brindar educación democrática, nacional, intercultural, laica y obligatoria a todo mexicano. La educación preescolar, primaria y la secundaria conforman la educación básica obligatoria. En atención a ello en el gobierno del 2006 al 2012 se integró el PSE.

Los objetivos del PSE fueron encaminados a brindar una mejor educación donde se promoviera la equidad, la educación integral, el impulso al uso de la tecnología y el fomento hacía la participación de los actores involucrados en el ámbito educativo.

En el PSE, como parte de las estrategias y líneas de acción en el objetivo uno se propuso “Realizar una reforma integral de la educación básica centrada en la adopción de un modelo educativo basado en competencias, que responda a las necesidades de desarrollo de México en el siglo XXI” (SEP, 2007, p. 23).

En la Reforma a la educación básica se propusieron estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes asignaturas. En el caso de la asignatura de matemáticas una estrategia propuesta fue, “Articular esfuerzos y establecer mecanismos para asegurar el desarrollo de habilidades cognoscitivas y competencias numéricas básicas que permitan a todos los estudiantes seguir aprendiendo” (SEP, 2007, p. 24). El desarrollo de esta estrategia se llevaría a cabo mediante las siguientes acciones: “1) Crear un Programa Nacional de Pensamiento Lógico Matemático y aplicación de la Ciencia en la vida diaria y 2) Realizar talleres, elaborar materiales y capacitar a los docentes responsables de impartir matemáticas” (SEP, 2007, p. 24).

El PSE considera aspectos relacionados con el sistema educativo bajo el título de Temas Transversales. El tema que aparece en primer término, y consideramos se le da mayor relevancia, es la *evaluación*, vista como parte esencial del mejoramiento del sistema. Dos de las estrategias en este tema son:

> Adecuar e instrumentar el Sistema Nacional de Evaluación Educativa para que se convierta en insumo de los procesos de toma de decisión en el sistema educativo y la escuela, cuyos resultados se difundan ampliamente entre la sociedad en general.
>
> Fortalecer las capacidades de planeación y toma de decisiones de la escuela, a partir de los resultados de la evaluación, para que se traduzca en mejoras de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (SEP, 2007, 57).

Pareciera que todo gira en torno a la evaluación y que las decisiones del Sistema Educativo se basaran sólo en resultados cuantitativos. Este tema es un tanto contradictorio por un lado se aplican evaluaciones estandarizadas, pero al mismo tiempo se solicita que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean adecuados a las características propias de determinado grupo escolar. Las escuelas de una u otra región son diferentes, en un mismo centro escolar los grupos de un mismo grado no son iguales y en un grupo de estudiantes, cada niño es un caso particular; por lo tanto se considera que al evaluar con una misma prueba a miles de estudiantes, se deja de lado el proceso de aprendizaje de los niños, sus situaciones culturales y económicas.

A cinco años de puesto en marcha el PSE, es evidente que los objetivos propuestos no se han cumplido en su totalidad. Al organizar el PSE se enunciaron estrategias y líneas de acción, pero faltó sistematizar el cómo se llevarían a cabo las acciones que conllevarían al logró de los objetivos; pareciera que algunas estrategias y acciones sólo quedaron en discurso.

Por otro lado uno de los propósitos del PSE fue la Reforma Integral de Educación Básica. A continuación se mencionan sus aspectos más relevantes:

Previo al PSE 2007-2012, se llevó a cabo la *Reforma de la Educación Secundaria 2006*. Con ello se pretendía responder al avance tecnológico y científico de la sociedad, y a las necesidades que se consideraba en ese momento se tenían.

Uno de los objetivos del Plan de Estudios 2006, fue la articulación con los niveles de preescolar y primaria "para configurar un solo ciclo formativo con propósitos comunes, prácticas pedagógicas congruentes, así como formas de organización y de relación interna que contribuyan al desarrollo de los estudiantes y a su formación como ciudadanos democráticos" (Plan de Estudios 2006, p.8).

Antes de este Plan de Estudios, en la reforma de 1993 se planteó una formación general, única y común para todos los alumnos; sin embargo, en la práctica no se había logrado una vinculación con los niveles anteriores de la educación secundaria. Por ello la necesidad de una educación básica sistematizada y con mayor vinculación entre los tres niveles que la integran.

En el perfil de egreso de los estudiantes se planteó un conjunto de rasgos que deberían tener al término de la educación básica para desenvolverse en un mundo en constante cambio. Con estos rasgos se propuso fortalecer las competencias para la vida; incluyendo aspectos cognitivos, afectivos y sociales.

Posteriormente, en la *Reforma de Educación Básica 2009,* se retoman elementos como los ya mencionados.

1.6 Plan de estudios 2009 de Educación Primaria

Como parte de la transformación educativa, planteada en el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, en conjunto con los objetivos señalados en el PSE 2007-2012; la SEP retoma el objetivo fundamental del PSE: "Elevar la calidad de la educación para que los estudiantes mejoren su nivel de logro educativo, cuenten con medios para tener acceso a un mayor bienestar y contribuyan al desarrollo nacional" (SEP, 2007, p.11). Con ello la SEP contribuiría a mejorar el nivel de logro educativo que coadyuve a su bienestar y contribuya al desarrollo nacional.

Por otro lado, la educación básica a nivel internacional, estableció objetivos de cobertura y calidad. De acuerdo con el *Plan de Estudios 2009* algunos de los objetivos se enuncian y se sustentan en lo siguiente:

> En la Conferencia Mundial sobre Educación para Todos, celebrada en Jomtien, Tailandia (1990), se planteó la necesidad de garantizar el acceso universal con una "visión ampliada" para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje de cada persona –niño, joven o adulto–. (Plan de estudios 2009, p. 13).

Es decir, todo individuo tiene derecho de acceder a la educación; éste es un derecho universal.

Otro aspecto relevante es que la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI, presidida por Jacques Delors (1996), señala en su informe presentado a la UNESCO que los contenidos educativos en educación básica tienen que fomentar el deseo de aprender, el ansia y la alegría por conocer y, por lo tanto, el afán y las posibilidades de acceder más tarde a la educación durante toda la vida.

Por lo tanto como todo cambio o propuesta curricular *La Reforma de la Educación Básica 2009* surge como respuesta a las demandas de educación tanto nacional como internacional.

Las principales estrategias de esta Reforma Educativa en la Educación Básica son: la articulación de la educación preescolar, primaria y secundaria; y la organización de un plan de estudios basado en el modelo educativo por competencias.

Se emplea nuevamente el concepto de competencias utilizado en el Programa de estudios 2006 de Educación Secundaria.

> Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en contextos y situaciones diversas, por esta razón se utiliza el concepto "movilizar conocimientos" (Perrenoud, 1999). (Plan de estudios 2009, p. 40).

En relación a la asignatura de matemáticas, por medio de su estudio se pretende que los estudiantes desarrollen:

> a) Una forma de pensamiento que les permita interpretar y comunicar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales.
>
> b) Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas.
>
> c) Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes. (Plan de estudios 2009 de sexto grado de primaria).

Para lograr estos propósitos, en la escuela se debe favorecer un ambiente de trabajo colectivo donde profesores, estudiantes, autoridades educativas y padres de familia contribuyan al desarrollo de ellos.

Con el estudio de las Matemáticas se espera que los alumnos desarrollen las siguientes competencias:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

De acuerdo con lo señalado en el Plan de Estudios 2009, los contenidos que se estudian en educación primaria, en la asignatura de matemáticas se organizan en tres ejes temáticos: 1) Sentido numérico y pensamiento algebraico. 2) Forma, espacio y medida. 3) Manejo de la información

En lo que se refiere al trabajo del docente, se propone que el profesor sea un guía o coordinador de la clase. Para ello, el ambiente de aprendizaje de acuerdo a éste plan debía considerar tres elementos: **actividad de estudio, pensamiento matemático de los alumnos y gestión**, para que los alumnos y el profesor encuentren sentido a las actividades que realizan conjuntamente.

1.7 Plan de estudios 2011 de Educación Primaria

En este Plan de estudios se rescatan elementos ya trabajados en los Planes de estudios 2006 y 2009 entre ellos los siguientes:

- La articulación de la educación preescolar, primaria y secundaria.
- Organización de un plan de estudios basado en el modelo educativo por competencias.

Algunas características del Plan de estudios 2011 de Educación Básica

En el Plan de Estudios 2011 se establecen: el perfil de egreso, los estándares curriculares, los aprendizajes esperados y el desarrollo de competencias que se pretende propiciar en los estudiantes, con ello contribuir a la formación de ciudadanos críticos, democráticos y competentes para la vida.

Por otro lado los campos de formación para la educación básica organizan, regulan y articulan los espacios curriculares; tienen un espacio interactivo entre sí, y son congruentes con las competencias para la vida y los rasgos del perfil de egreso.

Los campos de formación para la educación básica son:

1) Lenguaje y comunicación.
2) Pensamiento matemático.
3) Exploración y comprensión del mundo natural y social.
4) Desarrollo personal y para la convivencia.

Para efectos de nuestro estudio sólo nos centraremos en el campo de formación: *Pensamiento matemático*. Éste

> …articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla (*Plan de Estudios 2011*, p. 49).

Los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, en términos de lenguaje, representaciones y procedimientos. Se toma en consideración saberes previos de los niños. Estos saberes previos son la base de conocimientos futuros de los que los estudiantes se apropian de manera sistemática y gradual. También es relevante mencionar la actividad intelectual fundamental en estos procesos, ésta "…se apoya más en el razonamiento que en la memorización" (*Plan de*

Estudios 2011, p. 49). De ahí que lo que se busca en un futuro en los estudiantes es que resuelvan situaciones de problemas matemáticos que se les presenten en su vida diaria.

Para lograr lo antes mencionado, en el Plan de Estudios 2011 se manifiesta que el estudio del Pensamiento Matemático "…se plantea con base a la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones" (p. 49). Por ejemplo en el nivel de preescolar la finalidad del desarrollo del pensamiento matemático es:

> …que los niños usen los principios del conteo; reconozcan la importancia y utilidad de los números en la vida cotidiana, y se inicien en la resolución de problemas y en la aplicación de estrategias que impliquen agregar, reunir, quitar, igualar y comparar colecciones. Estas acciones crean nociones del algoritmo para sumar o restar (*Plan de Estudios 2011*, p. 49).

Esta finalidad será cumplida con base en las características propias de cada institución y de los alumnos particularmente. Los factores que podrían intervenir son de carácter social, cultural, económico, entre otros.

También es pertinente mencionar que en la escuela primaria estos saberes se convierten en una base de conocimientos consecutivos. Por ejemplo, nuestro estudio *Resolución de problemas de estructura aditiva con alumnos de segundo grado de primaria* es un seguimiento a conocimientos que de acuerdo con lo planteado en el *Plan de Estudios 2011,* ya habría conocimientos previos desde preescolar.

En el nivel de primaria y secundaria el desarrollo del *pensamiento matemático* "se orienta a aprender a resolver y formular preguntas en que sea útil la herramienta matemática” También se hace énfasis en que “los propios alumnos justifiquen la validez de los procedimientos y resultados que encuentren, mediante el uso de este lenguaje” (*Plan de Estudios 2011*, p. 49).

Para efectos de nuestro estudio nos interesa conocer la manera como la SEP concibe el contenido de *La resolución de problemas de estructura aditiva en el segundo grado de primaria*. De acuerdo con el Programa de Estudios en la escuela primaria, como resultado del estudio de las matemáticas se espera que los alumnos: Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos. (*Programa de Estudio de Segundo grado, 2011*; p. 70).

De acuerdo con el *Plan de Estudios 2011*, el enfoque didáctico del estudio de las matemáticas nos remite al desarrollo de competencias por medio de la resolución de problemas, donde se promueva el razonamiento de los niños y existan diversos procedimientos para resolver un mismo problema. Los problemas matemáticos planteados a los niños deben generar la movilización de sus habilidades y conocimientos previos, y llevarlos hacia la consolidación o adquisición de nuevos conocimientos. La discusión y argumentación por parte de los niños juega un papel fundamental en la resolución de problemas, por medio de ellas se da la oportunidad de explicar y conocer otras maneras de resolver un mismo problema.

En lo que se refiere a las competencias para la vida, éstas, “Movilizan y dirigen todos los componentes-conocimientos, habilidades, actitudes y valores- hacia la consecución de objetivos concretos; son más que el saber, el saber hacer o el saber ser, porque se manifiestan en la acción de manera integrada” (*Plan de Estudios 2011*, p. 38). Con el desarrollo de competencias se pretende que los niños pongan en práctica sus conocimientos para resolver situaciones de problema que se les presenten dentro o fuera de la escuela.

Las competencias que éste Plan de Estudios pretende se desarrollen en los tres niveles de educación básica y a lo largo de la vida son las siguientes:

Competencias para el aprendizaje permanente.

Competencias para el manejo de la información

Competencias para el manejo de situaciones

Competencias para la convivencia

Competencias para la vida en sociedad

El desarrollo de estas competencias contribuirá a la formación del perfil de egreso de los estudiantes. Los alumnos, al término de la educación básica, mostraran varios rasgos; por ejemplo, con el estudio de las matemáticas se favorecerán rasgos como:

- Argumenta y razona al analizar situaciones, identifica problemas, formula preguntas, emite juicios, propone soluciones, aplica estrategias y toma decisiones. Valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y puede modificar, en consecuencia, los propios puntos de vista.

- Busca, selecciona, analiza, evalúa y utiliza la información proveniente de diversas fuentes. (*Plan de Estudios 2011*, p. 39).

El logro de todos los rasgos que conforman el perfil de egreso es tarea de maestros, padres de familia, alumnos y todos los involucrados en el ámbito educativo. Dicho perfil de egreso podrá manifestarse al alcanzar de forma paulatina y sistemática los aprendizajes esperados y los estándares curriculares.

Los estándares curriculares están organizados en cuatro períodos escolares de tres grados cada uno. 1°) hasta el tercer grado de preescolar, 2°) hasta el tercer grado de primaria, 3°) hasta el sexto grado de primaria y 4°) hasta el tercer grado de secundaria.

La organización de estos corresponde, de manera aproximada y progresiva, a características clave del desarrollo cognitivo de los estudiantes. Los estándares son el referente para el diseño de instrumentos que, de manera externa, evalúen a los alumnos, es decir comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares. Los cuales se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Al segundo grado de primaria le corresponde el segundo periodo escolar, éste se concluye en el tercer grado de primaria, entre 8 y 9 años de edad. Los estándares curriculares de este periodo corresponden a dos ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento algebraico, y forma, espacio y medida.

Nuestro estudio *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria* se ubica en el eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico. Al término del segundo periodo (tercero de primaria), se espera que los estudiantes sepan resolver problemas aditivos con diferente estructura, y utilicen los algoritmos convencionales. En segundo grado de primaria los niños estarían en la parte medular del proceso que los conlleve al logro de este objetivo.

También cabe mencionar que durante el segundo periodo en el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico se incluyen los siguientes temas: 1) Números y sistemas de numeración. 2) Problemas aditivos. 3) Problemas multiplicativos. Nuestro estudio toca los dos primeros temas.

Uno de los estándares curriculares para este eje es. El alumno: “Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números naturales, utilizando los algoritmos convencionales” (*Programas de Estudio de Segundo grado, 2011*; p. 72).

En lo que concierne al uso de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones, el *Plan de Estudios 2011*, menciona:

> El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlos de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. (p. 52).

Consideramos que emplear reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones de manera flexible para solucionar problemas es primordial en el enfoque de las matemáticas; con ello se propicia un aprendizaje de las matemáticas con un sentido para quiénes aprenden.

En los primeros años escolares los niños tienden a recurrir a soportes de representación con material tangible, con sus dedos o de manera gráfica (elaboran dibujos para representar problemas); Maza (1999), señala que los niños disponen de formas de representación (fundamentalmente la manipulación de objetos y el uso de dedos) y, conforme a ellas, distintas maneras de resolver problemas de rango limitado.

Hay problemas con cantidades pequeñas, y estructura semántica y de sintaxis que se pueden solucionar por medio del conteo con dedos o manipulación de material; por ejemplo, un problema de combinación con resultado desconocido; sin embargo para cantidades mayores o estructuras más complejas de problemas aditivos (como un problema de cambio aumentando con inicio desconocido) estas maneras de resolver el problema resultarían poco eficaces, y es en ese momento cuando el uso del algoritmo apoya en la resolución de un problema de forma más rápida y eficiente. Es así como los niños de primero y segundo grados de educación primaria se acercan al aprendizaje matemático por medio de la resolución de problemas aditivos.

Otro elemento que forma parte de la estructura de los programas son los *aprendizajes esperados,* que señalan de manera sintetizada los conocimientos y las habilidades que los alumnos deben alcanzar en un tiempo determinado.

De acuerdo con el *Programa de Estudios de Segundo grado, 2011*, la organización de contenidos y aprendizajes esperados en segundo grado de primaria, relacionados con la resolución de problemas de estructura aditiva y el sistema de numeración decimal indo–arábigo, es la siguiente:

Tabla 1. Organización de contenidos de 2° de primaria relacionados con los temas de: problemas aditivos y SND

Bloque I	
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente	
Aprendizajes esperados	**Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico**
Determina la cardinalidad de colecciones numerosas representadas gráficamente.	**Números y sistemas de numeración** • Identificación de las características de hasta tres cifras que forman un número para compararlo con otros números. • Elaboración de estrategias para facilitar el conteo de una colección numerosa (hacer agrupamientos de 10 en 10 o de 20 en 20). **Problemas aditivos** • Resolución de problemas que involucren distintos significados de la adición y la sustracción (avanzar, comparar o retroceder). • Construcción de un repertorio de resultados de sumas y restas que facilite el cálculo mental (descomposiciones aditivas de los números, complementos a 10).

Tabla 1 [Continuación]

Bloque II	
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente	
Aprendizajes esperados	**Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico**
Produce o completa sucesiones de números naturales, orales y escritos, en forma ascendente o descendente.	**Números y sistemas de numeración** • Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes de 5 en 5, de 10 en 10. • Identificación de la regularidad en sucesiones ascendentes con progresión aritmética, para intercalar o agregar números a la sucesión. **Problemas aditivos** • Determinación de resultados de adiciones al utilizar descomposiciones aditivas, propiedades de las operaciones, y resultados memorizados previamente. • Resolución de problemas de sustracción en situaciones correspondientes a distintos significados: complemento, diferencia.
Bloque III	
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente	
Aprendizajes esperados	**Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico**
• Resuelve problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.	**Números y sistemas de numeración** • Determinación del valor de las cifras en función de su posición en la escritura de un número. • Orden y comparación de números hasta de tres cifras.

Tabla 1. [Continuación]

Bloque IV	
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente	
Aprendizajes esperados	**Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico**
• Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con objetos o figuras.	**Números y sistemas de numeración** • Identificación de algunas diferencias entre la numeración oral y la escrita con números de hasta tres cifras. • Identificación y descripción del patrón en sucesiones construidas con figuras compuestas. **Problemas Aditivos** • Resolución de sustracciones utilizando descomposiciones aditivas, propiedades de las operaciones o resultados memorizados.
Bloque V	
Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente	
Aprendizajes esperados	**Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico**
• Identifica, compara y produce, oralmente o por escrito, números de tres cifras. • Resuelve problemas que implican el uso del calendario (meses, semanas, días).	**Números y sistemas de numeración** • Escritura de números mediante descomposiciones aditivas en centenas, decenas y unidades. • Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes, de 100 en 100. Anticipaciones a partir de las regularidades.

Tomado del Plan de Estudios 2011 de segundo grado de primaria

Las evaluaciones que se hacen en el sistema educativo a nivel nacional e internacional son fundamentales para tener referencias de los conocimientos que tienen los alumnos; sin embargo en la mayoría de estas evaluaciones sólo se presta atención a los resultados de los instrumentos aplicados; cada reactivo es correcto o incorrecto. Se analiza la situación educativa en términos cuantitativos. A diferencia de ello en el tema de estudio que realizamos se pone mayor énfasis en los procesos que realizan los niños para llegar a un resultado, más que en la respuesta misma.

Por otro lado, de lo revisado en el *Plan Sectorial de Educación y la Reforma Integral de Educación Básica* se destacan diversos aspectos en especial el trabajo articulado y sistemático de preescolar a secundaria por competencias. En el enfoque didáctico de las matemáticas se pone atención al estudio de ellas por medio de la resolución de problemas.

Para efectos de nuestro estudio se retomó la manera como la SEP concibe la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como la sistematicidad de los contenidos de: los problemas aditivos y el sistema de numeración decimal indo–arábigo en el segundo grado de primaria.

II. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL INDO-ARÁBIGO

En este capítulo trataremos los estudios desarrollados sobre el Sistema de Numeración Decimal Indo–Arábigo (SND). Inicialmente se describen las propiedades básicas que constituyen el sistema de numeración. Posteriormente se analiza y contrasta las hipótesis que elaboran los niños a partir de las reglas del SND. Finaliza el capítulo con aportaciones de estos estudios y lo que se recupera para este trabajo.

2.1 Propiedades básicas del SND

El SND es uno de los contenidos que se enseña en la escuela primaria y que tiene estrecha relación con la comprensión de las operaciones aritméticas elementales. En este trabajo exploramos principalmente la suma y la resta. El aprendizaje del SND, es un proceso donde el alumno debe desarrollar una comprensión en los números y que estos tengan un sentido, más allá del aprendizaje de su escritura.

El desarrollo de la historia del SND, de acuerdo con Terigi y Wolman “puede entenderse como una búsqueda sostenida de economía en la representación, que ha desembocado en la elaboración de un sistema por el cual con un pequeño número de símbolos es posible representar infinidad de cosas y realizar complejas operaciones” (2007, p. 66).

Algunos teóricos que se han dado a la tarea de indagar el sistema de numeración en la historia humana consideran que tres han sido las innovaciones más poderosas (Guitel, 1975; Ifrah, 1987), citadas por Terigi y Wolman (2007):

- Utilización de agrupamientos: la idea de agrupar las cantidades constituyó un primer paso en la economía de la representación.

- Utilización del principio de la base: convirtió los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento.
- Valor posicional de las cifras: ha sido el principio fundamental para la economía en la notación numérica; permitió eliminar en la escritura la representación de los exponentes de las potencias de la base. Cuando, escribimos 1346, es como si dijéramos:

$(1 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$. En lo cotidiano no hacemos este tipo de cálculos cada vez que encontramos una cifra; estamos acostumbrados a concebir las cantidades de acuerdo con el SND y por eso no es necesario. Al trabajar con el sistema, operamos bajo esta racionalidad, y para trabajarlo adecuadamente tenemos que dominarlo.

Por otro lado, Ross (1989) citada por Cortina (1997) reconoce cuatro propiedades básicas que constituyen el SND:

1. Propiedad posicional: la cantidad representada por un dígito en particular está determinada no sólo por su *figura*, sino también por su posición en el numeral.
2. Propiedad de *base diez*: los valores de la posición se incrementan de derecha a izquierda en potencias de diez.
3. Propiedad multiplicativa: el valor de un dígito se da multiplicando su valor aparente por el valor asignado a su posición.
4. Propiedad aditiva: la cantidad representada por todo el numeral es la suma de los valores representados por cada uno de los dígitos que lo componen.

2.2 Sistema de numeración decimal indo-arábigo

En los primeros años escolares, los niños sin conocer el SND, elaboran hipótesis sobre las reglas de éste. Lerner y Sadovsky (2010), desarrollaron un estudio sobre

El sistema de numeración con niños de 5 a 8 años de edad; los resultados reportados como parte de ese estudio mostraron que hay cuatro hipótesis sobre el sistema de numeración decimal:

1.- *Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número.* Por ejemplo, cuando se les preguntaba a los niños ¿cuál número es más grande el 33 o el 5? Aunque los estudiantes no conocían la denominación de los números contestaban que el 33 era más grande porque tenía dos números y el 5 más pequeño porque sólo tenía un número.

2.- *El primero es el que manda,* el valor de una cifra depende del lugar en el que este ubicada con respecto a las otras que constituyen el número. Cuando hay dos cantidades que inician con la misma cifra, hay que observar la segunda para definir cuál es mayor.

3.- La apropiación de la escritura convencional de los números no sigue el orden de la serie numérica: *los niños manejan en primer lugar los nudos es decir las decenas, centenas, unidades de mil…, exactas y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos*.

4.- La escritura surge de la numeración hablada, *los niños escriben los números tal cual los escuchan*. Por ejemplo para escribir el número 109, los niños escriben 1009.

Estas hipótesis son aproximaciones que hacen los niños del SND, y van desde las reglas intuitivas que ellos elaboran hasta la adquisición de las reglas del sistema, de acuerdo con el apoyo que se brinde a los niños en la escuela y en casa. En ocasiones estas hipótesis no son consideradas en la instrucción escolar o se les considera como errores.

En la enseñanza usual del SND, Terigi y Wolman (2007), consideran ineludible enseñar los números de uno por vez, comenzando por los dígitos y respetando el orden de la serie. Se establecen cortes en el SND para secuenciar su enseñanza según los años de la escolaridad: del 1 al 100 en primero, hasta el 1000 en segundo y así sucesivamente. Esta manera de trabajar el SND limita la adquisición de sus reglas; al reducir la enseñanza de los números hasta determinado número en un grado escolar, no es posible interactuar con el sistema como tal y es más difícil que los niños perciban características como el valor posicional de los números o la recursividad del agrupamiento.

Las autoras Brizuela y Cayton (2010), exploraron las diferencias en el tipo de producciones de numerales que hacen los niños como consecuencia de dos modos distintos de presentar números: presentación oral y con fichas de valores. Para su estudio trabajaron con niños de preescolar, primero y segundo grados de escuela primaria. El objetivo de su estudio fue explorar el impacto que tienen dos tipos de representaciones externas de números en las producciones convencionales y no convencionales de numerales por parte de los niños.

Las autoras encontraron en su estudio, las respuestas de los niños agrupadas en 9 categorías: 1) Otros tipos de notación, 2) Idiosincrática, 3) Respeta la cantidad de dígitos, 4) Cuenta las fichas +/-1, 5) Omisión de dígitos, 6) Transposición de dígitos, 7) Transcodificación literal completa, 8) Notación compactada y 9) Notación convencional.

En primero y segundo grados la mayoría de respuestas fueron de tipo convencional. En preescolar las respuestas se ubicaron más en el tipo no convencional. Las primeras cinco categorías se presentaron en los niños de preescolar y primer grado, no así en segundo grado.

En el caso de preescolar la presentación oral de números se asoció en su mayoría a las respuestas de tipo convencional, y la presentación de fichas se asoció a las respuestas de tipo no convencional. En primer grado las notaciones convencionales se asociaron con las presentaciones de números de manera oral y con fichas. En segundo grado la presentación de números con fichas ya no presentó las mismas dificultades que para los grados anteriores, pero aun así la mayoría de respuestas de tipo convencional se asociaron más a la presentación de números de manera oral.

De acuerdo con su investigación, Brizuela y Cayton (2010), señalan que en la escuela a veces se introducen sistemas de representación, mediante el uso de materiales concretos, con la intención de facilitar la comprensión del sistema de numeración. Sin embargo, ellas observaron en su estudio que estos supuestos apoyos presentan dificultades, pues los niños deben apropiarse de sus reglas subyacentes de funcionamiento para realmente comprenderlos; es decir, los niños no sólo deben apropiarse de las reglas del SND sino también deben conocer y aprender las características del material con el que se trabaje; por ello, las autoras consideran que el recorrido que se realiza para apropiarse del SND es más largo cuando se emplea algún material concreto que sin el uso de éste.

2.3 Sistema de numeración decimal indo-arábigo relacionado con el algoritmo de la suma y la resta

Durante el tiempo de labor docente, frente a grupo, con niños de 1° y 2° grados al abordar la resolución de problemas aditivos, me percaté de que a los niños se les dificultaba la sustracción donde habían transformaciones; por ejemplo: 100 – 19. Los estudiantes se planteaban la pregunta ¿Cómo quitarle 9 al 0?, si el 0 no vale. Lerner (1997) observa que el valor del 0 cuando forma parte de una cantidad de dos o más cifras, plantea una situación problemática: representa al mismo tiempo la ausencia de elementos y la presencia de una posición. Es complicado comprender estas dos funciones del 0 de manera simultánea *ausencia de elementos* y *presencia de posición*; esto crea complejidad en la resolución de problemas: a los estudiantes pequeños les genera confusión, pues tienen la idea de que en una resta la cantidad mayor debe aparecer como minuendo y la cantidad menor como sustraendo, al aparecer cero lo relacionan con tener nada; y desean realizar la operación de manera inversa: 19 – 100, en vez de 100 – 19.

Otro problema que se presenta en los estudiantes son conceptos como: pedir prestado o llevar; pareciera que se ejecuta de manera mecánica, sin comprender el por qué, Lerner (1997) señala que una explicación que podemos encontrar para estos hechos es que no se ha brindado a los niños la posibilidad de comprender que procedimientos como *llevarse* y *pedir prestado* están estrechamente vinculados con la base decimal elegida por nuestro sistema.

Un aspecto relevante es que los niños comprendan que al formar conjuntos de diez objetos ya no son unidades sino decenas; diez de esos conjuntos forman una centena, diez centenas forman un millar y así sucesivamente. En este sentido Vergnaud (2010) puntualiza:

> Es esta función compuesta *n* la que actúa directamente durante el aprendizaje del sistema de numeración, cuando la agrupación de los objetos en paquetes de diez, y los paquetes de diez en paquetes de diez paquetes, etc., es puesta en paralelo con el código de la numeración de posición (columna de las unidades, columna de las decenas, columna de las centenas, etc.). (p. 139).

Por ejemplo al sumar 6 más 8, el resultado es 14, al agrupar en 10, se tiene un grupo que es 1 decena y los 4 objetos restantes pertenecerían a otro grupo que es el de las unidades, por lo tanto se colocan las unidades y las decenas en su columna respectiva. "Es este homomorfismo compuesto el que se utiliza en la regla de la adición (se suman las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.; "llevamos" una si el número encontrado rebasa diez, etc.)." (Vergnaud, 2010, p. 139).

En el caso de *pedir prestado*, se podría recurrir a los desagrupamientos. Por ejemplo: si a 36, le quitan 19; como al 6 no se le puede quitar 9, se toma una decena, se cambia a unidades y se realiza la sustracción de 16 menos 9. De esta manera también se consolida el concepto de valor posicional del número, con el entendimiento de que el valor de un número es de acuerdo a la posición que ocupa en otro número.

2.4 Proceso de lecto–escritura del SND

En los primeros años escolares uno de los aprendizajes más relevantes en la matemática es la adquisición de la lecto–escritura del SND. De acuerdo con Alvarado y Ferreiro (2000), los niños de cuatro o cinco años que asisten a alguna institución escolar poseen cierta información sobre números escritos inferiores a la decena. Oralmente, pueden recitar series más extendidas (total o parcialmente ordenadas) pero rara vez han recibido instrucción sobre su escritura.

Los niños al ingresar a la escuela su proceso de lecto–escritura del SND continúa. Ese proceso irá en evolución hasta que los alumnos se apropien de él y pueden emplearlo de manera natural. Hay números que tienen nombres considerados como regulares, estos son más sencillos de aprehender por el alumno. Alvarado y Ferreiro señalan que “la regla de composición de 16 a 19, así como 21 a 29 y decenas siguientes es perfectamente regular y, por lo tanto, predictible: “diecisiete” es “diez y siete”; veintitrés es “veinte y tres”, y así siguiendo” (2000, p. 7).

También dentro del SND se encuentran números con nombres irregulares, por ejemplo: los números del 11 al quince. En once no hay relación con el número 11; o el catorce 14 tampoco hay una relación. Está relación es de lo oral a lo escrito.

En el estudio realizado por Alvarado y Ferreiro (2000), las autoras encontraron que: “La escritura del 12 resulta ser especialmente difícil para los niños. Al tratar de ubicar los componentes del número, la denominación ofreció pistas falsas que los llevaron a identificar “dos” como el elemento inicial de este número” (p. 12). Por lo tanto para escribir 12, escribieron 2 1, trataron de corresponder la parte oral con la parte escrita. En este caso, como el 12 es un número irregular, no hay una coherencia de lo oral a lo escrito.

Otro aspecto relevante encontrado fue el uso de números comodines. Según Quinteros (1997) citada por Alvaro y Ferreiro (2010), los comodines son “un caso particular del uso de letras substitutas, pues se emplean sólo cuando los niños están seguros de que deben incluir una letra más en la escritura de una palabra pero no están seguros de qué letra emplear” (p, 12). En la escritura de los números los niños también recurren al uso de comodines, saben que deben escribir un número más, pero no saben cuál; por lo tanto, escriben el número que creen podría ser el indicado.

De igual manera es destacable mencionar el uso de la rotación de números como recurso gráfico; en los primeros años escolares los niños relacionan las grafías para designar los nombres de los números que poseen una característica similar pero también muestran una diferencia. Por ejemplo, en el estudio realizado por las mismas autoras, en una entrevista a uno de los niños se le pidió que escribiera el número treinta y seis, para escribirlo, anotó: Ɛ 6, (el tres lo anotó rotado). Posteriormente se le pide que anote sólo el número tres, lo anotó: 3. Cuando se le cuestionó porqué había escrito el tres en treinta y seis así: Ɛ, dijo que porque se parecía al tres, su nombre sonaba como trein que se parece a tre de tres. El 3 es de tres solito y el Ɛ es de cuando se parece a tres.

Así como este caso, se presentan muchos más con otros niños que se inician en la lecto–escritura del SND, y no sólo con el número tres sino también con los demás números. Lo que falta como docentes, es tener conocimientos de este tipo de investigaciones para encauzar los conocimientos y acercamientos de los niños a la apropiación del SND.

Después de esta revisión, se retomó para el tema de estudio lo fundamental que es el conocimiento del SND para el niño y cómo repercute en la representación de los números. Entre otras cosas el niño debe aprender y comprender que cada agrupamiento de diez implica pasar a otro nivel de agrupamiento, que el valor relativo y absoluto del número son dos cosas diferentes, por ejemplo: 108 no es lo mismo que 1008. Al apropiarse de las reglas del SND, el uso de los algoritmos de la suma y la resta en la resolución de problemas aditivos se vuelve más sencillo.

También se reflexionó en el reconocimiento de que los niños antes de apropiarse de las reglas del SND, construyen hipótesis de éste, como parte de su desarrollo en la adquisición del sistema.

III. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

En este capítulo se revisa la literatura relacionada con los problemas de estructura aditiva. Se inicia con la definición de problema, seguida del estudio que realiza Vergnaud (2010) de los problemas de estructura aditiva. También se estudia la clasificación de los tipos y subtipos de problemas aditivos según Maza (1999), Bermejo (2004), entre otros. Finalmente se recuperan elementos de estas investigaciones para el desarrollo de este estudio.

3.1 ¿Qué es un problema?

La palabra problema o problemas adquiere un sentido preciso cuando se le emplea en el campo matemático; Ressia señala que:

> La didáctica de la matemática define los problemas como aquellas situaciones que generan un obstáculo a vencer, que promueven la búsqueda dentro de todo lo que se sabe para decidir en cada caso qué es lo más pertinente, forzando así la puesta en juego de los conocimientos previos, y mostrándolos al mismo tiempo insuficientes o muy costosos. (2003, p. 87).

Un problema representa para el alumno un obstáculo, mismo que puede superar al recurrir a sus conocimientos previos y combinarlo con sus hipótesis de cómo resolverlo. De acuerdo con Parra y Saiz, un problema es:

> …una situación en la que hay algo que no se sabe pero se puede averiguar. No se dispone de la solución, pero se cuenta con algunas herramientas para empezar a trabajar. Un problema es un desafío para actuar. Tiene que permitirles a los alumnos imaginar y emprender algunas acciones para

> resolverlo. Para que estas acciones se desplieguen, los alumnos necesitan, en primera instancia, construirse una representación mental de la situación (¿Quiénes intervienen? ¿Qué sucede? ¿Qué hay? ¿Qué pasó? ¿Qué se sabe?), y elaborar una primera interpretación de lo que se pregunta o se pide. (2007, p. 18).

De igual manera Castro, *Rico y Castro*, señalan: “Se considera un problema matemático a toda situación que entrañe una meta a lograr y en donde casi siempre existirá un obstáculo para alcanzar dicha meta”. (1996, p. 36).

En el proceso de resolución del problema se establece una interacción estrecha entre el alumno y el problema; se genera un ir y venir por parte del alumno en la selección de información del problema, los conocimientos previos y la forma de resolver. Sin embargo, la palabra problema es usada frecuentemente en el sentido de realizar un algoritmo. En esos casos el alumno sólo identifica en el enunciado del problema los números, para después hacer un algoritmo que no precisamente conduce a la solución del problema.

En el tema de estudio sólo nos centramos en los problemas de estructura aditiva; abordaremos éstos desde el punto de vista de diferentes autores.

3.2 Problemas de estructura aditiva

Los problemas de estructura aditiva, de acuerdo con Vergnaud (2010), son *“las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones o sustracciones”;* esto se refiere a aquellos problemas que, para su solución, implican realizar una suma o una resta.

Para Peltier (2003), los problemas aditivos son los que al solucionarlos involucran el uso de una suma, una resta o la combinación de ambas. De igual forma Castro et al. (1996), señalan que los problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con una operación de suma o de resta.

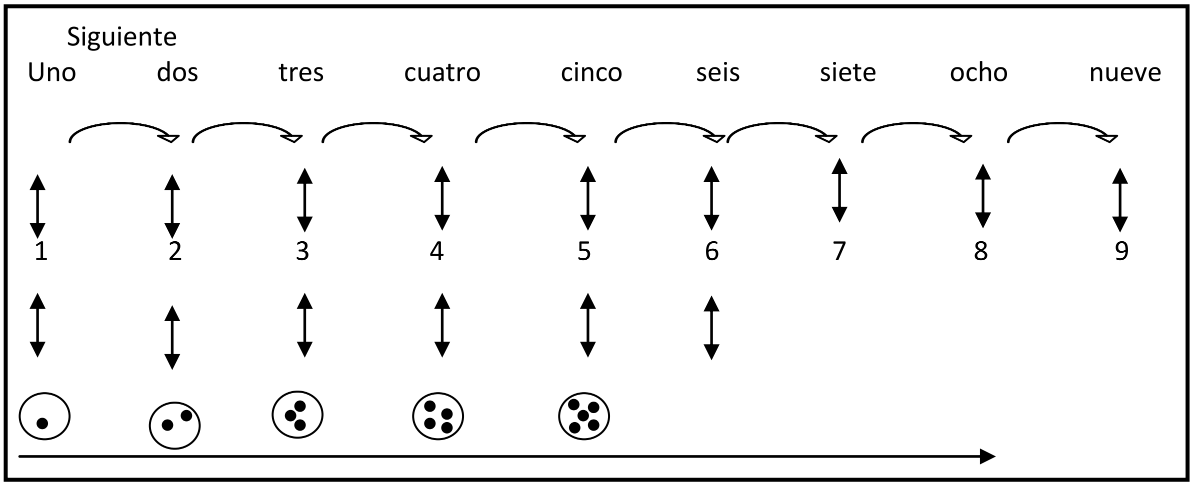
Por otro lado, Cantero et al. (2003) plantea que existen dos tipos de problemas dentro de la enseñanza de los problemas de estructura aditiva. Los primeros se les denominan *consistentes* y se refieren a aquellas situaciones de tarea donde tanto los términos como la operación aritmética a utilizar (suma o resta) son del mismo orden; es decir, que dentro del problema planteado va explicita la operación que se va a realizar y por tanto siempre se pregunta por la cantidad final, además de que la pregunta también se expresa al final, por ejemplo: *Pedro tenía 6 pesos y su mamá le regaló 4 más ¿Cuántos pesos tiene ahora Pedro?.* El segundo tipo de problema se le denomina *inconsistente*. Con ello se refiere que tanto los datos como las preguntas que se utilizan dentro de un problema están en un orden inverso y por tanto la operación aritmética requerida también, por ejemplo: *¿Cuántas canicas tenía Arturo cuando empezó a jugar, si ganó 5 y ahora tiene 12?* Como se puede apreciar, la pregunta está situada al inicio, además de que el orden de los datos es inverso al requerido de la operación; pareciera que es una suma pero es una resta. Otra característica de este tipo de problemas es que sus incógnitas pueden estar al inicio, en la transformación o al final del problema.

De acuerdo con Castro et al. (1996), los problemas de estructura aditiva se pueden entender en base a cuatro modelos: lineales, cardinales, de medidas y modelos funcionales. A continuación se explicará cada uno de estos.

3.3 Modelo lineal.

En este modelo se toma como elemento fundamental el uso de líneas numéricas o reglas numeradas. Según Resnick (1983), citado por Castro et al. (1996), “la línea numérica es un esquema mental que integra la sucesión de términos que sirven para contar, y que a su vez expresan el cardinal, al menos con pequeñas cantidades que se subitizan" (p. 132).

Figura 1. Modelo lineal



Tomada de Castro et al. (1996, p. 132).

Este modelo se suele emplear en preescolar y se utiliza para realizar operaciones, o para comparar directamente cantidades.

3.4 Modelo cardinal

En este modelo, aparecen diagramas de conjuntos. Estos esquemas se pueden emplear con carácter estático donde no hay acción, o con carácter dinámico donde la operación es el resultado de una acción. En el primer caso se trata de esquemas en los que se expresa la relación parte/ todo, y se puede representar de las siguientes maneras:

Figura 2. Relación parte todo I

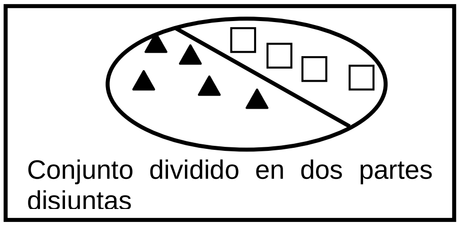
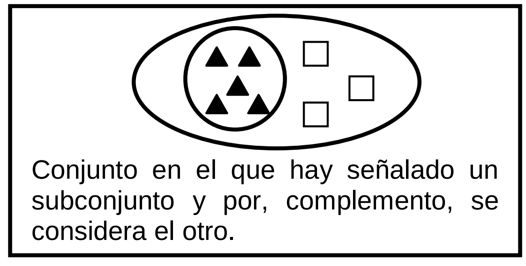


Figura 3. Relación parte todo II

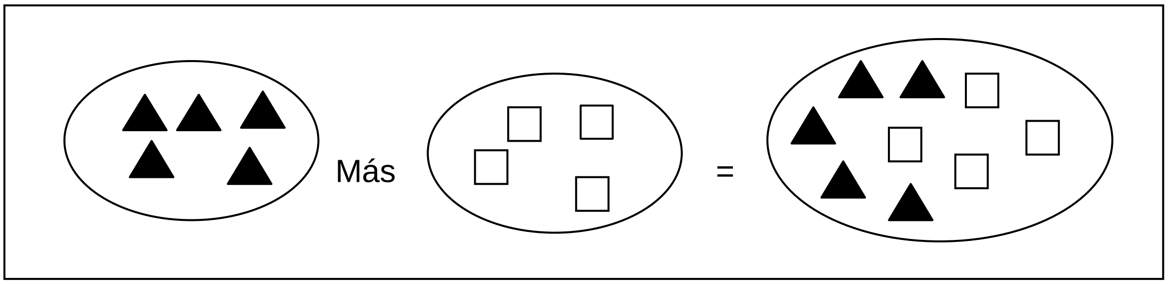


Tomado de Castro et al. (1996, p. 134).

Estos esquemas se utilizan para la adición y la sustracción. La expresión más usual para la adición es el primero y para la sustracción el segundo.

El esquema de un conjunto dinámico se interpreta como una secuencia que se desarrolla en distintos momentos. Su expresión usual en la suma es:

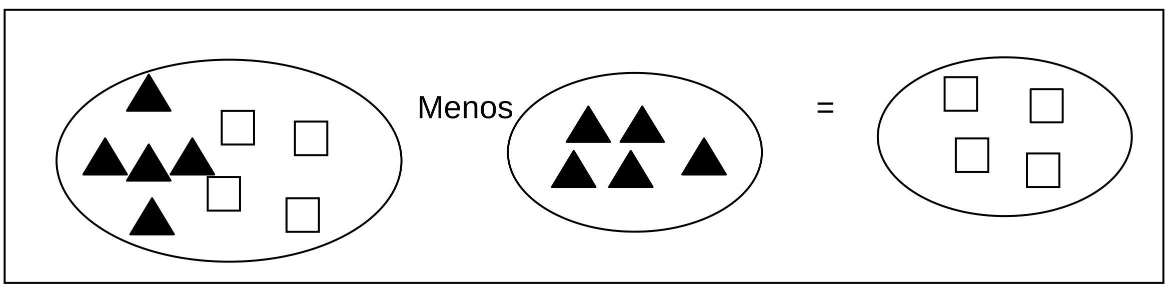
Figura 4. Esquema de un conjunto dinámico de la suma



Tomada de Castro et al. (1996, p. 134).

Y en la resta:

Figura 5. Esquema de un conjunto dinámico de la resta



Tomada de Castro et al. (1996, p. 134).

Para la suma, un mismo objeto aparece en un sumando y en el resultado, para la resta un mismo objeto aparece en el minuendo y luego en el sustraendo o en el resto. De acuerdo con Castro et al. (1996), esto puede propiciar errores en los niños, pues obliga a romper un convenio usual en el trabajo con los conjuntos: Que un objeto determinado se debe designar o representar de modo único. Este defecto del esquema se evita cuando el niño realiza la acción en vez de dibujarla.

3.5 Modelo con medidas

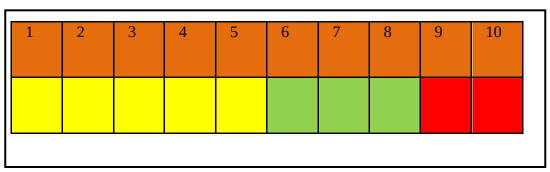
Con este modelo se pretende que los niños sean capaces de ver que la suma de dos números da lugar a otro número y que a su vez puede estar compuesto por dos números diferentes; es decir la parte asociativa de los números.

El contexto de medida tiene varios modelos entre los que destacan los longitudinales como las regletas de Cuisenaire o bien modelos sobre otras magnitudes como la balanza para la comparación de pesos.

Con las regletas Cuisenaire se pueden desarrollar actividades aditivas como la construcción de trenes con dos o más regletas y luego medir su totalidad con una única regleta. Ejemplo:

Figura 6. Construcción de trenes con regletas

5 + 3 + 2

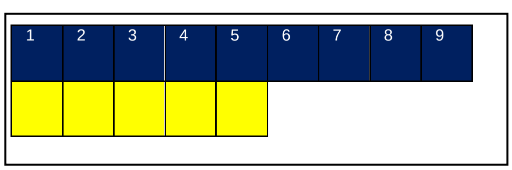


Tomada de Castro et al. (1996)

También se pueden realizar actividades de sustracción como determinar el complemento de una regleta respecto de otra mayor. Ejemplo:

Figura 7. Complemento de una regleta respecto de otra mayor

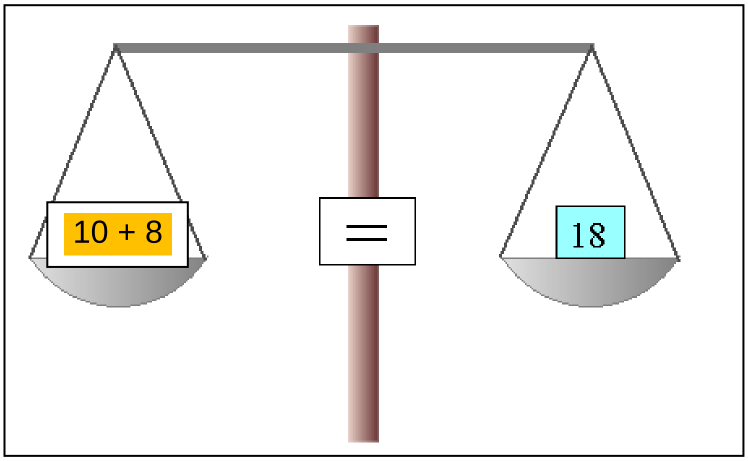
5 + ? = 8



Tomada de Castro et al. (1996)

El modelo de la balanza se emplea para la adición: la situación de equilibrio de la balanza expresa igualdad entre los sumandos (cantidades colocadas en un brazo) y el resultado (cantidad única colocada en el otro brazo). Ejemplo:

Figura 8. Uso de la balanza para la adición

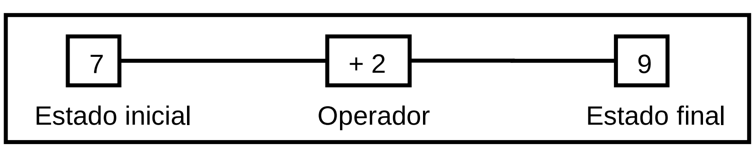


Tomada de Castro et al. (1996)

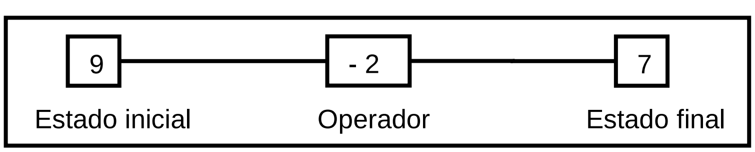
3.6 Modelo funcional

Describimos ampliamente el modelo funcional, debido a que con él desarrollamos nuestro tema de estudio. Según Castro et al. (1996), en el modelo funcional u operatorio se considera que el primer sumando (o el minuendo) es un estado inicial o de partida; el segundo sumando (o el sustraendo) es un operador o transformación de aumento/disminución que se realiza sobre el estado inicial; el resultado, en cualquier caso, es el estado final. En este modelo se supone que la operación transforma números en otros números mediante una ley determinada.

La operación 7 + 2 = 9 se esquematiza así:



Y la operación 9 – 2 = 7 se esquematiza así:



En sentido más amplio, Vergnaud (2010) realizó un estudio de los problemas de estructura aditiva y los divide en seis categorías.

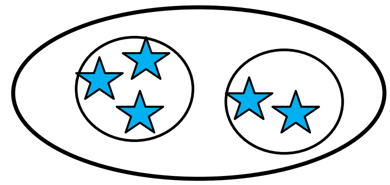
- Primera categoría: dos medidas se componen para dar lugar a una medida.
- Segunda categoría: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.
- Tercera categoría: una relación une dos medidas.
- Cuarta categoría: dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
- Quinta categoría: una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.
- Sexta categoría: dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

En cada categoría se generan diferentes clases de problemas; y las relaciones aditivas son ternarias, pues se relacionan tres elementos que se pueden enlazar de diversas maneras y ofrecer una variedad de estructuras aditivas. Más adelante profundizaremos en este tema.

3.7 Tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva en el modelo funcional

Siguiendo con el modelo funcional Maza (1999), señala que la clasificación más usual en la enseñanza de los problemas aditivos es: problemas de tipo combinación, cambio, comparación e igualación. A continuación se describen cada uno de estos.

Tabla 2. Problemas de tipo combinación

Problemas de combinación	
Consiste en determinar cuántos elementos resultan al reunir o combinar los elementos de dos conjuntos. Concepción binaria; unión de dos grupos.	 3 + 2 = 5
Subtipos de problemas de combinación	
Resultado desconocido: consiste en proponer dos conjuntos y preguntarse cuál es el resultado al reunir ambos. Ejemplo: Luis compró 7 canicas azules y 8 rojas. Cuántas canicas compró en total	? 7 | 8
Diferencia desconocida: se conoce la cantidad inicial y el resultado; la incógnita se encuentra en la diferencia. Ejemplo: Luis compró 7 canicas azules y algunas rojas. En total tiene 15 canicas. ¿Cuántas canicas rojas compró?	15 7 | ?
Cantidad inicial desconocida: se conoce el resultado y la diferencia, falta encontrar la cantidad inicial. Ejemplo: Luis compró algunas canicas azules y 8 canicas rojas. En total tiene 15 canicas. ¿Cuántas canicas azules compró?	15 ? | 8

Tomado de Maza (1999)

De acuerdo con la clasificación de Vergnaud (2010), *la primera categoría consiste en: Dos medidas son compuestas para dar lugar a otra medida.* En esta categoría se originan dos clases de problemas: a) Siendo conocidas las dos medidas elementales, encontrar la compuesta. (problema de combinación con resultado desconocido). Y b) Siendo conocidas la medida compuesta y una de las medidas elementales, encontrar la otra. (problema de combinación con diferencia desconocida, e inicio desconocido).

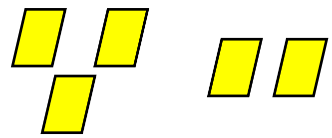
La primera clase de problemas se resuelve con una adición; por ejemplo: Luis y Susana son amigos y están organizando una fiesta para su graduación; Luis está juntando el dinero de los estudiantes de 6º “A” y Susana el del 6º “B”, Luis lleva 166 pesos y Susana 133 pesos. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos? Para resolver el problema se suman las dos medidas elementales (los dos sumandos) 166 + 133; la suma de estas dos nos da la medida compuesta que es 299 (total).

La segunda clase de problemas, según el autor se resuelve normalmente por una sustracción, pero también se puede resolver por medio del procedimiento llamado de complemento, cuando los números que intervengan se presten a dicho procedimiento. Por ejemplo: En un juego de canicas, Gabriel gana 27 y Mario varias; los dos juntos tienen 89 canicas; ¿cuántas canicas son de Mario?; en este problema se conoce una medida elemental que es la primera (27) y la medida compuesta (89); falta averiguar la otra medida elemental; para resolverlo se resta a la medida compuesta (89), la medida elemental (27) y encontramos el resultado.

Otro problema que encontramos en esta clase es el de tipo *combinación con inicio desconocido*; en él se conoce la segunda medida elemental (segundo sumando) y la medida compuesta (total), la incógnita se encuentra en la primera medida elemental (primer sumando). Ejemplo: Abel tiene algunas canicas rojas y 237 canicas azules; en total tiene 317 canicas. ¿Cuántas canicas rojas tiene Abel?, para resolver este problema se resta a la medida compuesta (317), la segunda medida elemental (237) y encontramos la primera medida elemental (80).

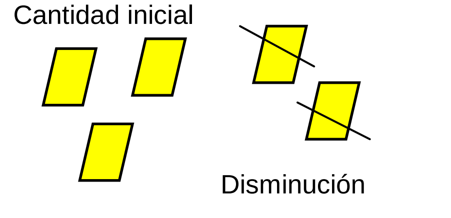
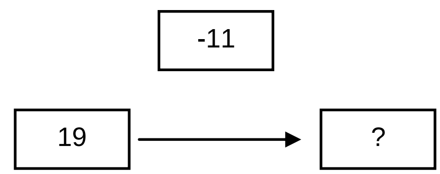
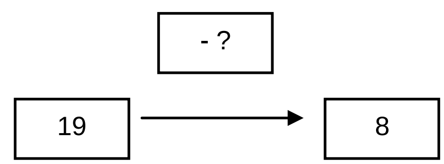
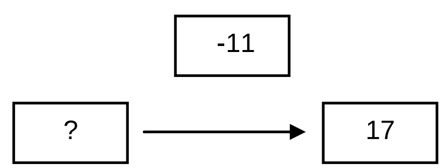
Los problemas de tipo cambio pertenecen a la segunda categoría *(Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida)*; en ella existen seis clases de problemas, y entre ellas se consideran los de cambio aumentando y cambio disminuyendo.

Tabla 3. Problemas de tipo cambio aumentando

Problemas de cambio	
Una cantidad inicial se cambia debido al aumento o disminución de otra cantidad; de esta manera surgen dos categorías de este tipo de problemas: 1) Cambio aumentando y 2) Cambio disminuyendo.	
Cambio aumentando: una cantidad inicial se cambia debido al aumento registrado de otra cantidad; es de concepción unitaria: a un elemento le corresponde otro.	 Cantidad inicial Aumento
Subtipos de problemas de cambio aumentando	
Resultado desconocido: una cantidad inicial se aumenta debido al aumento registrado de otra cantidad; el problema consiste en averiguar la cantidad final que resultará. Ejemplo: Pedro tenía 8 pesos, su mamá le dio 9 pesos más. ¿Cuánto dinero tiene en total?	$\boxed{8} \xrightarrow{\boxed{+9}} \boxed{?}$
Cambio desconocido: se conoce la cantidad inicial y el resultado; la incógnita se encuentra en el cambio. Ejemplo: Pedro tenía 8 pesos, su mamá le dio algunos pesos más. En total tiene 17 pesos. ¿Cuánto dinero le dio su mamá?	$\boxed{8} \xrightarrow{\boxed{+?}} \boxed{17}$
Cantidad inicial desconocida: se conoce el resultado y el cambio; falta encontrar la cantidad inicial. Ejemplo: Pedro tenía algunos pesos, su mamá le dio 9 pesos más. En total tiene 17 pesos. ¿Cuánto dinero tenía al inicio?	$\boxed{?} \xrightarrow{\boxed{+9}} \boxed{17}$

Tomado de Maza (1999)

Tabla 4. Problemas de tipo cambio disminuyendo

Problemas de cambio disminuyendo	
El cambio experimentado por la cantidad inicial implica su disminución hasta conseguir la cantidad final.	
Subtipos de problemas de cambio disminuyendo	
Resultado desconocido: una cantidad inicial se disminuye debido a la disminución de otra cantidad. El problema consiste en averiguar la cantidad final que resultará. Ejemplo: Alicia tenía 19 caramelos, regaló 11, ¿cuántos caramelos tiene ahora?	
Cambio desconocido: se conoce la cantidad inicial y el resultado, la incógnita se encuentra en el cambio. Ejemplo: Alicia tenía 19 caramelos, regaló algunos; ahora tiene 8 caramelos, ¿cuántos caramelos regaló?	
Cantidad inicial desconocida, se conoce el resultado y el cambio, falta encontrar la cantidad inicial. Ejemplo: Alicia tenía algunos caramelos, regaló 11, ahora tiene 17 caramelos, ¿cuántos caramelos tenía al inicio?	

Tomado de Maza (1999)

Los problemas de la clase 1 y 4 de la categoría dos que describe Vergnaud (2010) coinciden con los problemas de *tipo cambio aumentando con resultado desconocido* y *cambio disminuyendo con resultado desconocido.* El mismo autor señala que para encontrar la solución de estos problemas basta con aplicar una transformación directa a un estado inicial. En el problema de clase 1 (cambio aumentando con resultado desconocido), *"la transformación directa es una adición* *y su aplicación es siempre posible"* Por ejemplo: Enrique tenía 434 pesos ahorrados, en su cumpleaños su abuelita le regaló 222 pesos; ¿cuánto dinero tiene ahora Enrique? El procedimiento que conduce a la resolución del problema es una suma, 434 + 222. A una cantidad que ya se tiene (434), se le agrega otra cantidad (222); ese incremento es la transformación, con ella el estado inicial se modifica; el estado final es 656, éste es el resultado.

En el problema de la clase 4 (cambio disminuyendo con resultado desconocido) *la transformación directa es una sustracción.* Por ejemplo: Laura tenía 54 caramelos, le dio 26 a Mónica, ¿cuántos caramelos tiene ahora Laura? El estado inicial son los 54 caramelos que Laura tenía al inicio; la transformación son los 26 dulces que le da a Mónica y el estado final es el resultado de la resta 54 – 26, es decir 28 dulces.

Las clases de problemas 2 y 5 de la categoría dos que describe Vergnaud (2010) coinciden con los problemas de cambio aumentando con diferencia desconocida y cambio disminuyendo con diferencia desconocida. Estos problemas presentan mayor complejidad a los anteriores; la incógnita aparece en el segundo sumando en el caso de la suma y en el sustraendo en el caso de la resta.

Dos procedimientos para resolver estos problemas son: *el procedimiento del complemento y el de la diferencia*. De acuerdo con Vergnaud (2010), *el procedimiento del complemento consiste en buscar, sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir o quitar al estado inicial para llegar al estado final*. Por ejemplo: Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más; ahora Mónica tiene 89 dulces, ¿cuántos dulces le dieron a Mónica? (problema de cambio aumentando con diferencia desconocida).

Para resolver este problema, se parte de tener 36 dulces, a estos se le añaden los dulces necesarios para llegar al 89; después del 36 se cuenta hasta el 89; para ello se representa cada número siguiente con una ficha, dibujos o marcas en el papel; al final se cuentan las fichas, dibujos o marcas que faltaban para llegar al 89 y se encuentra el resultado. Este procedimiento resulta eficiente para resolver problemas de esta clase, con números pequeños, de lo contrario sería poco eficaz.

El procedimiento de la diferencia, de acuerdo con Vergnaud (2010) se trata de:

> …buscar, por sustracción entre los dos estados inicial y final, el valor de la transformación. Este procedimiento se utiliza con todos los números, cualesquiera que éstos sean, pero supone un cálculo relacional más elaborado que el procedimiento del "complemento": si *b* hace pasar de *a* a *c*, entonces *b* es igual a la diferencia entre *c* y *a* (p. 172).

Es un procedimiento más avanzado y por lo tanto requiere mayor abstracción en los alumnos. Se requiere del razonamiento del niño sobre las relaciones que unen al estado inicial con el estado final y proceder a realizar una sustracción para encontrar la diferencia que sería el resultado. El valor de la transformación (diferencia) no se obtiene de la misma manera en los problemas de la clase 2 y en los de la clase 5. Por ejemplo, el problema anterior: Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más, ahora Mónica tiene 89 dulces, ¿cuántos dulces le dieron? (problema de cambio aumentando con diferencia desconocida).

Este problema corresponde a la clase 2; la transformación que hay en él es positiva; para su resolución se tendría que realizar una sustracción del estado final menos el estado inicial, es decir 89 – 36; el resultado 53 sería la transformación (diferencia desconocida).

El siguiente problema: Zayra tenía 60 caramelos, le dio algunos a Rita; ahora Zayra tiene 18 caramelos, ¿cuántos caramelos le dio a Rita? (problema de cambio disminuyendo con diferencia desconocida). Este problema corresponde a la clase de problemas 5; la transformación que hay en él es negativa; para resolverlo se realiza una sustracción del estado inicial menos el estado final, es decir 60 – 18; el resultado 42 sería la transformación (diferencia desconocida).

Los problemas de las clases 3 y 6 de la categoría 2 en la clasificación de Vergnaud (2010), coinciden con los problemas de *cambio aumentando con inicio desconocido y cambio disminuyendo con inicio desconocido*. Estos problemas son aún más complejos que los anteriores, pues la incógnita se encuentra en el inicio o estado inicial; resolverlos "implica la inversión de la transformación directa y el cálculo del estado inicial por aplicación al estado final de dicha transformación inversa: si *b* hace pasar de *a* a *c*, entonces –*b* hace pasar de *c* a *a*, y hay que aplicar –*b* a *c* para encontrar *a"* (Vergnaud, 2010, p. 173).

Los procedimientos para resolver estos problemas son: el procedimiento del complemento, y el del "estado inicial hipotético"; el primero ya se mencionó. El procedimiento del estado inicial hipotético, de acuerdo con el mismo autor,

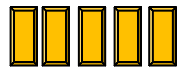
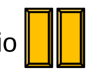
> …consiste en plantear la hipótesis de un cierto estado inicial; aplicarle la transformación directa; encontrar un estado final, y corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido (comparación del estado final encontrado con el estado dado en el problema). (Vergnaud, 2010, p. 173).

El problema de la clase 3 es de *cambio aumentando con inicio desconocido,* por ejemplo: Miguel tenía algún dinero, su papá le dio 30 pesos más para comprar su lunch; ahora Miguel tiene 42 pesos, ¿cuánto dinero tenía al principio? Para su resolución, al emplear el procedimiento del *estado inicial hipotético*, se inicia con un estado inicial propuesto por el alumno, por ejemplo 10. A ese estado inicial se le agrega la transformación 10 + 30 = 40. Ese número no corresponde al estado final, pero sí se acerca a él; se busca otro estado inicial que sería el 12; 12 + 30 =

42; este es el número que corresponde al resultado; el 12 es el estado inicial y el resultado.

En lo que respecta a la tercera categoría *Una relación une dos medidas,* corresponde a una relación estática; en esta categoría ubicamos a los problemas de comparación e igualación.

Tabla 5. Problemas de tipo comparación

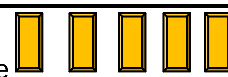
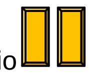
Problemas de comparación	
Consiste en disponer inicialmente de dos cantidades que han de ser comparadas determinando cuántos elementos más presenta la cantidad mayor respecto de la menor o viceversa; se emplean los términos *más* y *menos;* las relaciones existentes son estáticas.	Pepe  Antonio  ¿Cuántos chocolates tiene Antonio menos que Pepe?
Subtipos de problemas de comparación	
Grande desconocido Ejemplo: Pablo tiene 4 caramelos y Rosa tiene 3 más que Pablo, ¿cuántos caramelos tiene Rosa?	? 4 3
Diferencia desconocida Ejemplo: Rosa tiene 7 caramelos y Pablo 4, ¿cuántos más tiene Rosa que Pablo?	7 4 ?
Pequeño desconocido Ejemplo: Pablo tiene varios caramelos y Rosa 7, tres más que Pablo, ¿cuántos caramelos tiene Pablo?	7 ? 3

Tomado de Maza (1999)

Para resolver problemas de esta clase se recurre al procedimiento de la diferencia, el cual consiste en una sustracción. Por ejemplo: Don Hugo vende ricos helados; hoy vendió 67 helados de fresa y 45 de vainilla. ¿Cuántos helados de fresa vendió más que de vainilla? (problema de comparación diferencia desconocida). En este problema las dos medidas son: 67 y 45; la relación que une a esas dos medidas es el 22.

A la primera medida (67), se le resta la segunda medida (45); el resultado es la diferencia (22) y también es la relación que une a las dos medidas. Otro procedimiento podría ser el de complemento, que consiste en agregar a la segunda medida (45), los números necesarios para llegar a la primera medida (67); este procedimiento es eficiente sólo para cantidades pequeñas.

Tabla 6. Problemas de tipo igualación

Problemas de igualación	
Consiste en determinar cuánto se ha de añadir a la cantidad menor para alcanzar la mayor o, al revés, cuánto se ha de disminuir a la cantidad mayor para igualarla con la menor. Las relaciones existentes son dinámicas.	Pepe  Antonio  ¿Cuántos chocolates necesita Antonio para tener lo mismo que Pepe?
Subtipos de problemas de igualación	
Grande desconocido, ejemplo: Ada tiene 4 chocolates, si le dan 3 chocolates más tendría los mismos que Lupita, ¿cuántos chocolates tiene Lupita?	? 4 3
Diferencia desconocida, ejemplo: Lupita tiene 7 chocolates y Ada tiene 4, ¿cuántos chocolates necesita Ada para tener los mismos que Lupita?	7 4 ?
Pequeño desconocido, ejemplo: Lupita tiene 7 chocolates, si a Ada le dieran 3 chocolates más tendría los mismos que Lupita, ¿cuántos chocolates tiene Ada?	7 ? 3

Tomado de Maza (1999)

3.8 Variables didácticas de un problema aditivo

En un problema aditivo se pueden distinguir diferentes aspectos que los hacen distintos entre ellos: se puede considerar su estructura, la posición de la incógnita, los tipos de números y el contexto donde está redactado; todos estos elementos son considerados como variables del problema; de acuerdo con Puig y Cerdán (1995), las variables de particular interés para la resolución de problemas aritméticos son: variables sintácticas, de contexto y de contenido.

Variables sintácticas

Las variables sintácticas tienen que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Los autores señalan que algunos ejemplos de variables sintácticas pueden ser: la complejidad gramatical, la presentación de los datos, la situación de la pregunta en el texto del problema, la secuencia y orden de la presentación de datos, entre otras. A continuación se describe cada una de ellas.

La complejidad gramatical se puede referir al número de sustantivos, calificativos, pronombres, o al tipo de oraciones que constituyen el texto del problema, esto es coordinadas o subordinadas. La gramática empleada en la elaboración de los problemas que se presentan a los alumnos de educación primaria, en cualquier grado, requiere de una revisión exhaustiva con el fin de ser lo más claro posible a los ojos de los niños.

La presentación de los datos, mediante números, símbolos, o palabras, para todas las variables y en especial en ésta, implica considerar la edad de los niños a quiénes se presenta determinado problema; por ejemplo, si son niños pequeños, el problema es acompañado de ilustraciones; en cambio si son niños de grados superiores el problema sólo es presentado con palabras e información numérica.

La situación de la pregunta en el texto del problema, si está al final del texto, o al comienzo, o bien el texto completo, es una interrogación en la cual se entremezclan la información y la pregunta del problema

La secuencia y orden de la presentación de datos incide fundamentalmente si el orden como aparecen en el texto del problema corresponde con el orden en el cual se deben considerar al efectuar la o las operaciones para la solución del problema.

Todas estas variables están relacionadas directamente con el enunciado del problema; la dificultad de éste depende de ellas; si un problema resulta muy difícil para los alumnos, el profesor puede modificar esas variables para hacer que el problema disminuya su grado de complejidad; o viceversa, si el problema resulta demasiado sencillo para los niños, se pueden modificar las variables para aumentar la complejidad.

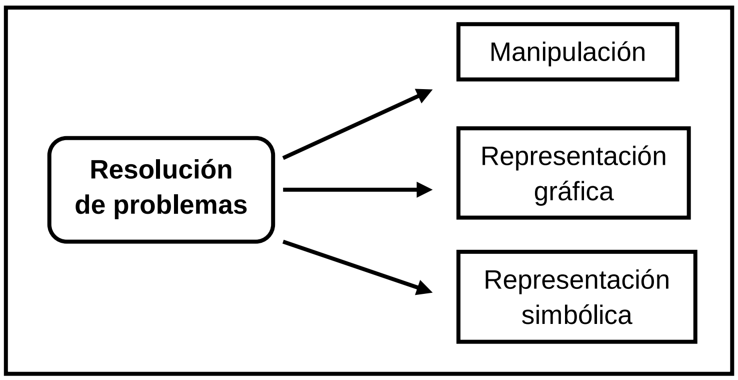
Los mismos autores reconocen también que las variables de contenido y de contexto "…dan cuenta del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las variables de contexto lo hacen a los significados no matemáticos, incidentales en el texto del problema" (Puig y Serdán, 1995. p. 33).

3.9 Resolución de problemas

La resolución de problemas según, Orton (1988) citado por Luceño (1999), se concibe "…ahora normalmente como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva" (1999, p.16). La resolución de un problema es un proceso que se pone en juego para finalmente llegar a una solución del problema planteado; para ello debe haber un enlace entre lo que se conoce y lo que se pretende conocer: el planteamiento del problema parte de los intereses y características de los alumnos a quienes está dirigido el problema.

De acuerdo con Maza (1999), la resolución de problemas es el punto de arranque y el elemento que caracteriza todo el proceso de enseñanza.

Figura 9. Resolución de problemas como punto de arranque de la enseñanza



Tomado de Maza (1999)

En la resolución de un problema no hay un orden rígido para llegar a su solución; el niño puede iniciar la resolución de un problema por medio de la manipulación, la representación gráfica o la representación simbólica.

Por otro lado, la resolución de problemas aditivos es un tema investigado por diferentes teóricos; por ejemplo, Bermejo (2004) utiliza la clasificación de los problemas verbales aditivos; en cuatro diferentes tipos: cambio, combinación, comparación e igualación. Cada tipo de problemas está integrado por problemas con características similares; lo que diferencia a uno y otro de los problemas que pertenecen a un mismo tipo es el lugar de la incógnita, que puede estar al final, en el segundo sumando, diferencia o transformación, y al inicio. De esta manera se generan 21 problemas verbales aditivos diferentes, para cuya clasificación se utilizaron tres criterios principales: a) estructura semántica del problema, b) lugar ocupado por la incógnita y c) formulación verbal del problema.

Castro Rico y Castro (1992) investigaron problemas aritméticos de dos etapas con niños de 9 a 11 años; para su caracterización, los problemas aritméticos de dos etapas admiten cuatro posibilidades, mediante los pares ordenados (+,+); (+,-); (-,+) y (-,-); las categorías semánticas empleadas fueron: cambio, combinación, comparación e igualación; para la investigación delimitaron tres características clave: operaciones con cuatro posibilidades; estructura semántica, con dieciséis posibilidades y estructura ordenada de las operaciones, limitada a una opción; de acuerdo con las variables consideradas, se generaron 64 tipos de problemas aditivos de dos etapas.

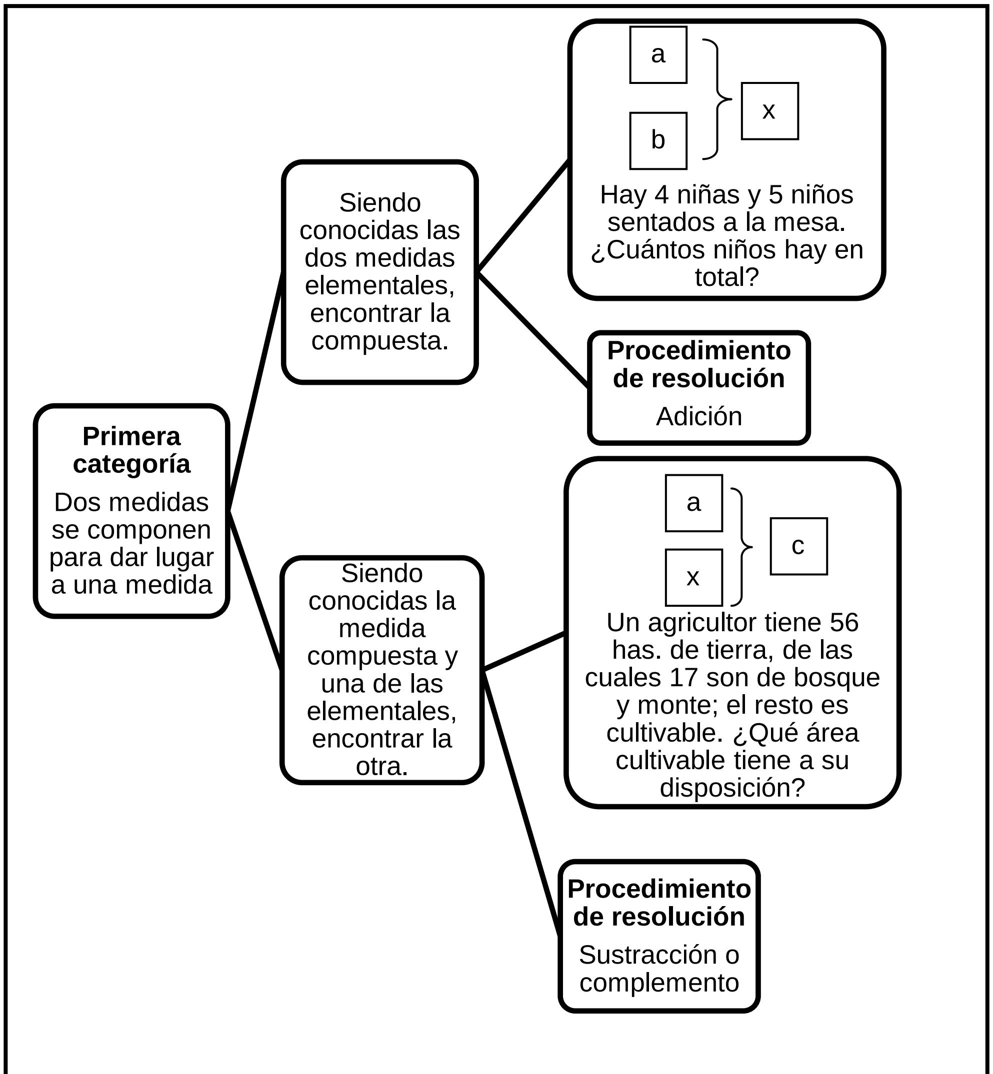
3.10 Campo Conceptual Aditivo

De acuerdo con Vergnaud (1990), el conocimiento está organizado en campos conceptuales, y para que una persona llegue a dominar un campo conceptual tardará un largo período de tiempo, por medio de la experiencia, madurez y aprendizaje; de acuerdo con el mismo autor, un campo conceptual es un conjunto de situaciones, que en el caso del campo conceptual de las estructuras aditivas, es un conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones.

Vergnaud (2010) clasifica el campo conceptual aditivo en seis categorías, al interior de las cuales se generan diferentes clases de problemas; aquí las relaciones aditivas son ternarias, pues se relacionan tres elementos que se pueden enlazar de diversas maneras y ofrecer una variedad de estructuras aditivas.

En la primera categoría se generan dos clases de problemas, que coinciden con los de tipo combinación.

Figura 10. Clases de problemas de la primera categoría y sus posibles procedimientos de solución



a = primera medida elemental, b= segunda medida elemental, c = medida compuesta y x = incógnita

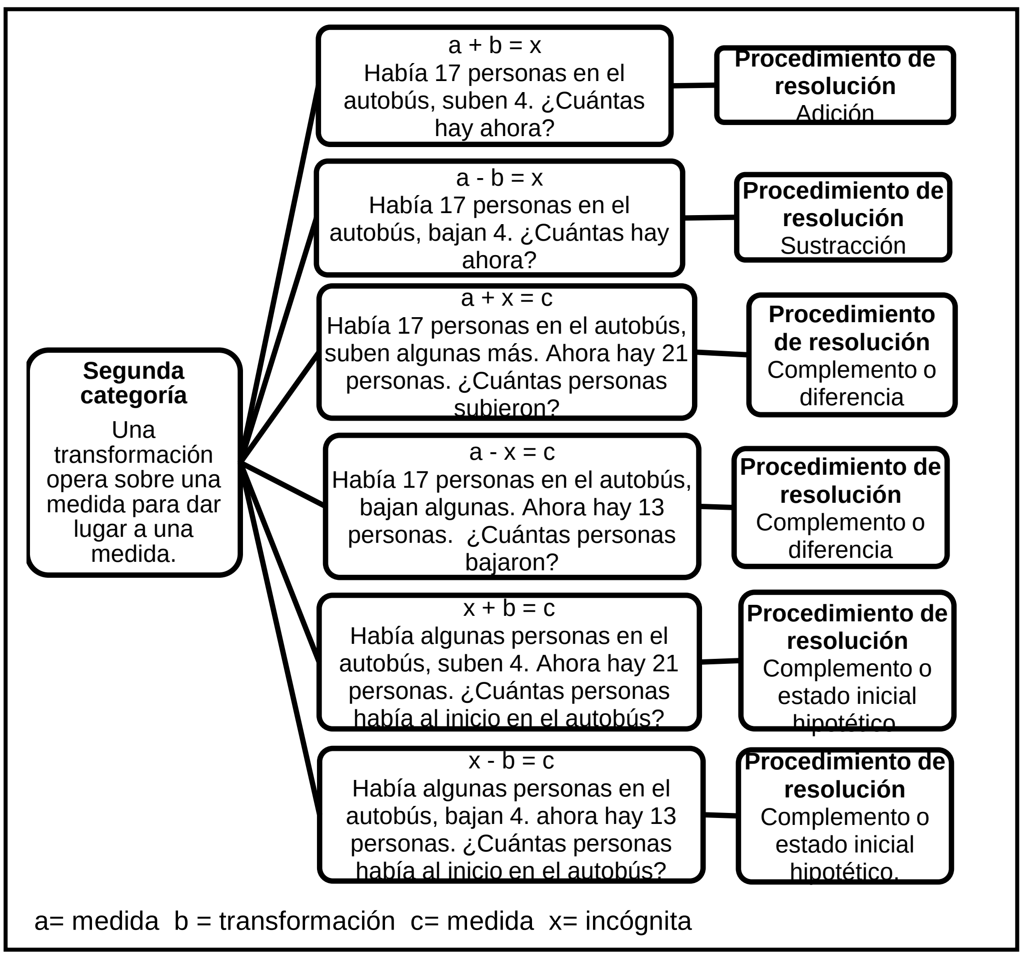
Tomado de Vergnaud (2010)

En el primer problema, la incógnita se encuentra en la medida compuesta, es decir en el resultado. En el segundo problema la incógnita se encuentra en la segunda medida elemental (diferencia desconocida). Aunque también puede generarse un problema donde la incógnita este en la primera medida elemental (inicio desconocido).

De acuerdo con el mismo autor, el término medida o estado son los números más simples, aquellos que corresponden a las medidas de los conjuntos de los objetos aislables, a los cardinales 1, 2, 3, 4, 5,…, etc. Los matemáticos los llaman *números naturales*, y añaden el número 0, que corresponde a la medida del conjunto vacío. Designan con una *N* el conjunto de los números naturales: *N*= 0, 1, 2, 3,……., n,… Además, los números naturales no son ni positivos ni negativos, pues corresponden a medidas y no a transformaciones.

En lo que se refiere a la segunda categoría, surgen seis clases diferentes de problemas; a continuación se muestra su esquema.

Figura 11. Clases de problemas de la segunda categoría y sus posibles procedimientos de solución

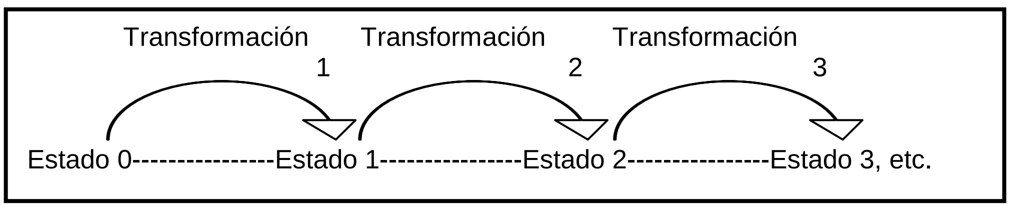


Tomado de Vergnaud (2010)

Los problemas que surgen en esta categoría varian de acuerdo con la transformación positiva o negativa y según el lugar de la incógnita, que puede estar en el estado inicial, la transformación o el estado final; estos problemas corresponden a los de *cambio aumentando y cambio disminuyendo* en la clasificación usual.

De acuerdo con Vergnaud (2010), el concepto de transformación se refiere a numerosas relaciones *dinámicas*, en el sentido de que entrelazan estados sucesivos.

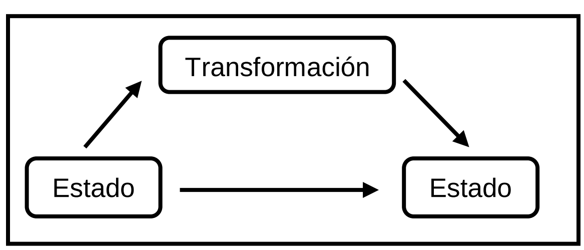
Figura 12. Esquema de transformaciones



Tomado de Vergnaud (2010, p. 47).

En el interior de esta serie se puede reconocer, en una triada particular, el modelo ternario.

Figura 13. Modelo ternario de un problema

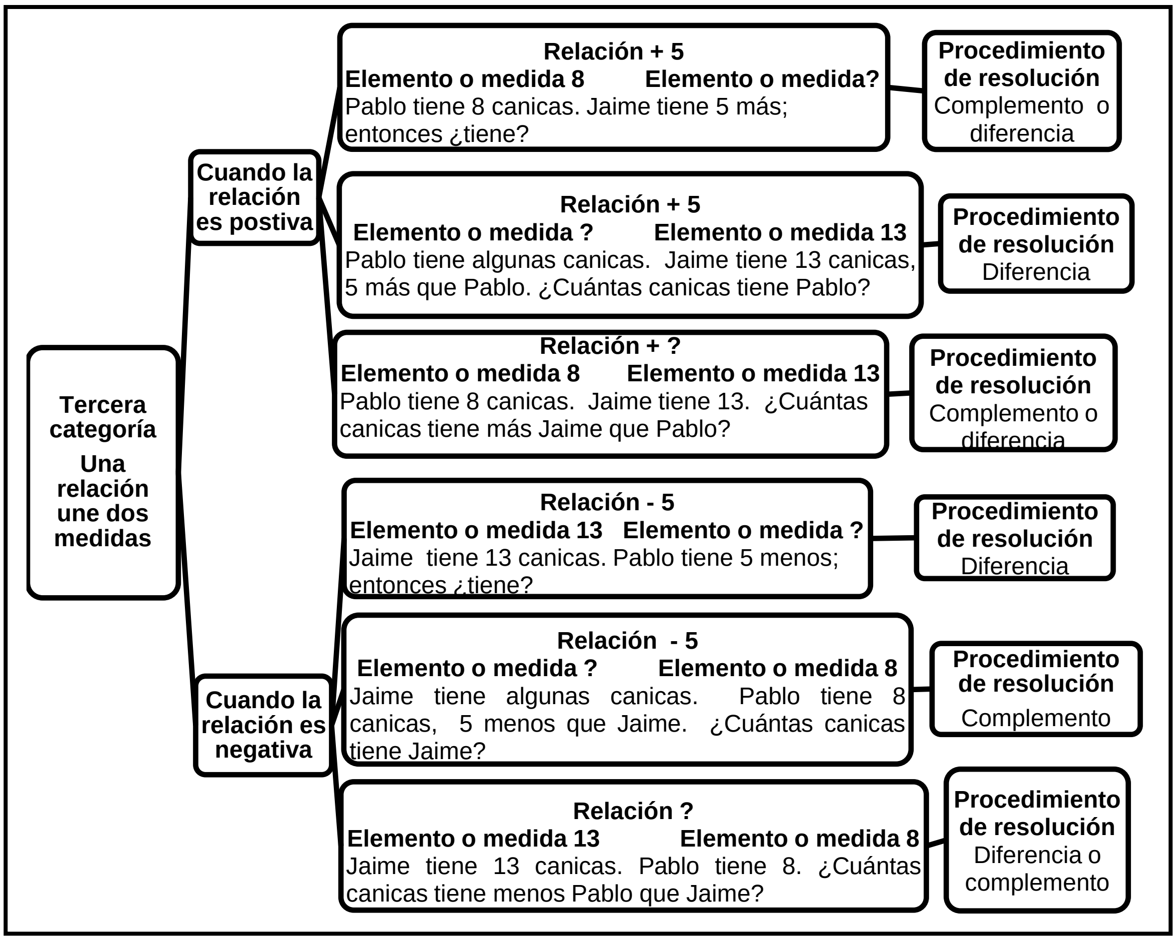


Tomado de Vergnaud (2010, p. 47).

El mismo autor señala que, los elementos que intervienen en la relación ternaria estado-transformación-estado no tienen exactamente la misma naturaleza, porque dos términos son estados y el otro una transformación.

Por otro lado, en la tercera categoría del campo conceptual aditivo surgen seis clases diferentes de problemas; la variación de ellos depende de la relación que se da entre la medida inicial o medida final positiva o negativa; también varía de acuerdo con el lugar de la incógnita (en el primer elemento, en el segundo elemento o en la relación).

Figura 14. Clases de problemas de la tercera categoría y sus posibles procedimientos de solución

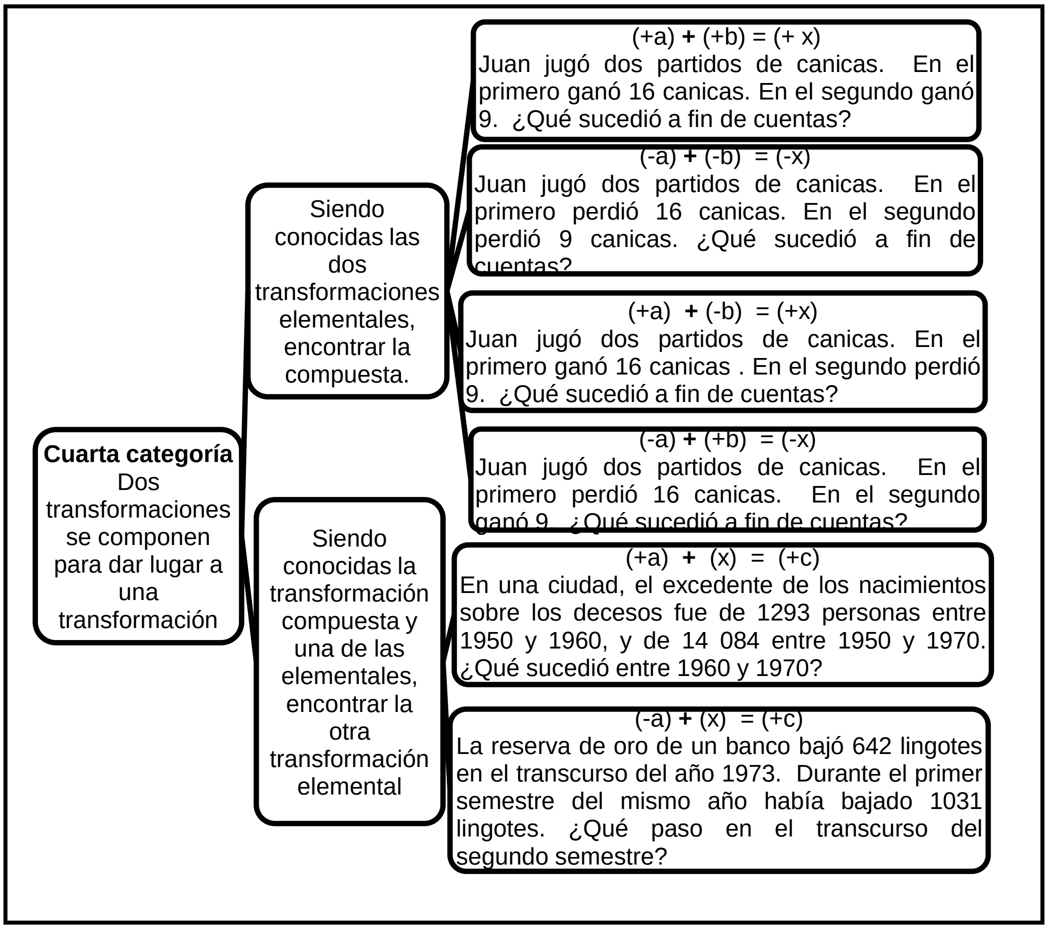


Tomado de Vergnaud (2010)

El término relación en la tercera categoría tiene como objetivo establecer las relaciones entre dos cantidades; por ejemplo: la relación entre 7 y 9, es 2.

Siguiendo con las categorías del campo conceptual aditivo, en la cuarta categoría se generan dos clases y también varias subclases de problemas; esto depende de si las transformaciones son positivas o negativas, y la incógnita puede estar en la primera transformación, en la segunda transformación o en la transformación compuesta.

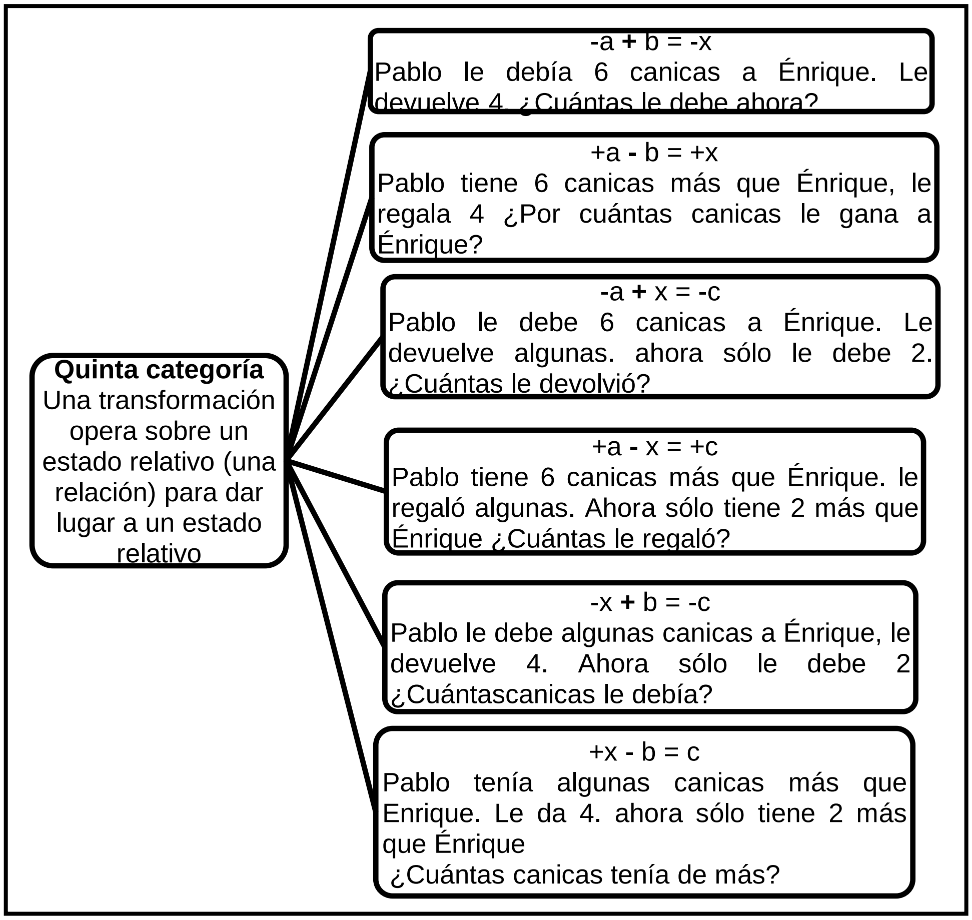
Figura 15. Clases de problemas de la cuarta categoría



Tomado de Vergnaud (2010)

La complejidad de los problemas de las categorías cuarta, quinta y sexta es mayor que en las categorías anteriores y es difícil que los niños trabajen este tipo de problemas en la educación primaria; sólo se presentan como un referente más de los problemas de estructura aditiva. A continuación se muestra la quinta categoría.

Figura 16. Clases de problemas de la quinta categoría



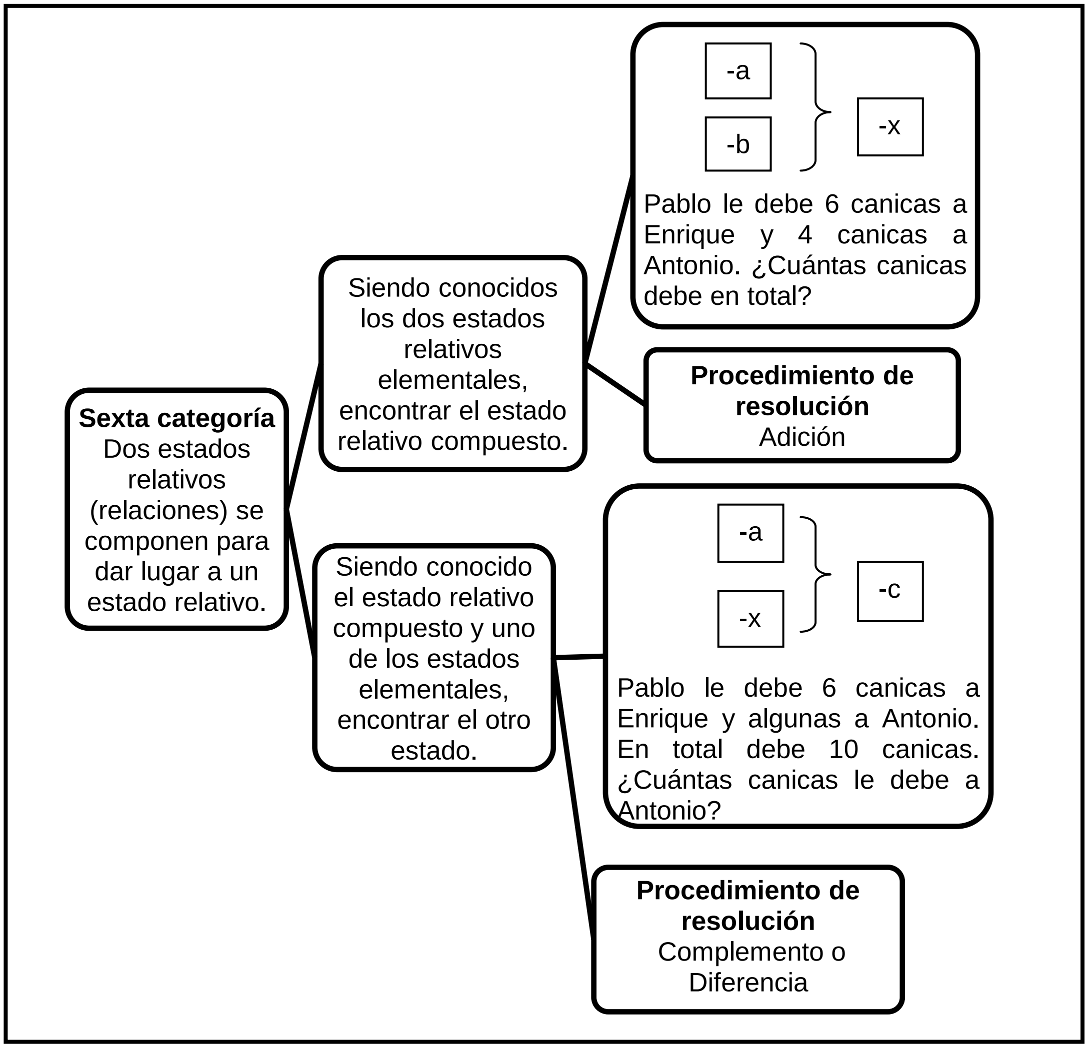
Tomado y adaptado de Vergnaud (2010)

En esta categoría se estudian nuevamente las clases estudiadas en la segunda categoría, con subclases más numerosas, debido a las diversas posibilidades para el valor absoluto y el signo.

En los problemas de las categorías cuarta, quinta y sexta se trabajan con números negativos; por ello es difícil abordarlos en primaria; tampoco se relacionan directamente con los problemas de tipo cambio, combinación, comparación e igualación.

En la sexta categoría del campo conceptual aditivo, se retoman características de los problemas trabajados en la primera categoría; la diferencia es que en ésta se emplean números positivos y negativos.

Figura 17. Clases de problemas de la sexta categoría y sus posibles procedimientos de solución



Tomado de Vergnaud (2010)

En esta categoría se estudian nuevamente las clases y subclases de problemas aditivos de la primera categoría, pero con números positivos y negativos.

3.11 Algoritmos para la suma y resta

De acuerdo con Gómez (1998), la forma instrumental de presentación para el algoritmo de la suma y la resta admite varias versiones:

Tabla 7. Algoritmos para la suma y la resta

	Expandido	Extendido	Abreviado	Estándar
Suma	40 + 5 + 30 + 8 70 +13 (70 + 10) + 3	45 +38 13 70 83	45 +38 (7 + 1) 3	45 +38 83
Resta	500 + 60 + 7 - 200 + 40 + 1 300 + 20 + 6 326	567 -241 6 20 300	567 -241 6 2 3	567 -241 326

Tomado de Gómez (1998, p. 115).

El sistema expandido, consiste en descomponer los sumandos en unidades, decenas, centenas, etc.; una vez descompuestas las cantidades se procede a sumar unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas.

En el sistema extendido, primero se hace la operación de unidades, seguida de las decenas y finalmente las centenas.

En el sistema abreviado ya no se descompone toda la cantidad; sólo se coloca el resultado y se anota el número que se lleva en la casilla de las decenas o las centenas según corresponda.

Finalmente, el método estándar o tradicional es el más conocido pero también el más abstracto y utilizado escolarmente para enseñar las operaciones básicas. En la escuela comúnmente se emplea sólo el algoritmo estándar o tradicional; y cuando los estudiantes se acercan a la forma de otros tipos de algoritmos, el docente tiende a etiquetarlos por procesos equivocados.

Por otro lado el algoritmo de las operaciones básicas; en este caso de la suma y la resta, de acuerdo con Díaz y Butto (2011), llevan implícito en su proceso de realización las reglas del SND y el conteo; si el niño aprende a contar y comprende el SND los algoritmos de la suma y la resta cobran sentido; por ejemplo: sabrá que representa cada cifra al ordenar los números en columnas de unidades, decenas y centenas, por qué y cuándo se puede tomar o pedir prestado, entre otras.

Después de la revisión de la literatura de los problemas de estructura aditiva, se reflexionó acerca de los modelos matemáticos existentes para la resolución de problemas: el lineal, de medida, cardinal y funcional. Para el estudio se retomó el modelo matemático funcional, porque se consideró que es el modelo con el cual los niños están más familiarizados.

También se recuperó la diversidad de los tipos y subtipos de problemas aditivos que existen, así como la complejidad que cada uno de ellos presenta, que depende de elementos como: la semántica del problema, el lugar de la incógnita, la magnitud de los números ó la presentación del problema.

Por otro lado, los problemas aditivos no sólo son de distinta dificultad sino que se resuelven a partir de estrategias diferentes; al resolver problemas, los niños emplean estrategias, que evolucionan de acuerdo con su edad. Los algoritmos convencionales de la suma y la resta son un recurso para la resolución de problemas aditivos: antes de que el niño emplee el algoritmo convencional, recurre a estrategias como el conteo con los dedos de sus manos o el conteo de objetos.

Para el desarrollo de esta investigación se consideraron los problemas de tipo combinación, cambio aumentando, cambio disminuyendo, comparación e igualación, que coinciden con las tres primeras categorías de los problemas de estructura aditiva de Vergnaud (2010).

IV. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe la teoría que se utilizó para el sustento de esta tesis; la *teoría de los campos conceptuales* realizada por Vergnaud (1990), seguida del concepto de representaciones externas que emplea Goldin (1998).

4.1 Teoría de los campos conceptuales

Para Vergnaud (1990) los conocimientos tienen un carácter contextualizado, lo cual proporciona una importancia fundamental a las reglas de acción, que al igual que los conocimientos también son contextualizadas. El autor considera que el conocimiento está organizado en campos conceptuales; es decir, para que un sujeto llegue a dominar un *campo conceptual* requiere de un largo periodo de tiempo, mediante la experiencia, la madurez cognitiva y el aprendizaje.

La teoría de los campos conceptuales es una teoría psicológica de la conceptualización de lo real, estudia las relaciones y rupturas entre los conocimientos desde el punto de vista conceptual; ofrece un marco para la comprensión del aprendizaje y se propone dar cuenta de los procesos de conceptualización que se siguen en la resolución de los problemas de estructura aditiva.

Por otro lado esta teoría concibe el aprendizaje de las operaciones aritméticas como un proceso largo y lento, que toma como antecedente que el conocimiento está organizado en *campos conceptuales*, definiéndolos como un conjunto de situaciones que para su dominio requiere de varios conceptos de distinta naturaleza.

En esta teoría se parte de la idea de que el elemento más importante del desarrollo es la conceptualización; por ello plantea que se debe prestar atención a los aspectos conceptuales que conforman los esquemas.

Los conceptos esenciales de la teoría de los campos conceptuales son: campo conceptual, esquema, situación, invariante operatorio (teorema en acción y concepto en acción), y concepto. A continuación se describen cada uno de estos conceptos.

4. 2 Campo conceptual

De acuerdo con Vergnaud (1990) define *campo conceptual* como el conjunto de situaciones en las que, para su dominio participan varios conceptos. Vergnaud (1982) citado por Moreira (2002) define *campo conceptual* como "…un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición" (p. 2).

La teoría de los *campos conceptuales* se sostiene en tres argumentos:

1) Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones.
2) La construcción y apropiación de las propiedades de los conceptos es un proceso largo que dura varios años; puede durar hasta 10 años ó más, y se logra mediante situaciones similares.
3) El autor considera al *campo conceptual* como una unidad de estudio para dar sentido a las dificultades observadas en la conceptualización de lo real.

El mismo autor reconoce que los conceptos no se encuentran aislados unos de otros; por ello los agrupa según su operatividad, relacionando conceptos, situaciones y teoremas en acción. De igual forma, supone que las cosas no se pueden estudiar separadas, es necesario hacer recortes, y en ese sentido los campos conceptuales son unidades de estudio que pueden servir para dar sentido a los problemas de adquisición y a las observaciones hechas en relación con la conceptualización.

En esta teoría se considera que el núcleo del desarrollo cognitivo es la conceptualización; por ello es fundamental dirigir la atención a los aspectos conceptuales de los esquemas y realizar un análisis conceptual de las situaciones en las cuales los alumnos desarrollan sus esquemas en su vida cotidiana o escolar. Esto conduce a explicar el término concepto en la teoría de los campos conceptuales.

4.3 Concepto

En la *teoría de los campos conceptuales* se considera que los conceptos deben ser definidos al considerar sus propiedades y las situaciones en las cuales son usados, así como las representaciones simbólicas que se usan para pensar, hablar o escribir acerca de un concepto; en ese sentido, los conceptos están constituidos por elementos que se relacionan, pues corresponden a un conjunto de situaciones, invariantes operatorios y sus propiedades expresadas mediante diferentes representaciones simbólicas.

La formación de conceptos matemáticos conduce a considerar el concepto como una agrupación de invariantes que pueden ser utilizados en la acción, el concepto por lo tanto se refiere al conjunto de situaciones en las cuales adquiere sus propiedades, sus significados, y al conjunto de esquemas que el sujeto pone en acción en esas situaciones. De ahí que para Vergnaud (1990) un concepto esta formado por tres conjuntos:

C = (S, I, R)

S = conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;

I = conjunto de invariantes sobre los cuales se sostiene la operacionalidad de los esquemas (el significado);

R = conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje, gráficos, enunciados formales, entre otros) que se pueden usar para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos. Las representaciones simbólicas son el significante del concepto.

Los conceptos adquieren su sentido en las situaciones, de ahí que las situaciones constituyan un acceso a los campos conceptuales; es decir, las situaciones corresponden a la realidad, y un alumno adquiere mediante su interacción con situaciones y problemas; de esta forma el alumno incorpora las propiedades que constituyen los conceptos- en- acción y teoremas en acción, o sus conocimientos en acción, en la medida en que se puedan expresar mediante sus significantes (representaciones simbólicas), esos invariantes o conocimientos en acción pasan a formar el concepto del estudiante.

En lo que se refiere al campo conceptual de las estructuras aditivas es un conjunto de situaciones que para su tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

4.4 Situación

Cuando Vergnaud se refiere a la situación, no se refiere a la situación didáctica, sino a la tarea, considera que una situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, con características y dificultades propias; el resultado no depende de la suma de las tareas, más bien, el desempeño en cada una afecta el desempeño global.

Según Vergnaud (1990), los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son resultado de las situaciones con las cuales es confrontado; muchas de las concepciones vienen de las primeras situaciones en que fue capaz de dominar o de experiencias al intentar cambiarlas.

En cuanto a las situaciones, distingue dos tipos:

1) El sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación;
2) El sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abortadas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso.

El concepto de *esquema* en el primer caso se va a observar para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único; en el segundo caso, se va a observar el proceso sucesivo de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y recombinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos. Por ejemplo en la resolución de problemas, los estudiantes pueden mostrar conductas igualmente estructuradas con los esquemas de que disponen, especialmente aquellos relacionados con situaciones que parecen tener una semejanza con la situación que se trate; sin embargo, la semejanza es parcial y posiblemente sólo aparente, los esquemas sólo se proyectan, las tentativas se suspenden, varios esquemas pueden ser evocados sucesivamente o simultáneamente en una situación que es nueva o considerada como tal por el sujeto; esto es, el funcionamiento cognitivo del sujeto se basa en el repertorio de esquemas disponibles.

4.5 Esquema

Vergnaud (1990) llama *esquema* a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada; es decir, un *esquema* es una sucesión de acciones que tienen una organización y que pueden repetirse en situaciones semejantes. Un *esquema* genera acciones y contiene reglas, pero no es modelo de acciones porque la secuencia de acciones depende de la situación.

Un esquema es eficiente para varias situaciones; puede generar secuencias de acción distintas, de información y de control según la situación; no es el comportamiento, lo organiza. Por ejemplo los algoritmos de la suma y la resta son esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos; se utilizan para tratar las mismas situaciones, se transforman en esquemas ordinarios o hábitos.

Por otro lado de acuerdo al mismo autor los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un *esquema* ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce a cambiar de *esquema* o a modificar éste. En el caso de la resolución de problemas de estructura aditiva, si un niño resuelve un problema con una estrategia y esta no funciona; el niño cambia de estrategia o la modifica hasta lograr llegar al resultado.

Los *esquemas* para Vergnaud (1990) se refieren a situaciones; expone que se debiera hablar de interacción esquema-situación; entiende qué el desarrollo consiste en un repertorio de esquemas; la función del esquema la ubica en todos sus componentes, y explica que, para comprender si un esquema es eficaz o no, se deben analizar sus componentes:

1) Las anticipaciones: Este componente refleja la integración de la intención, el motivo, el deseo, la expectativa los esquemas se componen y se descomponen jerárquicamente; el objetivo se subdivide en sub-objetivos y anticipaciones.

2) Las reglas de acción, toma de información y control: Este componente forma la parte que genera el esquema; crea de forma temporal la organización de la actividad, que involucra desde su creación hasta la toma de información y el control sobre su eficacia.

3) Los invariantes operatorios conceptos-en-acción y teorema-en-acción: Los invariantes constituyen la parte cognitiva del esquema; su función es

identificar y reconocer objetos, sus propiedades, sus relaciones y transformaciones. Extrae la información pertinente, realiza inferencias sobre los efectos de la información, controla la toma de información y verifica su eficacia.

4) Las inferencias: Son indispensables para la puesta en funcionamiento del esquema de acuerdo a una situación particular. La actividad está regulada por adaptaciones, controles y ajustes progresivos.

Estos cuatro componentes constituyen el esquema, que es sistemático y contingente; es sistemático porque la actividad está sujeta a reglas univocas, es decir, a un sólo tipo de reglas; y es contingente porque las reglas generan actividades y conductas distintas según la situación en donde se generan. Esto es más claro en situaciones nuevas, cuando el alumno no tiene un esquema preparado en su repertorio y debe crear un nuevo esquema a partir de sus esquemas anteriores.

4. 6 Invariante operatorio

Cada esquema se refiere a una clase de situaciones, pero un individuo puede aplicar un esquema a una clase más pequeña, aquella a la cual se le podrá aplicar de modo eficaz; de esta forma se puede vislumbrar que un esquema puede aplicarse a un grupo de situaciones más amplio. Cuando un individuo puede aplicar un esquema referido a una situación a otras situaciones de la misma clase, ha descubierto un invariante. Un invariante es la generalización de un esquema. Para que un esquema pueda generalizarse, el sujeto debe reconocer analogías, semejanzas en algunos aspectos y diferencias en otros, entre situaciones en las que el esquema era operatorio para el sujeto y aquellas nuevas. Esto implica que la clave de la generalización del esquema esté en el reconocimiento de invariantes.

Establece tres tipos lógicos de invariantes operatorios:

1) Del tipo proposiciones, pueden ser verdaderos o falsos; tal es el caso de los teorías-en-acto.
2) Del tipo función proposicional no pueden ser verdaderos o falsos pero permiten la construcción de proposiciones; son de este tipo, los conceptos de cardinal, estado inicial, transformación; son los conceptos-en-acto o las categorías-en-acto, raramente explicitados por los alumnos.
3) Del tipo argumento en matemáticas, los argumentos pueden ser objetos materiales, personajes, números, relaciones e incluso proposiciones.

Al respecto Vergnaud (1990), expone que: “Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción” (p. 7).

4. 7 Representación

De acuerdo con Vergnaud (1990), una representación simbólica, una palabra o un enunciado matemático puede tener o no tener sentido para un individuo; también una situación tiene sentido o no lo tiene.

El autor explica que es imposible aprehender la realidad directamente; la mente humana la representa, de tal manera que esa representación actúa como intermediario entre el sujeto y su entorno. Es decir, la constitución del conocimiento no es otra cosa que un proceso de construcción paulatino de representaciones mentales sobre la realidad que pretende comprender; esa realidad se representa por medio de esquemas.

Vergnaud (1990) considera que las representaciones permiten a los individuos (alumnos) actuar sobre la realidad, pues les permite predecir y explicar el mundo que representan; también permiten anticipar y predecir, hacer deducciones e inferencias, pues actúan como sustitutos de la realidad y, por ello, están constituidas por teoremas en acción; estos son proposiciones que se consideran verdaderas. La conceptualización de lo real requiere, como primer paso, la representación de esa realidad, lo que hace que podamos aprehenderla de modo inmediato; pero se necesita atribuirle un significado y ese significado se adquiere en la situación.

De acuerdo con Vergnaud (1990) la representación es un conjunto de esquemas en los cuales se organizan la acción, la conducta y la actividad. Así, la actividad misma es producto de la acción y de la actividad; además, hace posible una cierta simulación de lo real, y por lo tanto la anticipación. En los esquemas se manifiesta la primera expresión de los conceptos que organizan la actividad. En la resolución de problemas aditivos, el alumno analiza la solución posible y, de esa forma, identifica los esquemas que le permiten comprender el problema y encontrar la solución. Esa comprensión del problema, le otorga el significado, y este significado se encuentra mediante las reglas de acción que conducen a identificar de qué tipo de problema se trata y cuáles son las variables conocidas y desconocidas; en la comprensión se encuentra implícita la solución, la acción del alumno que da significado al problema y la acción que da lugar a una solución constituyen la representación, a su vez constituida por estos dos tipos de esquemas.

Los esquemas de solución refieren comportamientos, razonamientos, adaptaciones y modificaciones en el planteamiento del problema; por ello se clasifican en esquemas algorítmicos, que implican el uso de los algoritmos con su respectiva simbolización y procedimiento convencional para darle solución por otro lado, los esquemas no algorítmicos utilizan simbolización espontánea para la solución.

La simbolización revela el uso de símbolos y signos que sirven como herramientas en el proceso de pensamiento, de la misma forma en que se utilizan para comunicar experiencias o conocimientos conceptuales.

Desde esta perspectiva el proceso de resolución de un problema va vinculado al de su representación. En el proceso de representación se pueden emplear símbolos convencionales o símbolos no convencionales; el proceso está constituido por dos procesos que actúan de forma simultánea; uno se refiere a identificar las acciones que conducen a la solución y le dan significado al problema y el otro a la representación del problema que conduce a la solución.

4.8 Sistemas de representaciones externas

De acuerdo con Goldin (1998), los *sistemas de representación externa* o *modos de representación*, incluyen los sistemas de habla, símbolos escritos, modelos figurativos o imágenes, modelos de manipulación y situaciones del mundo real.

El autor señala que un *sistema de representación*, consiste en primer lugar en las características primitivas o signos (palabras que se utilizan indistintamente), utilizados de alguna manera. Estas pueden ser entidades discretas, extraídas desde un conjunto bien definido, como características en la lógica simbólica, palabras, letras en un alfabeto, signos de puntuación, números, símbolos de operaciones aritméticas, los componentes de un circuito lógico, o las bases en una molécula de ADN. También pueden ser menos definidas, tales como objetos físicos y sus atributos.

Los signos elementales en un sistema de representación incluyen a veces normas ambiguas para combinar las señales en configuraciones permitidas; por ejemplo: los números pueden ser combinados; al utilizar la regla de valor posicional, hay números de varios dígitos, números y signos de operación pueden formar comandos de matemáticas o ecuaciones matemáticas, y así sucesivamente.

4.8.1 Relaciones simbólicas de la representación

La razón primordial para llamar a estos sistemas, de representación; es porque los caracteres, configuraciones o estructuras en los sistemas, pueden codificar, evocar, producir, representar, o simbolizar los de otro, de acuerdo con (a veces ambiguo) reglas. Un sistema de representación tiene tanto la estructura intrínseca (dentro de sí mismo), y extrínseca relaciones con otros sistemas de representación. Por ejemplo, no sólo palabras y frases tienen estructura gramatical y sintáctica, sino evocan imágenes no verbales.

Para entender el aprendizaje y la resolución de problemas aditivos, es necesario considerar la representación interna por el estudiante. Las configuraciones internas no pueden ser observadas directamente, sino que sólo pueden deducirse de la conducta observable.

4.8.2 La observación

De acuerdo con el mismo autor, el comportamiento de individuos, junto con las características de su ambiente externo, son fuentes de observación. Los diversos conceptos, estructuras, y procesos, que se producen en la mente de los estudiantes; son deducidos de la observación, clasificación, y medición de los diversos tipos de comportamiento junto con el medio ambiente y el contexto de la información.

La observación no se limita a las medidas de los *productos* (resultados) de aprendizaje de las matemáticas o el éxito de la solución de problemas, junto con atributos de los sujetos y las actitudes medidas, como las puntuaciones en las pruebas estandarizadas y encuestas, respuestas correctas e incorrectas sobre conjuntos estructurados de problemas, tiempos de solución, el número de pasos para la solución, entre otras.

La observación incluye medidas cuantitativas y cualitativas rescatadas de vídeo y audio grabadas en las entrevistas clínicas individuales, las acciones en grupos pequeños para resolver problemas e interacciones en el aula; así como grabados de pensamientos en voz alta, descripciones verbales, respuestas a las preguntas en las entrevistas clínicas, usos de notaciones (registros) y representaciones externas, las formas de las imágenes generadas por los alumnos y la solución del problema, expresiones faciales y movimientos corporales, y otros datos tales como *procesos* que pueden ser inferidos en los que incluyen el uso de una estrategia en particular, entre otros.

El estudio del aprendizaje y la resolución de problemas implica observaciones de representación, y la interpretación de las observaciones, lo más fiable posible.

A partir de lo descrito; para efectos del estudio *Resolución de problemas de estructura aditiva con niños de segundo grado de educación primaria* se retomó que el conocimiento está organizado en campos conceptuales. El campo conceptual aditivo es un proceso largo y para que un sujeto llegue a dominarlo requiere de un largo periodo de tiempo, mediante la experiencia, la madurez y el aprendizaje.

Por otro lado los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son resultado de las situaciones con las cuales es confrontado; por lo tanto los procedimientos y las soluciones que los niños emitan de uno u otro problema serán en función de sus procesos cognitivos y las situaciones didácticas implícitas en los problemas.

También es relevante mencionar que el proceso de resolución de un problema va vinculado al de su representación, en este proceso puede utilizar símbolos convencionales o no convencionales. En la representación del problema, un conjunto de esquemas organizan la acción, la conducta y la actividad; por medio de estas acciones el niño resuelve determinado problema. La manera de representar uno u otro problema de manera externa puede incluir los sistemas de habla, símbolos escritos, modelos figurativos o imágenes, modelos de manipulación y situaciones del mundo real.

V. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada en el estudio, así como el tipo y corte, la población con la que se trabajó y las etapas del mismo.

5.1 Tipo de estudio

El tipo de estudio es descriptivo y explicativo, busca especificar las características que presentan los niños de 2° grado de educación primaria de una escuela pública del Distrito Federal.

El estudio es descriptivo, porque pretende especificar los procesos que los niños de segundo grado de primaria realizan para resolver problemas de estructura aditiva. Hernández, Fernández y Baptista, señalan que "Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (2010, p.9).

El estudio es explicativo, porque va más allá de la descripción de los procesos que los niños de segundo grado de primaria realizan para resolver problemas de estructura aditiva. Sobre ello Hernández et al. (2010), observan que:

> Los estudios explicativos van más allá de la descripción de conceptos o fenómenos o del establecimiento de relaciones entre conceptos; es decir, están dirigidos a responder por las causas de los eventos y fenómenos físicos o sociales. Como su nombre lo indica, su interés se centra en explicar por qué ocurre un fenómeno y en qué condiciones se manifiesta, o por qué se relacionan dos o más variables (p. 84).

En nuestro estudio describimos los procesos que los niños emplean para resolver problemas de estructura aditiva y también damos una explicación de esos procesos de manera argumentada.

5.2 Corte del estudio

El corte del estudio es cualitativo. De acuerdo con Hernández et al. (2010), "…las investigaciones cualitativas se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general" (p. 9). Todo aspecto es relevante, desde el mínimo detalle, hasta su totalidad. De acuerdo con los mismos autores, el propósito de las investigaciones cualitativas es: reconstruir la realidad, tal como la observan los actores de un sistema social previamente definido. Se trata de considerar el "todo" sin reducirlo al estudio de sus partes.

Por otro lado, las metas de la investigación cualitativa son: "Describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por la experiencias de los participantes" (Hernández et al. 2010, p. 11).

La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa, es decir, busca comprender el significado de las acciones; no se pretende generalizar sobre los fenómenos, sino describir y explicar las características de una población específica.

Para nuestro estudio, se retoman los fenómenos que ocurren durante la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas de estructura aditiva con niños de segundo grado de primaria, como un conjunto de diversas variables a considerar. Se propone comprender los procesos y significados que los estudiantes elaboran alrededor de la resolución de los problemas de estructura aditiva.

Otro aspecto relevante en este estudio será el yo como instrumento, a partir de una relación con los estudiantes; no será necesario tener una observación programada donde se observen conductas; estás se pueden percibir e interpretar al haber una interacción directa. Dar sentido a cada situación vivida, como Eisner (1998), dice: “Esto significa que la manera en la cual vemos y reaccionamos frente a una situación, y como interpretamos lo que vemos, llevarán nuestra propia firma” (1998, p. 51). La interpretación que se efectué en este estudio debe estar sustentada, con el fin de justificar cada una de las acciones que se observé en los procesos de enseñanza y aprendizaje que realizan los niños; por medio de la descripción y explicación de las actividades que se lleven a cabo dentro del salón de clases.

Al desarrollarse un trabajo directo de estudiantes y la autora de la tesis, se propiciará un mejor estudio; pues se tendrá la oportunidad de reflexionar sobre el proceso de la práctica docente y hacer las adecuaciones necesarias para dar un seguimiento adecuado a los procesos de aprendizaje de los niños.

5.3 Población

En el estudio participaron diez estudiantes de y 2° grado, con edades entre los 6 y 8 años, de una escuela primaria pública del Distrito Federal. Se inició el estudio con los niños en 1° grado; y se dio seguimiento cuando cursaban 2° grado.

5.4 Etapas del estudio

El estudio se integró en cuatro etapas: 1.- Diseño y aplicación de cuestionarios íniciales de escritura numérica decimal y resolución de problemas de estructura aditiva, seguidos de entrevistas clínicas individuales. 2.- Diseño y aplicación de secuencia didáctica sobre problemas de estructura aditiva explorando el modelo funcional (problemas del tipo combinación diferencia desconocida, comparación grande desconocido, combinación inicio desconocido y cambio aumentando comienzo desconocido). 3.- Diseño y aplicación de cuestionario final de problemas aditivos. 4.- Análisis de los resultados.

5.5 Primera etapa del estudio: Diseño y aplicación de cuestionarios iniciales

Esta etapa se integró por el diseño de dos cuestionarios iniciales: 1) Cuestionario de escritura numérica decimal, 2) Cuestionario de problemas de estructura aditiva, seguido de una entrevista clínica individual.

Descripción de los cuestionarios

El cuestionario de escritura numérica se organizó a partir de cuatro preguntas conforme se explicita en la tabla 8.

Tabla 8. Preguntas del cuestionario del SND

No. De Pregunta	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Conteo	Se le pide al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro de números del 1 al 100.
2	Escritura numérica	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Antecesor y sucesor de un número	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.

El cuestionario de problemas de estructura aditiva se organizó tomando como referencia la clasificación que Maza (1999) propone sobre los diferentes tipos de problemas (combinación, cambio, comparación e igualación), así mismo se consideraron las tres primeras categorías de los problemas de estructura aditiva de Vergnaud (2010).

Tabla 9. Preguntas del cuestionario de problemas aditivos: modelo funcional

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido.	Luis y Susana son amigos y están organizando una fiesta para su graduación. Luis está juntando el dinero de los estudiantes de 6º “A” y Susana está juntando el dinero del 6º “B” Luis lleva 166 pesos y Susana 133 pesos. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos?
2	Modelo funcional; tipo combinación, diferencia desconocida.	En un juego de canicas, Gabriel gana 27canicas y Mario gana varias. Los dos juntos tienen 89 canicas. ¿Cuántas canicas son de Mario?
3	Modelo funcional; tipo combinación, inicio desconocido.	Alejandro fue a la feria, jugó tiro de dardos, en el primer tiro ganó algunos puntos y en el segundo tiro ganó 75 puntos. Después de dos tiros llevaba 150 puntos. ¿Cuántos puntos ganó en el primer tiro?
4	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, resultado desconocido.	Enrique tenía $ 434°° ahorrados, en su cumpleaños su abuelita le regaló $222°° ¿Cuánto dinero tiene ahora Enrique?
5	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, cambio desconocido.	Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más. Ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica?
6	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, comienzo desconocido.	Miguel tenía algún dinero, su papá le dio 30 pesos más para comprar su lunch. Ahora Miguel tiene 42 pesos. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

Tabla 9. [Continuación]

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
7	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, resultado desconocido.	En la fiesta de cumpleaños de Enrique cayó la piñata, Laura ganó 54 caramelos, le dio 26 a Mónica. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Laura?
8	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, cambio desconocido.	Zayra tenía 60 caramelos, le dio algunos a Rita. Ahora Zayra tiene 18 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio a Rita?
9	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, comienzo desconocido.	Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta?
10	Modelo funcional; tipo comparación, grande desconocido.	Al final de un juego de canicas Jorge tiene 33 canicas y Miguel tiene 58 canicas más que Jorge. ¿Cuántas canicas tiene Miguel?
11	Modelo funcional; tipo comparación, diferencia desconocida.	Don Hugo vende helados. El día de hoy vendió 67 helados de fresa y 45 de vainilla. ¿Cuántos helados de fresa vendió más que de vainilla?
12	Modelo funcional; tipo comparación, pequeño desconocido.	Julio y Susana están jugando serpientes y escaleras, Julio va en una casilla, Susana va en la casilla número 46, tiene 13 puntos más que Julio. ¿En qué casilla va Julio?
13	Modelo funcional; tipo igualación, grande desconocido.	Ana compró 24 paletas. Sandra compró37 paletas más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra?
14	Modelo funcional; tipo igualación, diferencia desconocida.	En el cumpleaños de Enrique, su mamá infló 48 globos. Alicia infló 15 menos. ¿Cuántos globos infló Alicia?
15	Modelo funcional; tipo igualación, pequeño desconocido.	Patricia tiene 84 pesos. Sandra tiene 59. ¿Cuántos pesos necesita Sandra para tener los mismos pesos que tiene Patricia?

Aplicación

En ésta etapa se aplicaron dos cuestionarios 1) Escritura numérica decimal y 2) Problemas de estructura aditiva.

El cuestionario de escritura numérica decimal se aplicó a diez alumnos de 1er grado, en dos sesiones de 60 minutos cada una, en una escuela pública, turno matutino, en la zona norte del Distrito Federal. Se aplicó con la finalidad de conocer las concepciones de escritura numérica decimal que tienen los niños y cómo se apropian de las reglas del SND.

El cuestionario de resolución de problemas aditivos se aplicó a los mismos estudiantes que participaron en el cuestionario de escritura numérica decimal; en cuatro sesiones de 60 minutos cada una. Fue aplicado en grupos de cinco estudiantes, con la finalidad de conocer la manera como los alumnos de primero resuelven problemas aditivos.

Aplicación de entrevistas clínicas individuales

La entrevista clínica individual permitió indagar cómo los alumnos habían resuelto los problemas de estructura aditiva del cuestionario inicial. De acuerdo con Delval (2001), la entrevista clínica se fundamenta en el método clínico de Jean Piaget. "Una buena entrevista clínica es aquella en la que se consigue que el sujeto se exprese libremente y nos comunique los aspectos básicos de su pensamiento que están relacionados con el tema de nuestro estudio" (Delval, 2001, p 141). En la entrevista se pone al niño frente a una situación y se le interroga con el fin de ver cómo justifica y argumenta sobre una situación planteada. La entrevista fue semiestructurada, pues hubo preguntas comunes a todos los entrevistados; las preguntas se modificaron de acuerdo con las respuestas que los entrevistados proporcionaron.

Con la entrevista clínica se obtuvieron datos acerca del proceso que los niños realizaron para resolver los diferentes tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva.

Descripción de la entrevista clínica individual

De acuerdo con los resultados obtenidos en los cuestionarios iniciales, se seleccionaron cuatro niños de 1er grado para las entrevistas clínicas individuales. La muestra se seleccionó con base a los diferentes niveles de conceptualización matemática obtenidos en los dos cuestionarios iníciales aplicados: un niño con nivel de conceptualización matemática alta, un niño con nivel de conceptualización matemática mediana, dos niños con nivel de conceptualización matemática baja.

Aplicación de la entrevista clínica individual

Se entrevistó a los niños de manera individual, con preguntas en torno a las estrategias empleadas para resolver los problemas aditivos planteados.

5.6 Segunda etapa del estudio: Diseño y aplicación de secuencia didáctica

Descripción de la secuencia didáctica

El diseño de la secuencia didáctica se basó en los resultados de la etapa anterior; se diseñaron diversas actividades encaminadas a propiciar la resolución de problemas de estructura aditiva; las actividades se organizaron de acuerdo con la edad de los niños y con la resolución de problemas de estructura aditiva de los tipos: combinación con diferencia desconocida, comparación con grande desconocido, combinación con inicio desconocido y cambio aumentando con comienzo desconocido, así como a favorecer la adquisición de las reglas del SND.

El objetivo de observar el desarrollo de las actividades específicas de enseñanza fue estudiar la evolución de los procedimientos de los niños al resolver los problemas de estructura aditiva, y apoyar su desarrollo en la adquisición de su propio conocimiento. Este diseño consistió en nueve sesiones

Aplicación de la secuencia didáctica

Las actividades se aplicaron a siete niños de segundo grado; cuando se inició el estudio éstos niños iban en primer grado; por ello se decidió dar seguimiento al trabajo desarrollado en la etapa anterior.

5. 7 Tercera etapa: Diseño y aplicación de cuestionario final

La tercera etapa consistió en el diseño y la aplicación de un cuestionario final con el objetivo de observar la evolución de los procedimientos y las formas de representación que emplearon los niños para resolver problemas aditivos.

Descripción del cuestionario final

El cuestionario de resolución de problemas de estructura aditiva se organizó de la siguiente manera:

Tabla 10. Preguntas del cuestionario final de problemas aditivos

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido.	(Previamente aparece un recuadro con las imágenes de las prendas y los precios de éstas: falda $120, blusa $143, suéter $228, guantes $46, calcetas $25 y boina $158). La mamá de Adriana compró el uniforme que le solicitaron en la escuela. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Adriana con el uniforme completo?

Tabla 10. [Continuación]

No.	Modelo, tipo y subtipo	Solicitud de la pregunta
2	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido	(Los precios son los mismos que los del problema anterior). La mamá de Gustavo compró un suéter, una camisa, un pantalón, un par de guantes, un par de calcetines, una corbata y una boina. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Gustavo con el uniforme?
3	Problema de comparación, diferencia desconocida	¿Cuál de las dos mamás gastó más dinero? ¿Cuál fue la diferencia?
4	Problemas de combinación diferencia desconocida	La mamá de Adriana organizó una fiesta para la graduación de su hija Carmen. En la fiesta hubo tortas, jugos, gelatinas y dulces. La mamá de Carmen preparó 27 tortas para los invitados, la tía de Carmen le ayudo a preparar más tortas. En total había 56 tortas. ¿Cuántas tortas preparo la tía de Carmen?
5	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido	En la fiesta jugaron varios juegos uno de ellos fue el boliche. Al final del juego sumaban los puntos de cada jugador y ganaba el que tenía mayor número de puntos. Observa los bolos que tiraron Carmen y su amigo. Escribe los puntos que obtuvo cada uno. Carmen: 13, 9 y 40 puntos. Jesús: 9, 25, 17 y 23 puntos. Diana: 23, 6 y 10 puntos.
6	Modelo funcional; tipo igualación y subtipo diferencia desconocida	¿Cuántos puntos le faltaron a Carmen para tener los mismos puntos que su amigo Jesús?
7	Problema de igualación grande desconocido.	Diana obtuvo 39 puntos, si hubiera tenido 23 puntos más. ¿Tendría los mismos puntos qué obtuvo Carmen o los mismos puntos que obtuvo Jesús?

Tabla 10. [Continuación]

No.	Modelo, tipo y subtipo	Solicitud de la pregunta
8	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, comienzo desconocido.	Adriana compró una bolsa grande de paletas. En la fiesta había 37 invitados, a cada invitado le regaló 1 paleta. Al final de la fiesta le quedaron 63 paletas. ¿Cuántas paletas tenía Adriana al inicio de la fiesta?

Aplicación de la tercera etapa

El cuestionario final de problemas aditivos se aplicó a los siete niños de segundo grado de primaria con quienes se trabajó la secuencia de actividades; se llevó a cabo en una sesión de 60 minutos.

5. 8 Cuarta etapa: Análisis de los resultados

En ésta etapa del estudio se analizaron los resultados de cada una de las etapas anteriores. El análisis consistió en lo siguiente:

Análisis de resultados de la primera etapa del estudio

Este análisis se desarrolló en función de los instrumentos aplicados en esta etapa: cuestionarios de escritura numérica y cuestionarios de problemas de estructura aditiva seguidos de entrevistas clínicas individuales.

Análisis de los datos del cuestionario de escritura numérica decimal: consistió en identificar cuáles aspectos de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo los niños conocían. A partir del análisis del cuestionario encontramos que algunas ideas intuitivas de los niños se aproximan a las hipótesis trabajadas por Lerner y Sadovsky (1994).

Análisis de los datos de problemas de estructura aditiva y entrevistas clínicas individuales: se realizó en dos etapas: la primera consistió en elaborar categorías de resolución de problemas a partir de las respuestas que los estudiantes dieron en los cuestionarios; y la segunda en analizar las producciones realizadas por los estudiantes en las entrevistas clínicas individuales.

Análisis de resultados de la segunda etapa del estudio

Los datos de esta etapa se analizaron con la observación del proceso de resolución de problemas que realizaron los alumnos de 2° grado durante las sesiones de trabajo de la aplicación de la secuencia didáctica. Se tomaron seis sesiones de nueve para mostrar el proceso de resolución de los problemas; después, se analizó el tipo de representación que elaboraron los alumnos durante las sesiones de trabajo.

Análisis de resultados de la tercera etapa del estudio

El análisis de los resultados se realizó en dos etapas: 1) Consistió en el análisis de las producciones de los niños en los cuestionarios; también se analizó si algunas de las categorías de la primera etapa del estudio seguían vigentes y si hubo categorías diferentes a las antes mencionadas. 2) Consistió en estudiar ¿qué diferencia hubo de los resultados del cuestionario inicial con los resultados del cuestionario final?

VI. RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIOS INICIALES SEGUIDOS DE ENTREVISTAS CLINICAS INDIVIDUALES

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio, y corresponde a los resultados obtenidos en la aplicación de los cuestionarios iniciales y entrevistas clínicas individuales. Inicialmente se describen los cuestionarios seguidos de la aplicación de los mismos para finalizar con los resultados obtenidos en esta etapa del estudio.

6.1 Descripción de los cuestionarios iniciales

A continuación se describen los dos instrumentos aplicados en la primera etapa del estudio que corresponden a los cuestionarios iniciales sobre sistema de numeración decimal indo-arábigo y problemas de estructura aditiva.

Se describe el cuestionario sobre sistema de numeración decimal indo-arábigo. Conforme aparece en la siguiente tabla.

Tabla 11. Preguntas del cuestionario de escritura numérica

No. De Pregunta	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Conteo	Se le pide al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro de números del 1 al 100.
2	Escritura numérica	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Antecesor y sucesor de un número	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.

Descripción del cuestionario de Resolución de Problemas de Estructura Aditiva

En el cuestionario de problemas de estructura aditiva se utilizó la clasificación que Maza (1999) utiliza sobre los diferentes tipos y subtipos de problemas (combinación, cambio, comparación e igualación) del modelo funcional matemático. Así mismo se consideraron las tres primeras categorías de los problemas de estructuras aditivas de Vergnaud (2010). A continuación, se describen los contenidos matemáticos abordados en los cuestionarios iniciales:

Tabla 12. Preguntas del cuestionario de problemas aditivos

No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido.	? 166 133	Luis y Susana son amigos y están organizando una fiesta para su graduación. Luis está juntando el dinero de los estudiantes de 6º “A” y Susana está juntando el dinero del 6º “B” Luis lleva 166 pesos y Susana 133 pesos. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos?
2	Modelo funcional; tipo combinación, diferencia desconocida.	89 27 ?	En un juego de canicas, Gabriel gana 27canicas y Mario gana varias. Los dos juntos tienen 89 canicas. ¿Cuántas canicas son de Mario?
3	Modelo funcional; tipo combinación, inicio desconocido.	150 ? 75	Alejandro fue a la feria, jugó tiro de dardos, en el primer tiro ganó algunos puntos y en el segundo tiro ganó 75 puntos. Después de dos tiros llevaba 150 puntos. ¿Cuántos puntos ganó en el primer tiro?

Tabla12 [Continuación]

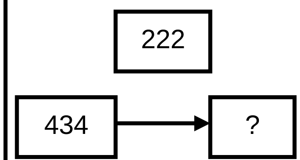
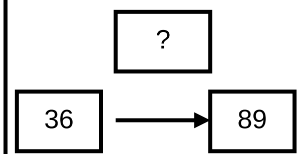
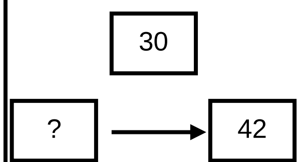
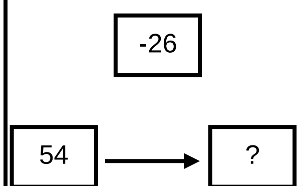
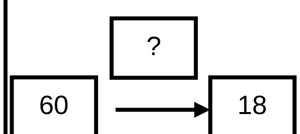
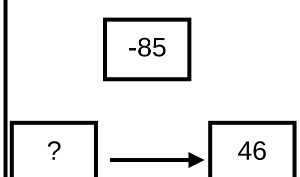
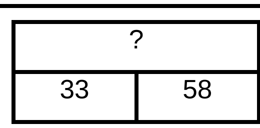
No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
4	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, resultado desconocido.		Enrique tenía $ 434°° ahorrados, en su cumpleaños su abuelita le regaló $222°° ¿Cuánto dinero tiene ahora Enrique?
5	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, cambio desconocido.		Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más. Ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica?
6	Modelo funcional; tipo cambio aumentando, comienzo desconocido.		Miguel tenía algún dinero, su papá le dio 30 pesos más para comprar su lunch. Ahora Miguel tiene 42 pesos. ¿Cuánto dinero tenía al principio?
7	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, resultado desconocido.		En la fiesta de cumpleaños de Enrique cayó la piñata, Laura ganó 54 caramelos, le dio 26 a Mónica. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Laura?
8	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, cambio desconocido.		Zayra tenía 60 caramelos, le dio algunos a Rita. Ahora Zayra tiene 18 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio a Rita?
9	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, comienzo desconocido.		Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta?
10	Modelo funcional; tipo comparación, grande desconocido.		Al final de un juego de canicas Jorge tiene 33 canicas y Miguel tiene 58 canicas más que Jorge. ¿Cuántas canicas tiene Miguel?

Tabla 12. [Continuación]

No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
11	Modelo funcional; tipo comparación, diferencia desconocida.	45 67 ?	Don Hugo vende helados. Hoy vendió 67 helados de fresa y 45 de vainilla. ¿Cuántos helados de fresa vendió más que de vainilla?
12	Modelo funcional; tipo comparación, pequeño desconocido.	46 ? 13	Julio y Susana están jugando serpientes y escaleras, Julio va en una casilla, Susana va en la casilla número 46, tiene 13 puntos más que Julio. ¿En qué casilla va Julio?
13	Modelo funcional; tipo igualación, grande desconocido.	? 24 37	Ana compró 24 paletas. Sandra compró37 paletas más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra?
14	Modelo funcional; tipo igualación, pequeño desconocido.	? 48 15	En el cumpleaños de Enrique, su mamá infló 48 globos. Alicia infló 15 menos. ¿Cuántos globos infló Alicia?
15	Modelo funcional; tipo igualación, diferencia desconocida.	59 84 ?	Patricia tiene 84 pesos. Sandra tiene 59. ¿Cuántos pesos necesita Sandra para tener los mismos pesos que tiene Patricia?

6.2 Aplicación del cuestionario de escritura numérica

El cuestionario se aplicó a diez niños de una escuela pública del Distrito Federal, en dos sesiones de 60 minutos cada una; los alumnos lo contestaron de manera individual en el salón de clase; la consigna fue responder todas las preguntas del cuestionario; la aplicación se llevó de la siguiente manera:

1. Se leyó oralmente las preguntas; después de que se leía una pregunta, si los niños tenían dudas, preguntaban.

2. Se dio un tiempo considerable en el que todos los participantes contestaran; después se continuó con otra pregunta.
3. La solicitud a la respuesta de la pregunta número uno, se trabajó de manera individual con cada uno de los participantes.

6.3 Aplicación del cuestionario de problemas aditivos

El cuestionario se aplicó a los mismos diez niños que el cuestionario de escritura numérica, en cuatro sesiones de 60 minutos cada una; los alumnos lo contestaron de manera individual en el salón de clase; la consigna fue resolver los problemas; podían apoyarse con dibujos, fichas, billetes y monedas; la aplicación se llevó de la siguiente manera:

1. Se leyó oralmente los problemas de uno en uno; los niños escuchaban; si tenían dudas, preguntaban.
2. Los niños resolvieron el problema de manera individual
3. Después de un tiempo considerable en el que todos los participantes terminaban de resolver el problema, se daba lectura al siguiente problema y así sucesivamente hasta terminar de resolver todos los problemas del cuestionario.

6.4 Análisis de los datos del cuestionario de escritura numérica

El análisis consistió en identificar cuáles aspectos de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo los niños conocían. A partir del análisis del cuestionario encontramos que algunas ideas intuitivas de los niños se aproximan a las hipótesis trabajadas por Lerner y Sadovsky (1994).

6.5 Análisis de los datos de problemas aditivos

El análisis de los datos se realizó en dos etapas: la primera etapa consistió en elaborar categorías de resolución de problemas a partir de las respuestas que los estudiantes dieron en los cuestionarios; y la segunda etapa en analizar las producciones realizadas por los estudiantes en las entrevistas clínicas individuales.

6.6 Resultados del cuestionario de escritura numérica

Los resultados de esta etapa muestran que los estudiantes desarrollan tres ideas intuitivas sobre el sistema de numeración decimal indo-arábigo, que coinciden con las de Lerner y Sadovsky (1994).

Categorías de escritura numérica

1.- "*Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número"*

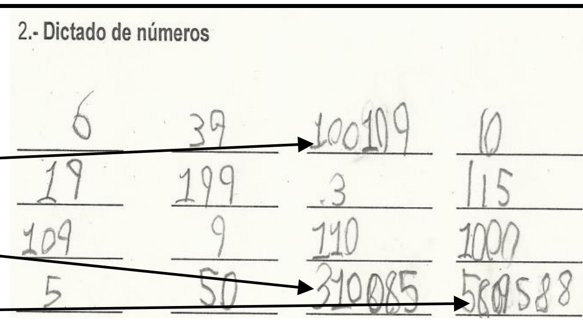
2.- "Los niños manejan en primer lugar los nudos -es decir las decenas, centenas, unidades de mil…, exactas- y sólo después escriben los números que se ubican en los intervalos entre nudos"

3.- "Los niños escriben los números tal cual los escuchan". A continuación se describen las categorías:

Categoría 1 *"Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número" (Tomada de Lerner y Sadovsky 1994).*

Descripción: En esta categoría se ubica a los niños que en respuesta a la solicitud de la pregunta número dos (dictado de números), al dictarles números con unidades de millar, aunque no sabían la manera de escribir algunos números, registraban la cantidad con varios dígitos. Por ejemplo:

Tabla 13. Ejemplo de la Categoría 1 de escritura numérica

Números dictados	Números escritos
1019 3585 5895	

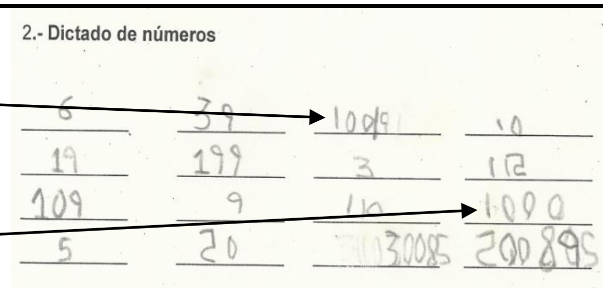
Comentario: Axel escribió 100109 para 1019, 310085 para 3585 y 589588 para 5895. Axel y otros de sus compañeros, aunque no sabían como se escribían los números con unidades de millar; al escuchar la cantidad dictada, imaginaban que era un número grande, por lo tanto escribieron varios dígitos.

Categoría 2 *“Los niños manejan en primer lugar los nudos - es decir las decenas, centenas, unidades de mil…, exactas- y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos” (Tomada de Lerner y Sadovsky 1994).*

Descripción: En esta categoría ubicamos a los niños que escriben correctamente las cantidades consideradas como nudos, sin embargo las cantidades que se encuentran en los intervalos de los nudos no son escritas correctamente.

La mayoría de los niños a quienes se les aplicó el cuestionario conocen la serie numérica del uno al cien; también identifican números comprendidos entre el uno al cien, escriben cantidades con unidades y decenas; pero a partir de las centenas generan sus propias reglas de escritura. En la apropiación de la escritura convencional de los números no se sigue el orden de la serie numérica *los niños manejan en primer lugar los nudos - es decir las decenas, centenas, unidades de* *mil…, exactas- y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos*. Por ejemplo: Margarita (una de las niñas que contestó el cuestionario de escritura numérica decimal), a la solicitud de la pregunta número dos, dictado de números del cuestionario de numeración decimal, escribió lo siguiente:

Tabla 14. Ejemplo de la Categoría 2 de escritura numérica

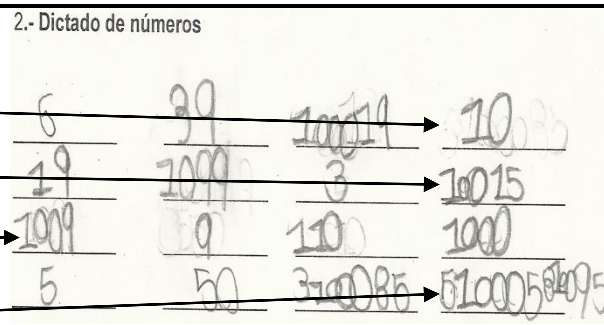
Números dictados	Números escritos
1019 1000	

Comentario: Para la escritura de nudos como: 10, 110, y 1000 los escribe correctamente pero para escribir 1019, escribió 10019. En Margarita al igual que en otros de sus compañeros es evidente esta idea intuitiva. Hay un dominio en la escritura de nudos. Pero para la escritura de números intervalos aún no hay un dominio del uso de los ceros.

Categoría 3 *“Los niños escriben los números tal cual lo escuchan”* (Tomada de Lerner y Sadovsky 1994).

Descripción: En esta categoría ubicamos a los niños que a partir de las centenas generan sus propias reglas de escritura. Por ejemplo; Aldo, a la solicitud de la pregunta número dos, dictado de números, registró lo siguiente:

Tabla 15. Ejemplo de la Categoría 3 de escritura numérica

Números dictados	Números escritos
1019 115 109 5895	

Comentario: En el dictado de números Aldo escribió 100019 cuando se le dictó 1019, 10015 para 115, 1009 para 109. Con ello se muestra como algunos niños igual que Osvaldo, escriben los números como los escuchan. Establecen una relación entre la numeración hablada y el conocimiento que tienen de la escritura convencional de los números del sistema de numeración decimal indo-arábigo.

En otras investigaciones como la de Scheuer et al. (2000), se encontraron resultados similares a esta categoría; ellas la denominaron *notaciones logográmicas*, porque resultan del establecimiento de una correspondencia estricta entre la forma oral de un número y su notación. El procedimiento consiste en descomponer la enunciación oral de un número en una serie de partes con sentido numérico, o “palabras numéricas” y escribir la notación completa de todas y cada una de esas palabras. Al realizar este tipo de escritura numérica se deja de lado el principio posicional, los números sólo tienen un valor que relaciona lo oral con lo escrito.

De acuerdo con los resultados, se puede observar que los niños de este grupo desarrollan ideas intuitivas del sistema de numeración decimal indo–arábigo; esto nos muestra que estos niños se encuentran en un proceso de adquisición de las reglas formales del sistema. A partir de los resultados se reflexionó sobe la pertinencia de indagar acerca de las reglas formales del SND y cómo este repercute en el uso de los algoritmos.

6. 7 Resultados del cuestionario inicial de problemas aditivos y entrevistas clínicas individuales

En esta parte del estudio se describen los resultados del cuestionario de problemas de estructura aditiva. El análisis de los datos consistió en:

1) Elaborar categorías de la resolución de problemas y análisis de las entrevistas clínicas para ver los argumentos que dan los alumnos en la resolución de los problemas de estructura aditiva.
2) Describir el porcentaje de las estrategias empleadas de acuerdo con el tipo y subtipo de problema.
3) Identificar las representaciones externas que emplearon los niños.

Categorías en la resolución de problemas de estructura aditiva

Las estrategias que emplean los niños al resolver un problema son diversas y al mismo tiempo con características similares que las agrupan. En este apartado del estudio se identificaron estrategias en el proceso de resolución de problemas de estructura aditiva con el modelo matemático funcional. De acuerdo con las estrategias empleadas por los niños para resolver los problemas se integraron siete categorías:

1.- "Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656)"
2.- "Cuenta todo"
3.- "Estrategia de complemento"
4.- "Transcripción de información del enunciado del problema"
5.- "Uso equivocado del algoritmo"

6.- “Uso adecuado del algoritmo”

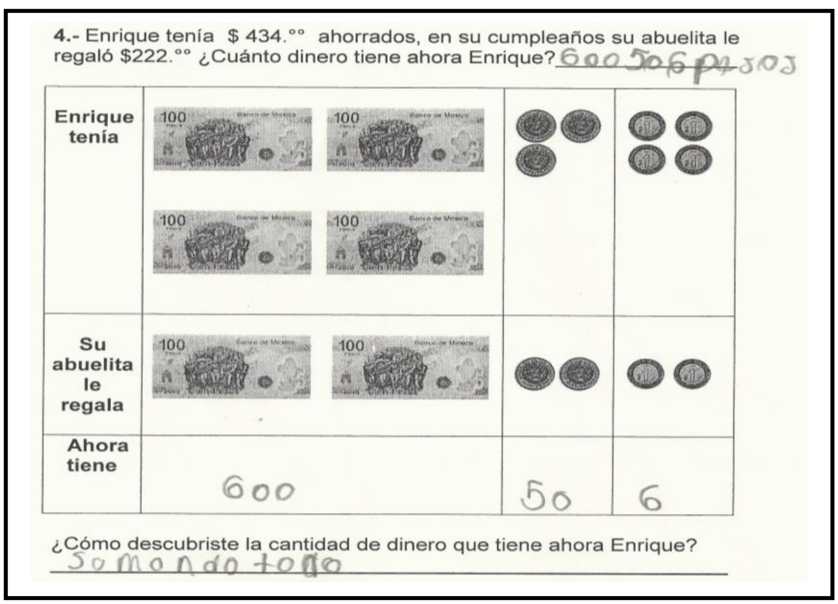
7.- “Uso del algoritmo incompleto”

A continuación se describen y se ejemplifican de manera individual cada una de las categorías.

Categoría 1 “*Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656)”* (tomada de Brizuela y Cayton, 2010)

Descripción: En esta categoría a partir de la representación dada, del problema planteado, el niño resuelve con la estrategia de *contar todo* o sumar todo; es decir suma o cuenta todos los objetos del primer sumando, del segundo sumando y lo representa numéricamente. Da el resultado correcto pero en la representación escribe la cantidad literal o agrega uno o dos ceros más. Por ejemplo: 600506 en vez de 656.

Figura 18. Ejemplo de la Categoría 1 de resolución de problemas aditivos



A continuación se presenta un fragmento de la entrevista con el niño Rafael relacionada con el problema número cuatro.

Problema tipo: Cambio aumentando con final desconocido

Rafael. 2° grado, 8 años de edad.

Diálogo de Rafael – Entrevistador. *Problema de cambio aumentando con final desconocido:*

Rafael: (Observa el problema y lee su respuesta) Seiscientos cincuenta y seis.

Entrevistador: ¿Cómo le hiciste?

Rafael: Eh, sumé.

Entrevistador: ¿Qué fuiste sumando?

Rafael: Sesenta, más cinco, más. Digo sesenta más, sí cinco, más seis. (señala los números que registró en la tabla que acompaña al problema para poder resolverlo).

Entrevistador: ¿De dónde sale éste? (Hace referencia al número sesenta), es seiscientos. ¿De dónde sale el seiscientos?

Rafael: De todos estos (Señala los billetes de la ilustración que acompaña al problema).

Entrevistador: ¿Los fuiste contando?

Rafael: (Señala cada billete y cuenta). Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta y sesenta.

Entrevistador: Si son de cien en vez de diez, ¿no era cien, doscientos?

Rafael: (Vuelve a contar los billetes, ahora de cien en cien. Cuenta oralmente. Cada vez que menciona un número señala un billete de $100°°). Cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos.

Entrevistador: De ahí sacaste el seiscientos. Luego las monedas de diez.

Rafael: (Cuenta oralmente las monedas. Cada vez que menciona un número señala una moneda). Uno, dos, tres, cuatro, cinco. Entonces son cinco monedas.

Entrevistador: Cinco ¿cómo eran cinco, por eso le pusiste cincuenta?

Rafael: (Dice que sí con la cabeza). Y estas, como eran seis: una, dos, tres, cuatro, cinco y seis, (cuenta las monedas de una en una, oralmente).

Entrevistador: En total, ¿cuánto te dio?

Rafael:(Observa su cuestionario en silencio unos segundos). Seiscientos cincuenta y seis.

Comentario: Rafael lee el problema en voz alta; en las cantidades del enunciado se le dificulta leerlas; cuenta las cantidades de los billetes, las monedas de a \$10.00 y de a \$1.00; los registra y escribe el resultado de manera literal completa. Este procedimiento es parte del proceso de la adquisición de las reglas del SND, de las cuales los niños se apropian poco a poco.

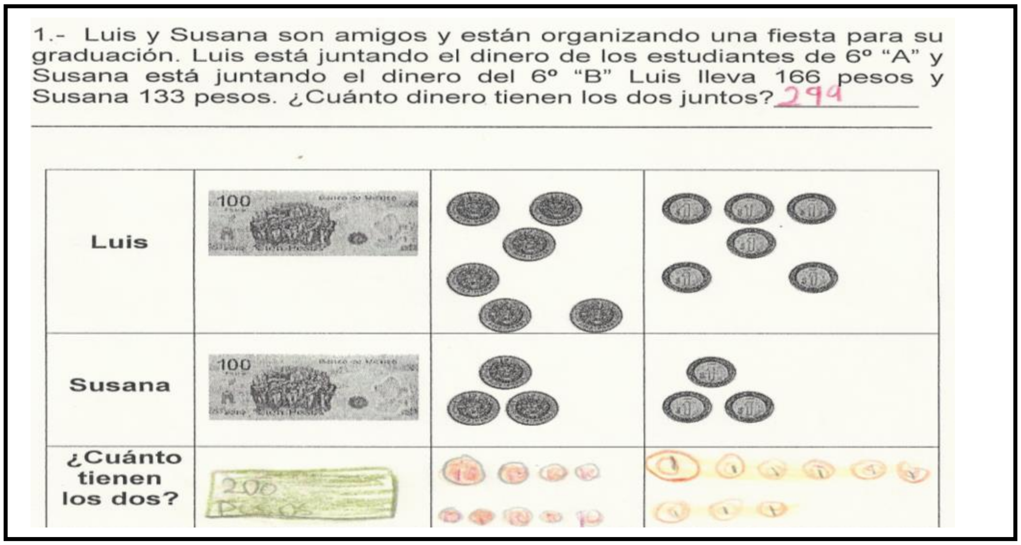
A partir de la representación del problema y de la escritura numérica que construyen Rafael y algunos de sus compañeros, pareciera que la presentación de los billetes y monedas invita a contarlos por familias, es decir los pesos con los pesos, las monedas de diez con sus iguales y billetes con billetes.

En estudios acerca de las representaciones del SND, investigadoras como Brizuela y Cayton (2010), encontraron resultados similares a esta categoría; en su estudio la llaman *Transcodificación literal completa*; en ella el numeral se anota de forma completa o casi literal, eventualmente con algún dígito cambiado; incluyen cantidades a las que les sobran ceros o falta algún dígito.

Categoría 2 *"Cuenta todo"* (Tomada de Maza, 1999)

Descripción: En esta categoría el niño resuelve con la estrategia de *contar todo*, es decir, representa el primer sumando con los dedos, monedas o dibujos, posteriormente el segundo sumando de la misma manera, cuenta todos los elementos iniciando por el primero y lo representa numéricamente; obtiene y representa el resultado correctamente.

Figura 19. Ejemplo de la Categoría 2 de resolución de problemas aditivos



Una de las primeras estrategias de resolución de problemas aditivos es que los niños recurren al conteo de dedos, dibujos u objetos; en esta categoría los niños emplean el conteo y representan de manera correcta el resultado.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista con Camila sobre la resolución del problema uno.

Problema tipo: Combinación con final desconocido

Camila. 2° grado, 7 años de edad.

Diálogo de Camila – Entrevistador. *Problema de combinación con final desconocido:*

Camila: El que se me hizo más complicado fue (observa los problemas), mmh, el qué se me hizo un poquito más difícil, este fue este, porque ahí, jamás había hecho una suma tan grande.

Entrevistador: Y ahí ¿cómo hiciste la suma?

Camila: Ahí la hice, cien más cien, son, serían cero más cero, cero. Cero más cero, cero (Escribe y resuelve la siguiente suma 100 +100 = 200); uno más uno dos y serían doscientos pesos. Doscientos más todas las monedas de a diez, serían doscientos (señala las ilustraciones de monedas que acompañan al problema). Doscientos diez, doscientos veinte, doscientos treinta… (cuenta oralmente y señala cada una de las monedas de a diez, hasta el doscientos noventa), doscientos noventa.

Entrevistador: Mmmhh (afirma con la cabeza).

Camila: Entonces doscientos noventa, doscientos noventa y uno, doscientos noventa y dos, (cuenta las monedas de a peso de la ilustración, hasta el doscientos noventa y nueve); doscientos noventa y nueve, doscientos noventa y nueve pesos.

Entrevistador: ¿Ese fue el resultado?

Camila: ¡Ajá!

Entrevistador: ¿Y te fue difícil?

Camila: Pues no, fácil lo haces más o menos con fichas, billetes y monedas.

Entrevistador: Pero si lo haces con operación, ¿sería más difícil?

Camila: Pues no ya no es tan difícil, porque sumas (señala los billetes y monedas del problema) todo esto para que te de el resultado.

Comentario: Para resolver este problema, Camila se auxilia de la ilustración que acompaña al problema, cuenta todo el dinero de la ilustración, inicia con las centenas, después las decenas y finalmente las unidades. Este procedimiento es efectivo con la representación del problema con dibujos u objetos; sin embargo, para cantidades mayores el uso del algoritmo de la suma resultaría más eficiente.

Para esta categoría se retomó a Maza (1999), autor que la describe como *estrategia de contar todo* en la cual *se representa el primer sumando con los dedos o material, posteriormente el segundo sumando de la misma manera y, por último se cuentan todos los elementos iniciando por el primero*. En nuestro estudio la representación de los sumandos es con dedos, con material; (fichas o monedas), o con dibujos; a ello le agregamos que la representación numérica del resultado es adecuada.

Categoría 3 *“Estrategia de complemento”* (Tomada de Vergnaud, 2010)

Descripción: A partir de la representación del problema con fichas o dibujos, el niño busca “…sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir o quitar al estado inicial para llegar al estado final” (Vergnaud, 2010, p. 172); representa el minuendo con fichas o dibujos, retira las fichas, tacha o colorea los dibujos que representan el sustraendo; las fichas que quedan o dibujos sin colorear o marcar, son la diferencia; o también puede representar una cantidad inicial con fichas, dibujos o monedas; a ella le añade la cantidad necesaria de objetos para llegar al estado final (a una cantidad deseada); después cuenta el número de objetos, dibujos o fichas que añadió.

Figura 20. Ejemplo de la Categoría 3 de resolución de problemas aditivos

El niño se apoya con el uso de dibujos; el estado inicial son todos los dulces; tacha los dulces que va a quitar; cuenta los dulces que no están tachados y ese es el estado final o resultado.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista realizada con Camila sobre la resolución del problema ocho.

Problema tipo: Cambio disminuyendo con diferencia desconocida

Camila. 2° grado, 7 años de edad.

Diálogo de Camila – Entrevistador. *Problema de cambio disminuyendo con diferencia desconocida:*

Camila: (Lee el problema). *Este le dio cuarenta y dos dulces. Y aquí están todos los dulces (señala la ilustración que acompaña al problema) que se supone que él ganó.*

Entrevistador: ¿Cuántos eran todos los dulces qué él ganó?

Camila: Eran. Mmhh, sesenta dulces.

Entrevistador: Mmmhh (asiente con la cabeza).

Camila: Y ahora Zayra le dio algunos a Rita; ahora tiene dieciocho caramelos y coloreé todos esos dieciocho (señala la ilustración que acompaña al problema) y después ya conté todos los demás que le dió a Rita.

Entrevistador: Los que tú coloreaste, ¿son los que se le quedaron a Zayra o los que le dio a Rita?

Camila: Los que le quedaron a Zayra.

Entrevistador: Coloreaste los que le quedaron, ¿y al final?

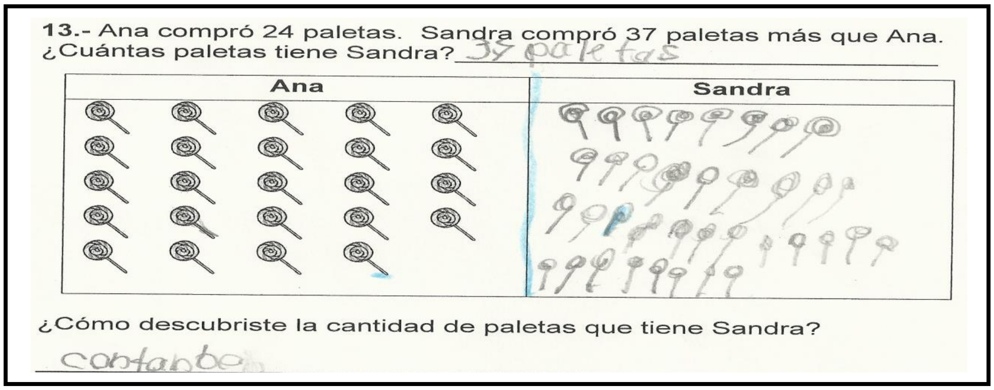
Camila: Este eh, eh, me, son: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (cuenta los dulces de uno en uno, oralmente y los señala con su dedo en el cuestionario; hasta el cuarenta y dos) cuarenta y dos dulces le dió a Rita.

Comentario: Camila utiliza los caramelos de la ilustración que acompaña al problema; colorea los que Zayra le dio a Rita; cuenta los caramelos que se quedaron sin colorear y halla el resultado. Para la mayoría de los niños del grupo fue más sencillo resolver el problema al representarlo con los dibujos de caramelos que utilizar el algoritmo. Esta categoría fue una de las más empleadas por los niños en la resolución de los problemas planteados en el cuestionario, no sólo se empleó para resolver este problema sino que la utilizaron para resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos.

Categoría 4 *“Transcripción de información del enunciado del problema”*

Descripción: En esta categoría se ubica a los niños que identifican información en el enunciado del problema y la transcriben como resultado; en algunos casos elaboran dibujos de la cantidad que transcribieron o completan datos en tablas que acompañan al problema.

Figura 21. Ejemplo de la Categoría 4 de resolución de problemas aditivos



El niño identifica información en el enunciado del problema, la transcribe como resultado y elabora dibujos de la cantidad identificada.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista realizada con Axel sobre la resolución del problema trece.

Diálogo de Axel – Entrevistador. *Problema de igualación con grande desconocido*:

Problema tipo: Igualación con grande desconocido.

Axel. 2° grado, 7 años de edad.

Entrevistador: Sandra compró treinta y siete paletas, más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra?

Axel: Sandra tiene veinte, digo treinta y siete.

Entrevistador: ¿Sí tendrá treinta y siete?

Axel: Mmmm, (nuevamente cuenta las paletas que dibujó) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, *Entrevistador:* (Interrumpe el conteo) Bueno aquí tú si dibujaste treinta y siete, las tiene aquí (señala las paletas que dibujó Axel). Pero el resultado, ¿sí será treinta y siete?

Axel: Mmmm, (pensativo), sí.

Entrevistador: SÍ. ¿Por qué sÍ, será treinta y siete?

Axel: (Inseguro) Porque, porque, este, es treinta y siete. (Seguro) Yo digo que es treinta y siete.

Entrevistador: ¿En qué te diste cuenta para saber qué eran treinta y siete?

Axel: Porque aquí dice (lee el problema), Ana compró 24 paletas y Sandra compró 37 paletas más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra? Treinta y siete paletas.

Entrevistador: Pero dice, más que Ana.

Axel: A ver.

Entrevistador: Treinta y siete paletas, más que Ana (señala parte del enunciado del problema).

Axel: Ahh.

Entrevistador: ¿Si serán treinta y siete las que tiene Sandra?

Axel: Sí.

Entrevistador: Tú te diste cuenta en esto (señala parte del enunciado del problema) ¿verdad?

Axel: Ajá.

Entrevistador: Ahora la pregunta de este problema es ¿cómo descubriste la cantidad de paletas que tiene Sandra?, tú respuesta ¿fue?

Axel: Contando.

Entrevistador: ¿Qué contaste?

Axel: Conté las paletas.

Entrevistador: ¿Cuáles, las de Ana o estas qué dibujaste?

Axel: Conté primero las de Ana y luego las de Sandra.

Comentario: En algunos problemas, para los niños pareciera que la respuesta es transparente y no es necesario sumar o restar para resolverlos; para ellos la respuesta viene implícita en el enunciado del problema; por ello sólo transcriben información del enunciado como si fuera el resultado.

Al igual que sus compañeros, Axel rescata información del enunciado del problema, dibuja el número de paletas que hay en esa información (37 paletas) y lo escribe como resultado; aún después de que el entrevistador lee el problema y señala que Sandra tiene 37 paletas más que Ana, Axel continúa con la postura de que son 37 paletas. Este problema fue uno de los que presentó mayor dificultad en los estudiantes. Dos elementos tienen que ver con esto:

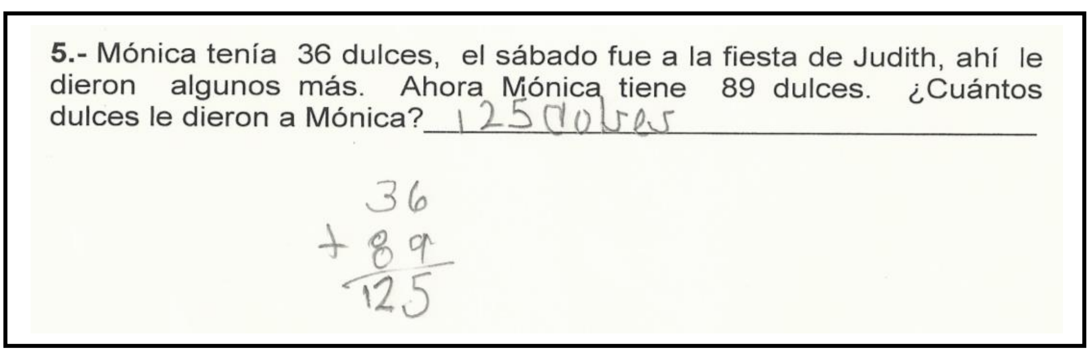
1.- La manera como está redactado el problema es diferente a la forma de los problemas con los que los niños están familiarizados.

2.- Falta comprensión de lo que se pide para resolver el problema.

Categoría 5 *"Uso equivocado del algoritmo"*

Descripción: En esta categoría el niño opera de manera contraria a la requerida para resolver el problema: realiza una suma en vez de una resta, o viceversa. También se ubicó en esta categoría a los niños que realizaron el algoritmo de la suma o la resta de manera no adecuada.

Figura 22. Ejemplo de la Categoría 5 de resolución de problemas aditivos


5.- Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más. Ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica? 125 dulses

36
+ 89
125

El niño identifica cantidades del enunciado del problema, observa la palabra más y piensa que al sumar obtendrá el resultado; realiza una suma en vez de una resta.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista con Rafael sobre la resolución del problema cinco.

Problema tipo: Cambio aumentando con cambio desconocido.

Rafael. 2° grado, 8 años de edad.

Diálogo de Rafael – Entrevistador. *Problema de cambio aumentando con cambio desconocido.*

Rafael: (Interrumpe la lectura). Primero sumé los de acá. (se refiere a los treinta y seis dulces).

Entrevistador: Los que tenía, los treinta y seis; y luego el sábado fue a la fiesta de Judith; ahí le dieron algunos más; pero cuando dice algunos más no sabemos cuántos; ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica?, ¿sí habrán sido ciento veinticinco? (Rafael realizó una suma de 89 + 36 para resolver el problema).

Rafael: (Con la cabeza indica que sí).

Entrevistador: Pero si al final tenía ochenta y nueve.

Rafael: (Pensativo) Porque le quitaron.

Entrevistador: Haz de cuenta que al inicio tenía treinta y seis.

Rafael: Ahh.

Entrevistador: Y ya se fue a la fiesta.

Rafael: Entonces la tengo que volver a resolver.

Entrevistador: Se fue a la fiesta y cuando regresó ya por todos tenía ochenta y nueve. Entonces, ¿sí le habrán dado ciento veinticinco en la fiesta?

Rafael: (Pensativo, dice que sí con la cabeza).

Entrevistador: ¿Y entonces por qué tenía ochenta y nueve al final?

Rafael: Porque le agarraron.

Entrevistador: (Sonríe) ¿Quién le agarró?

Rafael: No sé.

Entrevistador: (Sonríe) No le pudieron haber agarrado.

Rafael: (Sonríe). Sí, o los vendió.

Entrevistador: ¿Cómo que los vendió?

Rafael: Sí.

Entrevistador: ¿Por qué?, ¿aquí no dice que haya vendido?

Rafael: Síiii.

Entrevistador: Sólo dice que tenía treinta y seis antes y cuando regresó a su casa tenía ochenta y nueve. Entonces, ¿sí sería una suma?, ¿sí estará bien?

Rafael: Resta.

Entrevistador: ¿Qué tendrías que restar?

Rafael: Así (pensativo), treinta y seis menos ochenta y nueve.

Entrevistador: Le puedo quitar a treinta y seis dulces, ochenta y nueve.

Rafael: Mmmhh sí.

Entrevistador: ¿A ver, hazla?

Rafael: (La escribe en su cuestionario e inicia a resolverla, se auxilia del conteo con sus dedos).

Entrevistador: (Interrumpe). ¿De qué lado empiezas a restar?

Rafael: (Continúa con la resolución de la suma). Ah, ya sé cual es este resultado.

Entrevistador: Si quieres puedes usar también las fichas Rafael. (saca fichas de colores de una bolsa).

Rafael: Sólo azules (toma fichas azules y las emplea para contar; después de unos minutos) son cincuenta y siete.

Entrevistador: ¿Cómo la resolviste?

Rafael: Así, ocho para llegar a trece y nueve para llegar a dieciséis. (está es la suma que realizó Rafael. Colocó las cantidades invertidas, el 89 como sustraendo y el 36 como minuendo).

$$\boxed{\begin{array}{r} 36 \\ \underline{-89} \\ 57 \end{array}}$$

Entrevistador: ¿De qué lado empezaste?

Rafael: De acá.

Entrevistador: ¿De tu lado derecho o de tu lado izquierdo?

Rafael: Derecho.

Entrevistador: Nueve para llegar al dieciséis y luego ocho para llegar al trece.

Rafael: Ajá.

Entrevistador: ¿Te da cincuenta y siete?

Rafael: Ajá.

Entrevistador: A ver, si tienes treinta y seis pesos, ¿puedes gastarte ochenta y nueve?

Rafael: No.

Entrevistador: Entonces si ella tenía treinta y seis dulces ¿le podías quitar ochenta y nueve?

Rafael: (Pensativo).

Entrevistador: ¿Si estará bien tú resta?

Rafael: Sí.

Entrevistador: ¿Seguro?

Rafael: Seguro, segurisisísimo.

Entrevistador: (Señala la resta que hizo Rafael) ¿Qué cantidad va arriba, la cantidad mayor o la cantidad menor?

Rafael: La cantidad mayor.

Entrevistador: La cantidad mayor; entonces, ¿treinta y seis es mayor que ochenta y nueve?

Rafael: No (empieza borrar). Pero así me da el mismo resultado.

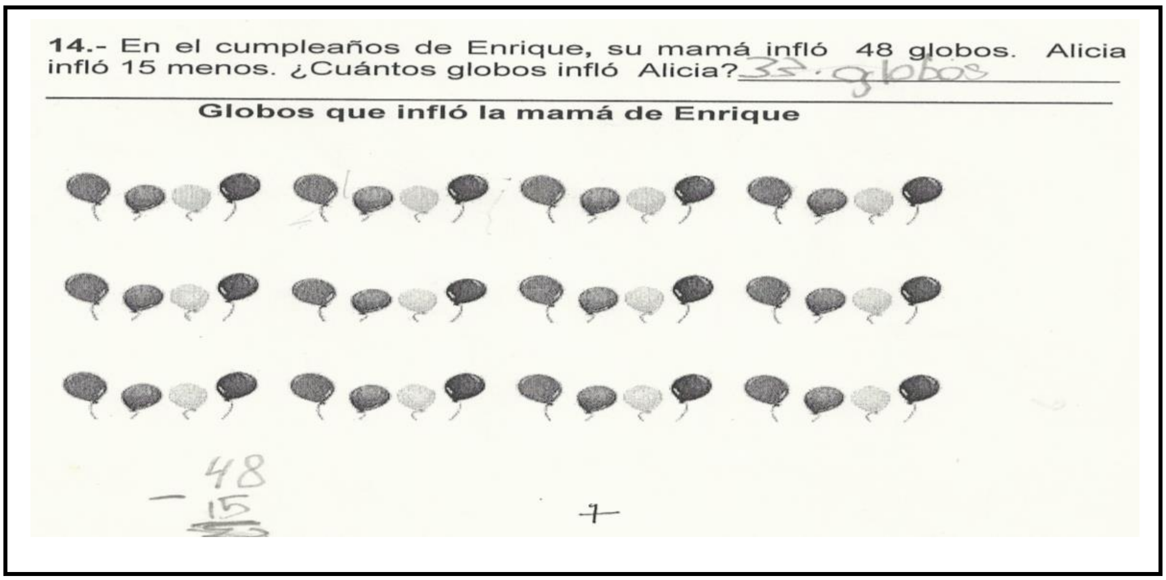
Comentario: Rafael realiza el algoritmo contrario al que debiera ser para dar solución al problema (una suma en vez de una resta); después cambia de opinión y decide hacer una resta 36 – 89 = 57; inicia a restar del lado izquierdo, con la estrategia del *conteo progresivo*; ocho para trece, (cuenta a partir del ocho con sus dedos) cinco y nueve para dieciséis son siete; su resultado es 57.

Consideramos que falta claridad en lo que se pide en el problema; pareciera que los niños sólo identifican las cantidades que aparecen en el enunciado del problema y suman o restan, sin tener claridad de ¿qué es lo que dice el problema?, ¿qué se pide? y ¿cómo se debe resolver? Otro aspecto relevante es que los niños tienen nociones de cómo resolver el algoritmo, pero aún falta sistematizarlas.

Categoría 6 *“Uso adecuado del algoritmo”*

Descripción: En esta categoría el niño resuelve por medio del algoritmo de la suma o resta, de acuerdo con el problema planteado; en el caso de la suma emplea la estrategia de *contar a partir del sumando mayor* ó *contar a partir del segundo sumando* se apoya del conteo con fichas o con los dedos de sus manos; para el algoritmo de la resta primero resta las unidades y después las decenas; utiliza la estrategia de quitar con el apoyo del conteo de fichas o los dedos de sus manos.

Figura 23. Ejemplo de la Categoría 6 de resolución de problemas aditivos



El niño identifica los datos numéricos del problema, suma y resuelve el problema.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista con Axel sobre la resolución del problema catorce.
Problema tipo: Igualación con pequeño desconocido
Axel. 2° grado, 7 años de edad.

Diálogo de Axel – Entrevistador. *Problema de Igualación con pequeño desconocido*

Entrevistador: Ahí ¿cómo supiste qué eran treinta y tres globos?
Axel: Porque primero, primero leí la pregunta: que su mamá infló cuarenta y ocho globos y Alicia infló quince menos, ¿cuántos globos infló Alicia? Treinta y tres globos.
Entrevistador: Y aquí hiciste una resta, (señala la resta de Abel para resolver el problema: 48 – 15 = 33); a cuarenta y ocho le quitaste quince.
Axel: Mmmmhh.
Entrevistador: Cuarenta y ocho globos ¿qué cantidad fue?
Axel: A cuarenta y ocho le quité…
Entrevistador: Cuarenta y ocho, de ¿dónde lo sacaste?
Axel: Cuarenta y ocho lo saqué de, de su mamá. Su mamá infló cuarenta y ocho globos.
Entrevistador: Son los que infló la mamá de Enrique.
Axel: Esos fueron los que infló Sandra, los que infló esta Alicia (señala la resta).
Entrevistador: ¿Alicia, cuántos infló?
Axel: Quince.
Entrevistador: Quince menos.
Axel: Ah, quince menos; y a ocho le voy a quitar cinco.
Entrevistador: ¿Cuánto te queda?
Axel: Cinco, me quedan tres.
Entrevistador: Tres, ajá, muy bien ¿y luego?
Axel: Y a cuatro le quito uno, me quedan igual tres. Entonces treinta y tres.
Entrevistador: ¿Treinta y tres globos? ¿Cuántos globos infló Alicia?
Axel: Treinta y tres.

Comentario: Axel lee el problema, identifica lo que se le pide, y resta con la estrategia de quitar, 48 – 15; inicia con las unidades a 8 le quita 5, quedan 3 y a 4 le quita 1, también quedan 3.

La operación que se requiere en el problema para solucionarlo es una sustracción, sin transformación; las cantidades que se emplean en los problemas son una variable para la dificultad que implica resolver dichos problemas. Para los niños realizar una resta sin transformación representa menor complejidad que las restas donde sí hay transformación.

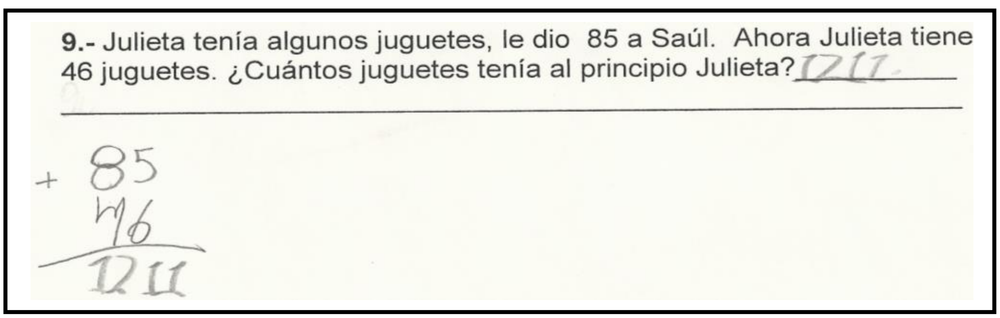
Categoría 7 *“Uso del algoritmo incompleto”*

Descripción: En esta categoría el niño resuelve el problema con una suma; inicia a sumar del lado izquierdo; escribe las cantidades de decenas y unidades completas, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 85 \\ \underline{+46} \\ 1211 \end{array}$$

Primero suma las decenas, (cuenta a partir del segundo sumando, o a partir del sumando mayor) 8 + 4 = 12, anota el número 12 completo; después 6 + 5 = 11; también coloca el número completo.

Figura 24. Ejemplo de la Categoría 7 de resolución de problemas aditivos


9.- Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta? 1211

+ 85
46
1211

El niño identifica los datos numéricos del problema, suma y resuelve; representa el resultado con las cantidades completas de unidades y decenas; deja de lado el principio del SND de valor posicional.

A continuación se muestra un fragmento de la entrevista con Aldo sobre la resolución del problema nueve.

Problema tipo: Cambio disminuyendo con inicio desconocido.

Aldo. 2° grado, 7 años de edad.

Diálogo de Aldo – Entrevistador. *Problema de Cambio disminuyendo, inicio desconocido.*

Entrevistador: Ahí ¿qué hiciste para resolver el problema?
Aldo: Una suma.
Entrevistador: Bien, sumaste ochenta y cinco más cuarenta y seis, (señala la operación que resolvió Aldo en su cuestionario).
Aldo: Ajá.
Entrevistador: ¿Cómo haces tú, las sumas?
Aldo: Mmmmm, contando las fichas.
Entrevistador: ¿Nos puedes enseñar cómo resolviste esta suma? (señala la suma que realizó Aldo para resolver el problema).
Aldo: Sí.
Entrevistador: Sí, mira aquí están las fichas (saca las fichas de una bolsa y se las da a Aldo), ¿cuál número sumas primero?
Aldo: El, ocho.
Entrevistador: ¿Ocho, más que otro número?
Aldo: Más el cuatro.
Entrevistador: Vamos, a ver, entonces.
Aldo: (Cuenta las fichas), trece, este… (pensativo), mmmm, doce.
Entrevistador: ¿Trece?, a ver, ¿quieres ir contando en voz alta para que no te confundas? ¿Cómo le hiciste?
Aldo: (Cuenta oralmente de uno en uno y va pasando las fichas). Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce. Doce.
Entrevistador: ¿Aquí tienes las ocho, verdad? (señala un conjunto de fichas), y aquí ¿cuántas deberías de tener? (señala otro conjunto de fichas).
Aldo: Cuatro.
Entrevistador: Cuatro, ajá, y luego juntas todas o ¿cómo le haces?
Aldo: Mmmm, ya no me acuerdo.
Entrevistador: Al último ¿qué hiciste?
Aldo: Mmmmm, (pensativo).

Entrevistador: Primero pusiste las ocho.

Aldo: Mmmmmhhh.

Entrevistador: Luego pones cuatro, y ya qué pusiste las ocho y luego las cuatro, ¿qué haces?

Aldo: Mmmm, ya le pongo el resultado.

Entrevistador: Y ¿cuál fue el resultado?

Aldo: Doce.

Entrevistador: Bien, ahora el siguiente número; es el cinco, más seis; ahí ¿cómo hiciste?

Aldo: Igual contando.

Entrevistador: ¿Igual contando? ¿Quieres contar?

Aldo: Sí, (cuenta oralmente de uno en uno y va pasando las fichas), uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. Once.

Entrevistador: De acuerdo. ¿Cuándo tú haces otra suma, siempre empiezas del lado izquierdo, de este lado? (señala en la operación que realizo Aldo, el lado izquierdo).

Aldo: Sí

Entrevistador: ¿Sí? y ¿anotas los números completos? ¿cómo acá? (señala el resultado de la suma)

Aldo: Ajá.

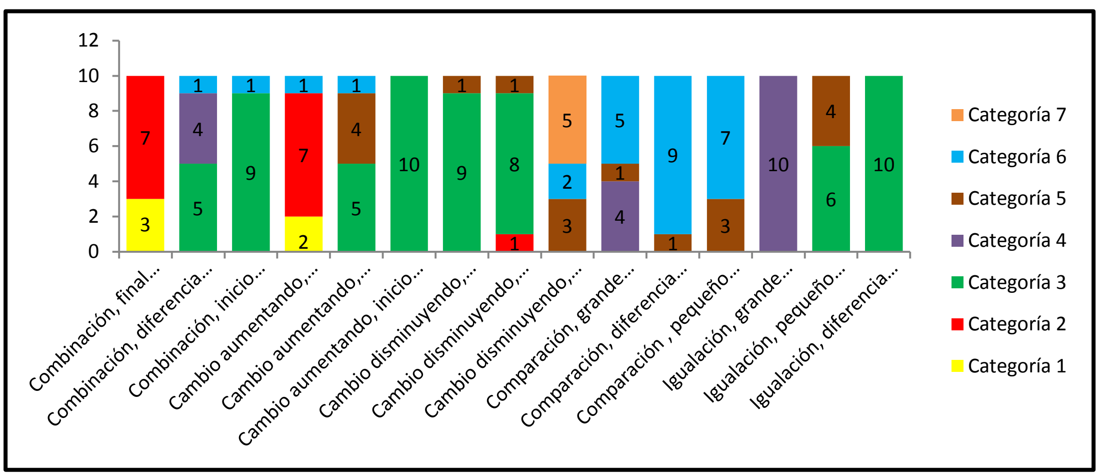
Comentario: Aldo identifica los datos numéricos del problema, suma y resuelve con apoyo de fichas; representa el resultado con las cantidades completas de unidades y decenas. No considera el principio de valor posicional del SND. En esta categoría se considera el algoritmo de la suma: los niños al sumar las unidades escriben la cantidad completa; lo mismo ocurre con las decenas. De acuerdo con los resultados de los problemas, observamos que para los niños las sumas con transformación son más complejas que las sumas sin transformación.

La resolución de problemas va acompañada de la representación del SND; son contenidos matemáticos que se entrelazan y el desarrollo de su proceso avanza paulatinamente en ambos. La adquisición de las reglas formales del SND es un soporte para el manejo del algoritmo; de acuerdo con los resultados del cuestionario de problemas de estructura aditiva, una de las dificultades que se presenta en los niños es la resolución de los algoritmos de la suma y la resta con transformación; al haber cambios de unidades a decenas se confunden en la colocación de los números. Se reflexionó acerca de la importancia que tiene la adquisición de las reglas formales del SND y su repercusión en el uso del algoritmo, que a su vez es una herramienta para la resolución de problemas de estructura aditiva de manera más abstracta y eficiente.

6.8 Frecuencia del uso de las estrategias de acuerdo con el tipo y subtipo de problemas

En esta parte del estudio mostramos la distribución de las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de cada uno de los tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva del modelo matemático funcional. A continuación se muestra una tabla con información de los tipos y subtipos de problemas que los niños resolvieron y las estrategias que emplearon para solucionarlos.

Figura 25. Estrategias que utilizaron los niños en la resolución de problemas aditivos



Las categorías son:

1.- Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656).

2.- Cuenta todo.

3.- Estrategia de complemento.

4.- Transcripción de información del enunciado del problema.

5.- Uso equivocado del algoritmo.

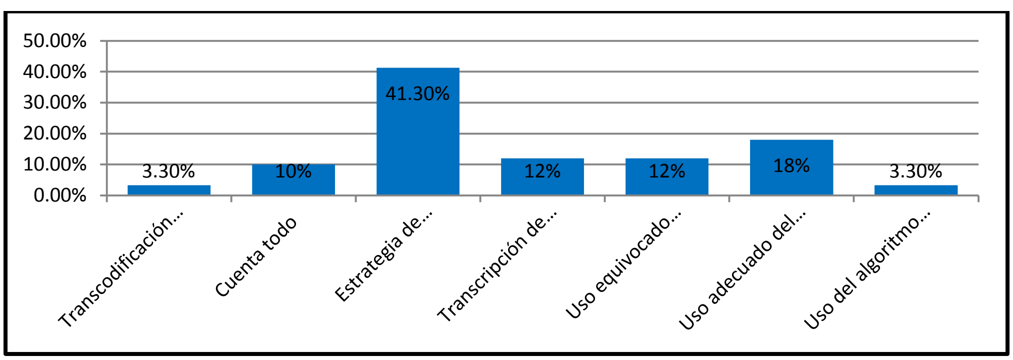
6.- Uso adecuado del algoritmo.

7.- Uso del algoritmo incompleto.

Al analizar los datos de la gráfica, se observó que hubo categorías que se presentaron en la resolución de dos o más problemas, consideramos que eran las estrategias con las que los niños estaban más familiarizados. También hubo categorías que tuvieron presencia en un sólo tipo y subtipo de problemas. Por ejemplo la categoría *Uso del algoritmo incompleto,* sólo estuvo presente en el problema de *cambio disminuyendo con comienzo desconocido*; quizás era una estrategia que por la edad de los niños y de acuerdo con su proceso cognitivo pronto desaparecería.

La siguiente gráfica presenta el porcentaje de las estrategias empleadas para la resolución de los diferentes problemas de estructura aditiva. Diez niños contestaron el cuestionario y resolvieron quince problemas, con un total de quince respuestas, que se integraron en siete categorías.

Figura 26. Porcentajes de las categorías de respuesta en la resolución de problemas de estructura aditiva



De acuerdo con los porcentajes que se muestran en la tabla, la estrategia que más utilizaron los niños en la resolución de los problemas de estructura aditiva fue la del *Complemento*, que se presentó en 62 respuestas (41. 3 %). Esta estrategia fue privilegiada por los niños, para resolver ocho diferentes tipos y subtipos de problemas (véase la Figura 25). Ahora, ¿por qué la estrategia del complemento fue la más utilizada por los niños? Consideramos se debe a que:

1.- En esta categoría se añaden o se quitan objetos para llegar a una cantidad deseada, sin desarrollar el algoritmo de la sustracción de manera convencional.

2.- El niño cuenta oralmente los objetos o dibujos de uno en uno.

3.- El niño se encuentra más familiarizado con esta estrategia.

Por la edad (6 y 7 años) de los niños, el uso de esta estrategia es normal. Los niños recurren como una de las primeras estrategias para resolver problemas a la representación del problema y conteo con los dedos de sus manos, con fichas, dibujos u otros objetos; sin embargo una limitación de la estrategia es que en problemas con cantidades mayores resultaría poco eficiente.

La segunda categoría de mayor porcentaje fue el *Uso adecuado del algoritmo,* empleada 27 veces (18%); a diferencia de la categoría más utilizada, en ésta el uso del algoritmo fue de manera convencional.

Dos categorías con el mismo porcentaje (12%) fueron: *Uso equivocado del algoritmo* y *Transcripción de información del enunciado del problema.* En el caso de la primera categoría, el algoritmo se utilizó de forma inadecuada; tal vez los estudiantes que se ubicaron en esta categoría se iniciaban en el uso del algoritmo; por ejemplo para resolver el problema de *cambio disminuyendo con final desconocido* por medio de la resta 54 – 26. Uno de los niños resolvió así: seis para catorce, contó con los dedos a partir del siete (cada vez que mencionaba un número extendía un dedo); siete, ocho…catorce; después contó los dedos extendidos, son ocho. Para las decenas, el niño dijo: dos para cinco; tres, cuatro y cinco, son tres. Su resultado fue 38, al restar las decenas no consideró la decena que antes había utilizado para restar las unidades. También es probable que los niños no hayan comprendido el problema, sólo rescataron las cantidades del enunciado y trabajaron con el algoritmo inverso al solicitado. La estrategia de *Transcripción de información del enunciado del problema,* igual fue un indicador de que el niño no había entendido el problema.

Las dos categorías con menor porcentaje fueron: *Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656)* y *Uso del algoritmo incompleto* (3. 3% en ambas categorías), se considera que estas categorías para la tercera etapa del estudio ya no estarán presentes. En la primera el alumno no consideró el valor posicional y en la segunda al realizar el algoritmo de la suma, no tenía claro cómo anotar el resultado de los sumandos.

A partir de los porcentajes obtenidos se reflexionó acerca de lo que implicaba el uso de cada una de esas estrategias, y cómo se tendría que diseñar una intervención para dar el paso del uso de estrategias donde no se tenían consolidadas las reglas formales del SND y la realización del algoritmo convencional; elementos que contribuyen a la economía y eficiencia en la resolución de los problemas aditivos.

6.9 Dificultad en la resolución de los problemas de estructura aditiva

En esta parte del estudio presentamos las variables que intervinieron para que un problema generara mayor o menor dificultad en su resolución. También analizamos los problemas que presentaron mayor, mediana y menor dificultad.

Las variables que intervinieron para que un problema fuera más difícil que otro fueron:

1) *La estructura semántica del problema*. De acuerdo con Bermejo (2004), los problemas de cambio serían los más sencillos seguidos de los de combinación, los de igualación y los de comparación.

2) *El lugar de la incógnita*. Según el mismo autor, los problemas que tienen la incógnita al final son los más fáciles, seguidos de los que la tienen en el segundo sumando, diferencia o transformación y los más difíciles de resolver son los que la tienen al inicio.
3) *El tamaño de los números*. De acuerdo con Vergnaud (2010), los números grandes propician mayor dificultad que los pequeños y los decimales implican mayor dificultad que los enteros, a excepción de composiciones de números pequeños u operaciones mentales simples; por ejemplo: 444 – 222, 123 + 321, etc. Por la edad de los niños, en todos los problemas se manejaron cantidades discretas. Los números empleados en el planteamiento de problemas fueron cifras formadas por unidades y decenas o unidades, decenas y centenas.
4) *La presentación del problema*. En la presentación de los problemas planteados se trató de diseñarlos de manera que el niño reconociera que tenía la información necesaria y suficiente para resolver el problema.

Los problemas que presentaron menor dificultad fueron: el *problema de combinación con final desconocido* y el *problema de cambio aumentando con resultado desconocido*; en ambos la incógnita se encuentra al final y se resuelven con una adición. Los niños que participaron en el estudio para resolver los dos problemas utilizaron las estrategias de *Cuenta todo* y la *Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656);* los resultados fueron correctos en la mayoría de los participantes.

Los problemas que presentaron mediana dificultad fueron: *Problema de combinación con diferencia desconocida,* el problema planteado fue, *En un juego de canicas, Gabriel gana 27canicas y Mario gana varias. Los dos juntos tienen 89 canicas. ¿Cuántas canicas son de Mario?* La incógnita se encuentra en la diferencia, los números son relativamente pequeños, el problema fue acompañado de una tabla para completar los datos faltantes.

Según Vegnaud (2010), esta clase de problemas se resuelve normalmente por una *sustracción*, pero también se puede resolver por medio del procedimiento llamado de *complemento*, a condición de que los números que intervengan se presten a dicho procedimiento. Los niños resolvieron el problema con las estrategias de: *complemento, uso adecuado del algoritmo* y *transcripción de información del enunciado del problema.* Las dos primeras estrategias condujeron a la solución correcta del problema; la tercera muestra que algunos niños no comprendieron el problema, transcribieron datos del enunciado de éste pero no lo resolvieron.

Otro problema de mediana dificultad fue el de *comparación con grande desconocido*. El problema planteado fue: *Al final de un juego de canicas Jorge tiene 33 canicas y Miguel tiene 58 canicas más que Jorge. ¿Cuántas canicas tiene Miguel?* La incógnita se encuentra al final del problema, las cantidades son relativamente pequeñas; el enunciado del problema es acompañado de una tabla y los niños deben completar la información para hallar el resultado.

De acuerdo con la clasificación que utiliza Bermejo (2004), de problemas aditivos, este problema correspondería a los de *comparación con comparación desconocida*, y las estrategias para resolverlo son: *contar a partir de uno de los sumandos*, *contar hacia atrás* o *contar a partir de uno de los sumandos* y *memorísticas.* Una estrategia más elaborada y abstracta sería una suma de manera convencional.

Las estrategias que emplearon los niños para resolver fueron: *transcripción de información del enunciado del problema, uso equivocado del algoritmo (resta),* y *uso adecuado del algoritmo* (suma). Los niños que emplearon la estrategia de *transcripción de información del enunciado del problema* no comprendieron el problema; por lo tanto sólo copiaron datos del enunciado del problema pero no lo resolvieron; los que trabajaron con el *uso equivocado del algoritmo* (resta) tampoco tenían la claridad de lo que se pedía en el problema; los demás niños

(50%) usaron la estrategia del uso adecuado del algoritmo; sus respuestas fueron correctas.

Los problemas que presentaron mayor dificultad fueron: *Cambio disminuyendo con inicio desconocido*. El problema planteado a los niños fue: *Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta?* La incógnita se encuentra al inicio del problema, las cantidades son con decenas; el problema se presenta como tal (sólo el enunciado).

De acuerdo con Maza (1999), este problema consiste en el cambio experimentado por la cantidad inicial; implica su disminución hasta conseguir la cantidad final; otra opción para resolver este tipo de problema sería a una cantidad inicial añadir hasta conseguir una cantidad deseada; si se emplea el algoritmo sería una sustracción.

Para resolver el problema los niños emplearon las estrategias de: *Uso del algoritmo incompleto, Uso equivocado del algoritmo* y *Uso adecuado del algoritmo.* En la primera estrategia los niños sumaron 85 más 46, pero en el resultado anotaron las cantidades completas de los dígitos sumados.

$$\begin{array}{r} 8\ 5 \\ +\underline{4\ 6} \\ 12\ 11 \end{array}$$

La segunda estrategia que emplearon fue el *Uso equivocado del algoritmo*; registraron y representaron el primer y segundo sumando con números, pero al resolver la suma no había congruencia. Por ejemplo: 85 + 46 = 60. De acuerdo con los resultados en este tipo y subtipo de problema, hay dificultad en los niños de este grupo para resolver las sumas que implican una transformación o un cambio de unidades a decenas.

Otro problema que causó mayor dificultad fue el de: *igualación, grande desconocido.* El problema planteado a los niños fue: *Ana compró 24 paletas, Sandra compró 37 paletas más que Ana, ¿cuántas paletas tiene Sandra?* La incógnita está al final del problema y las cantidades utilizadas son pequeñas. El problema es acompañado de una tabla en la que se representan con dibujos las paletas de Sandra; a partir de ello se invita a resolver el problema con la elaboración de dibujos de las paletas de Sandra.

Por otro lado, este problema consiste en responder a la pregunta: ¿cuánto se ha de añadir a la cantidad menor para alcanzar la mayor o, al revés, cuánto se ha de disminuir la cantidad mayor para igualarla con la menor? La respuesta de todos los niños fue 37 paletas; leyeron la información del problema y se quedaron con la frase: *Sandra compró 37 paletas*, omitieron el resto de la información; quizás dentro de la resolución de problemas a que ellos están habituados, este tipo de problema no se encuentra.

De acuerdo con este análisis se reflexionó en la influencia del hecho de que los niños estén familiarizados con un número reducido de tipos y subtipos de problemas; la manera de proceder también es relevante; a veces pareciera que sólo identifican cantidades y suman o restan sin comprender realmente lo que dice el problema y lo que en él se pide.

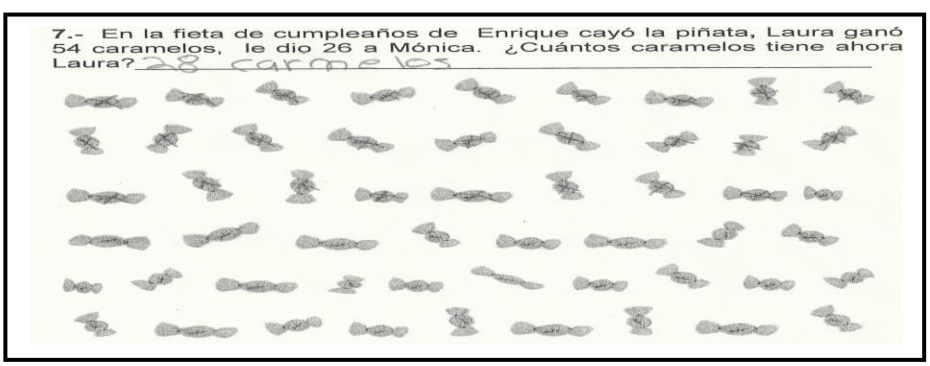
Por otro lado, la adquisición de las reglas formales del SND son necesarias para la aplicación de los algoritmos convencionales, en este caso de la suma y la resta. La aplicación de la suma y la resta en la resolución de diferentes problemas aditivos propicia mayor eficiencia en su solución y también forma parte de las bases para conocimientos de contenidos matemáticos posteriores.

6.10 La teoría de los campos conceptuales en la resolución de problemas aditivos

La *conceptualización* de la resolución de problemas de estructura aditiva, se analizó a partir de las resoluciones escritas por los alumnos y de las argumentaciones que dieron para emplear determinado procedimiento. No es posible tener acceso directo a la parte no observable de la actividad; sin embargo, el *esquema* aunque no es una conducta, tiene la función de generar la *actividad* y la conducta en *situación.*

Por otro lado, la *conceptualización* a partir de las *situaciones* y de los problemas que se resuelven, adquiere sentido para el sujeto; es relevante subrayar que los *conceptos* no toman su significación de una sola clase de *situaciones*, ni una *situación* se analiza con la ayuda de un solo *concepto*. Por ejemplo, en la *resolución de problemas de estructura aditiva,* los *conceptos* de adición, sustracción o problema se comprenden a partir de una diversidad de problemas aditivos que tienen relaciones y propiedades, variables según las *situaciones* a tratar. Algunas de estas relaciones se comprenden pronto, y otras más tarde en el transcurso del aprendizaje. Por ejemplo para resolver los problemas de estructura aditiva con incógnita al final, los niños tuvieron mayor éxito. A continuación se muestra la resolución del problema tipo *cambio disminuyendo* y subtipo *final desconocido.*

Figura 27. Resolución de un problema donde las situaciones se comprendieron pronto

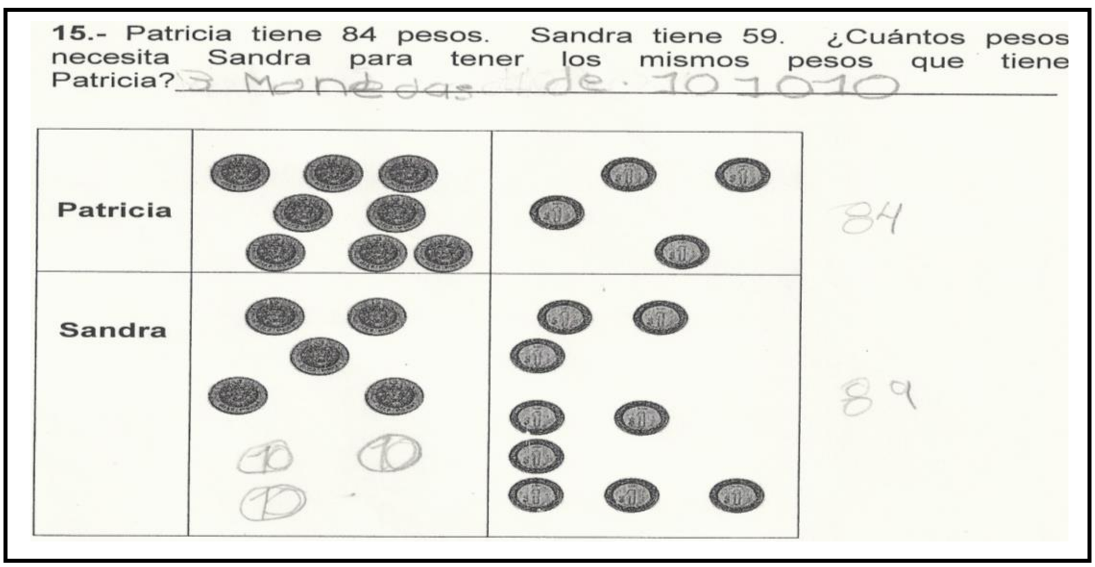


En este problema, el niño ya disponía de las competencias necesarias para resolver el problema; por ello fue más sencillo de resolver.

De acuerdo con Vergnaud (1990), hay clases de situaciones para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.

Por otro lado la resolución de algunos problemas de estructura aditiva causaron alta dificultad; por ejemplo: el de tipo *igualación* y subtipo *pequeño desconocido.*

Figura 28. Resolución de un problema donde las situaciones no se comprendieron en su totalidad



Para resolver este problema el niño sólo tomó en cuenta las monedas de a diez (decenas) y dejó de lado las monedas de a peso (unidades). De acuerdo con Vergnaud (1990), en este problema están implícitas situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas tentativas, y le puede conducir eventualmente al éxito, o al fracaso.

Siguiendo con Vergnaud, la conceptualización y el dominio de un campo conceptual, es un proceso largo; la elaboración pragmática de un *concepto,* como puede ser el de problema de estructura aditiva, se construye en solidaridad con otros conceptos; por ejemplo, el de suma, resta, resolución de problema, ó SND; es decir, se construye como parte de un sistema, y como tal, no es posible estudiar su desarrollo de manera aislada.

Los problemas que resolvieron los alumnos fueron resueltos de acuerdo con las situaciones inmersas en el mismo problema y las situaciones especificas de cada uno de los niños.

6.11 Sistema de representación externa en la resolución de problemas aditivos

En esta parte del estudio se analiza cómo, por medio de representaciones externas, los niños resolvieron problemas de *estructura aditiva*. El término que empleamos de representación externa es el utilizado por Goldin (1998); en él se incluyen representaciones producidas con lápiz y papel o representaciones construidas con materiales concretos (fichas y monedas). De acuerdo con las representaciones externas empleadas por los niños para resolver los problemas se integraron tres categorías:
1.- Representación externa del problema con apoyo de objetos.
2.- Representación externa del problema con apoyo de gráficos
3.- Representación externa del problema de manera simbólica, a continuación se describen y se ejemplifican de manera individual cada una de las categorías.

Categoría 1 *"Representación externa del problema con apoyo de objetos"*
Descripción: En esta categoría el niño representa con fichas la resolución del problema. Si es una adición representa los dos sumandos con fichas y después cuenta todas. Si es una sustracción representa el minuendo con fichas, separa las

fichas que representan el sustraendo y cuenta las fichas que quedaron. También utiliza el conteo con los dedos de sus manos. Por ejemplo, para resolver el siguiente problema: En un juego de canicas, Gabriel gana 27canicas y Mario gana varias, los dos juntos tienen 89 canicas, ¿cuántas canicas son de Mario? (*tipo combinación con diferencia desconocida*).

Figura 29. Representación externa del problema con fichas

El alumno representó con fichas el número 89, contó oralmente de uno en uno hasta completar 89, después retiró 27 fichas y volvió a contar las que quedaron.

Categoría 2 *"Representación externa del problema con apoyo de gráficos"*

Descripción: En esta categoría el niño representa el problema con dibujos o marcas. Por ejemplo, para resolver el siguiente problema: En la fiesta de cumpleaños de Enrique cayó la piñata, Laura ganó 54 caramelos, le dio 26 a Mónica, ¿cuántos caramelos tiene ahora Laura? (tipo *cambio disminuyendo, resultado desconocido*).

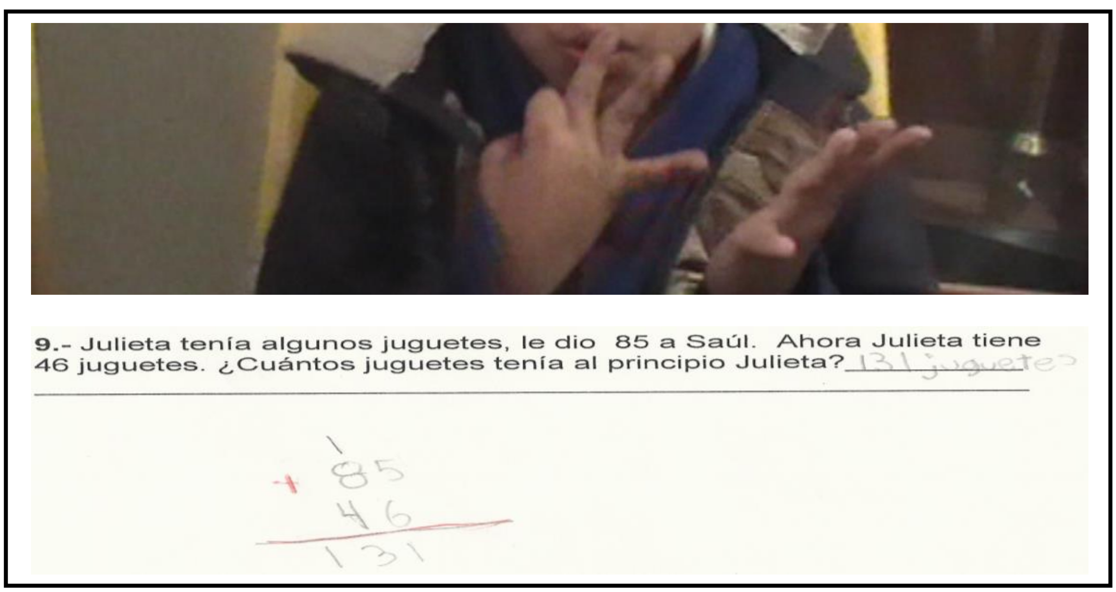
Figura 30. Representación externa del problema con apoyo de gráficos

El niño iluminó 26 caramelos, los demás los contó (cada vez que contaba un dulce le colocaba un tache) y escribió el resultado con número.

Categoría 3 *“Representación externa del problema de manera simbólica”*

Descripción: En esta categoría el niño recurre al algoritmo convencional de la suma o la resta para resolver el problema. Por ejemplo para resolver un problema de tipo *cambio disminuyendo, comienzo desconocido*. El problema fue: *Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl, ahora Julieta tiene 46 juguetes, ¿cuántos juguetes tenía al principio Julieta?*; para resolverlo, el niño hace el algoritmo de la suma de manera convencional, primero suma las unidades y después las decenas; al contar se apoya con los dedos de sus manos, y cuenta a partir del segundo sumando.

Figura 31. Representación del algoritmo de la suma, apoyándose del conteo de sus dedos



El niño se representa internamente el número seis y agrega cinco representándolos con sus dedos; lo mismo hace para los sumandos de las decenas. De acuerdo con Brizuela y Cayton (2010), la cognición del niño cambia mientras interactúa con sistemas externos de representación, en este caso los dedos de sus manos; aquí hay una interacción constante entre la representación (el conteo de sus dedos y el número que éstos representan) y lo representado (el número 8).

El proceso de la representación interna y externa del problema permite a los niños encontrar una forma de representar las cantidades inmersas en un problema e iniciar con la resolución del mismo. En esta etapa del estudio la representación externa de los problemas aditivos en la mayoría de los casos fue con el uso de fichas, monedas o dibujos; en un menor porcentaje se trabajó con los algoritmos convencionales de la suma y la resta; aún al resolver los problemas con el algoritmo, los niños se auxiliaron del conteo con los dedos de sus manos para resolver dicho algoritmo.

6. 12 Conclusiones de la primera etapa del estudio

A partir de los resultados de la primera etapa del estudio, se concluye que los niños elaboran ideas intuitivas del Sistema de Numeración Decimal Indo-Arábigo (SND), a pesar de que no se han apropiado aún de las reglas (formales). Los niños presentaron tres ideas intuitivas: *1. Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número. 2. Los niños manejan en primer lugar los nudos -es decir las decenas, centenas, unidades de mil…, exactas- y sólo después escriben los números que se ubican en los intervalos entre nudos. 3. Los niños escriben los números tal cual los escuchan.*

Las nociones intuitivas elaboradas por los niños surgieron a partir de las ideas matemáticas exploradas en el cuestionario inicial sobre escritura numérica. Éstas se evidenciaron en la escritura de números con centenas. Los niños conocían los números del 0 al 100; por ejemplo: para escribir 105, escribían el número 100 seguido del 5 (1005); pues el lugar del 0 en su edad (6-8 años) está en proceso de elaboración.

Es pertinente mencionar que estas ideas intuitivas, a veces son poco exploradas en el ámbito escolar y en algunas ocasiones el proceso de adquisición de las reglas formales de los estudiantes, es considerado como construcciones *equivocadas*. En algunos casos los docentes creen que las ideas intuitivas son erróneas; pues quisieran ver las reglas formales en los niños de manera estructurada y no como un proceso de construcción que los niños elaboran de las ideas intuitivas a las reglas formales. Además en ocasiones los docentes no consideran que la construcción de ese conocimiento sea un proceso largo, que inicia en preescolar, continua en el primer grado de primaria y se consolida con los números enteros cuando los niños han aprendido las cuatro operaciones básicas, más o menos en cuarto o quinto grado de primaria. A pesar de que ese contenido continua en los siguientes grados con otros campos numéricos como los números, fraccionarios, racionales, entre otros.

Conclusiones sobre los problemas de estructura aditiva

En lo que se refiere a la resolución de problemas de estructura aditiva, la mayoría de los niños recurrió a la *estrategia del complemento* para resolver los tipos y subtipos de problemas de: *combinación con diferencia e inicio desconocido, cambio aumentando con cambio e inicio desconocido, cambio disminuyendo con final y cambio desconocido, igualación con diferencia y pequeño desconocido.* Consideramos que los niños eligieron esa estrategia porque probablemente es la que más utilizaban en clases; con ella resolvían los problemas al añadir o quitar objetos sin necesidad de realizar los algoritmos convencionales de la suma y la resta; además contaban objetos o dibujos de uno en uno.

Otras estrategias utilizadas para resolver algunos problemas fueron: *transcripción de información del enunciado del problema* o el *uso equivocado del algoritmo.* Con la primera estrategia los niños sólo transcribieron información sin que hubiera una comprensión real del problema. Con la segunda estrategia tampoco se comprendió el problema; los niños elaboraron una suma o una resta contraria a la operación que correspondía a la solución, es decir no tenían claro qué se solicitaba en el problema.

En los problemas de tipo *combinación con diferencia desconocida, comparación con grande desconocido, cambio disminuyendo con inicio desconocido* e *igualación, grande desconocido;* los niños tuvieron dificultad para resolverlos. Tal vez esa dificultad se derivó de la poca familiaridad de la resolución de esos tipos de problemas o la manera en qué estuvieron planteados.

En lo que concierne a la práctica docente, es importante que el maestro conozca los tipos y subtipos de problemas aditivos; así como las estrategias con las que cada tipo de problema se resuelve, para que pueda instruir a sus alumnos en los problemas aditivos, desde los más simples hasta los más complejos considerando la estructura sintáctica y semántica.

En lo que se refiere a la representación que los niños elaboran para la resolución de problemas aditivos, podría ser favorecida, sí trabajan varios tipos y subtipos de problemas y resuelven un mismo problema de diferentes maneras. El niño adquiere flexibilidad mental para resolver diversos tipos de problemas de distintas maneras y con ello se contribuiría a la apropiación del campo conceptual aditivo que, de acuerdo con Vergnaud (1990), es un proceso largo que se adquiere a través de las experiencias, situaciones y contextos diversificados.

Por otro lado, un elemento relevante en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas aditivos es que como docente se conozca las estructuras del lenguaje matemático en el sentido sintáctico (por ejemplo: en el salón hay 100 dulces y 37 niños, ¿cuántos dulces hay más que niños?; los niños presentan mayor dificultad ante esa pregunta que si se cambia el problema de la siguiente manera: la maestra Sofía llevó 100 dulces al salón y regaló uno a cada niño, ¿cuántas dulces le sobraron?) y semántico (por ejemplo: Ernesto tiene 28 canicas amarillas y 29 rojas, ¿cuántas canicas tiene en total?, los niños presentarían menor dificultad ante este problema que si se les presenta el siguiente: Ernesto tiene algunas canicas amarillas y 29 rojas, en total tiene 57, ¿cuántas canicas amarillas tiene?), de los problemas planteados a los estudiantes. También es fundamental que el docente conozca la enseñanza de los algoritmos de la suma y la resta en sus diversas presentaciones: método expandido, extendido, abreviado, estándar o tradicional; con ello identificará cuál es la presentación de algoritmo más cercana a sus estudiantes y los apoyará en el transitar del conocimiento intuitivo al conocimiento formal de una manera menos abrupta.

Los retos para la siguiente etapa fueron que los niños resolvieran problemas aditivos de manera satisfactoria, principalmente los que habían presentado más dificultad; poner en juego la comprensión, la reflexión, el razonamiento, y la argumentación del por qué resolvían con uno u otro procedimiento. De manera que los mismos niños participaran activamente en la construcción de su propio conocimiento.

La tarea como investigadora fue diseñar las actividades de la secuencia didáctica con recuperación de elementos como: características de los niños con quiénes se trabajaría la secuencia, conocimiento sobre los problemas aditivos, organización de las actividades, indagación y recopilación de los materiales que eran factibles emplear, organización de los tiempos y objetivos que se esperaban de cada actividad. En el desarrollo de dichas actividades, los niños construirían su propio conocimiento con la orientación, e intervención oportuna de la aplicadora.

VII. RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA DEL ESTUDIO: SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se describen los resultados de la segunda etapa del estudio, que corresponden a la secuencia didáctica. Se realizaron las actividades diseñadas para trabajar la resolución de problemas de estructura aditiva y el SND, a partir de los datos obtenidos en la primera etapa del estudio. La secuencia didáctica fue diseñada tomando en cuenta las habilidades y dificultades que los estudiantes encontraron en la primera etapa del estudio (cuestionarios iniciales de escritura numérica y problemas de estructura aditiva de acuerdo con el modelo matemático: funcional).

Los niños con los que se trabajó la secuencia didáctica fueron los mismos que participaron en la primera etapa del estudio. Al aplicar el cuestionario de diagnóstico los niños cursaban el primer grado; en la aplicación de la secuencia didáctica y el cuestionario final estaban en segundo grado. También es pertinente mencionar que en la primera etapa participaron diez estudiantes, en las siguientes etapas por cuestiones de horarios tres de ellos ya no participaron; pues las actividades fueron después de clases normales para evitar que se atrasaran en sus trabajos escolares.

7.1 Descripción de la secuencia didáctica

A partir de los datos obtenidos de la primera etapa de estudio, se diseñaron actividades enfocadas a trabajar la resolución de problemas de estructura aditiva y fortalecer la adquisición de las reglas del SND en los niños de segundo grado de primaria. Se trabajaron actividades para la resolución de problemas de estructura aditiva, se dio énfasis a trabajar los problemas que causaron mediana *(combinación con diferencia desconocida e igualación diferencia desconocida)* y alta (*cambio disminuyendo, inicio desconocido e* igualación, grande desconocido) complejidad para los niños en la primera etapa. También se trabajaron aspectos como: conteo de unidades, agrupamiento y desagrupamiento de decenas y centenas.

En las actividades de la secuencia didáctica estuvieron implícitos tres elementos que retomamos de Kamii (1996): razonamiento matemático aplicado a la vida cotidiana; juegos en grupo y debates sobre la resolución de los problemas.

Razonamiento matemático aplicado a la vida cotidiana: los niños se interesan por lo que ocurre en la vida real, incluso elaboran sus primeros conceptos numéricos desde la experiencia adquirida en su vida diaria; por ello retomamos situaciones de ese tipo para contribuir a la adquisición de conocimientos sobre el SND y la resolución de problemas de estructura aditiva.

Juegos en grupo: se toma al juego como una herramienta por medio de la cual los niños se divierten y aprenden al mismo tiempo; además, en un juego también se brinda la oportunidad de pensar y reflexionar acerca de determinada situación; al participar en los juegos, se deben respetar reglas; el respeto por esas reglas se traduce en que entre los mismos niños regulen sus conductas.

Debates sobre la resolución de los problemas: en la secuencia de actividades se presentó a los niños el problema, no se les dijo cómo resolverlo; se propició que los mismos niños, a partir de su propia capacidad de reflexión, encontraran la respuesta; de manera grupal se comunicaron los resultados; cada niño explicó su procedimiento; el intercambio de ideas enriqueció el desarrollo de las actividades y las reflexiones de los niños fueron utilizadas como un punto de apoyo para orientar su conocimiento.

El objetivo del desarrollo de las actividades específicas de enseñanza fue estudiar la evolución de los procedimientos de los niños al resolver los problemas de estructura aditiva, y apoyar su desarrollo en la adquisición de su propio conocimiento. Este diseño consistió en nueve sesiones y las actividades se estructuraron de la siguiente manera:

Tabla 16. Estructura de las sesiones de trabajo de la secuencia didáctica

Sesión	Tema	Contenido matemático	Objetivo	Material
1	Antes y después	Antecesor y sucesor de un número.	Que los alumnos reconozcan que antes y después de un número hay otro.	Tres juegos de tarjetas con números del 0 al 9 y hojas impresas.
2	Serpientes y escaleras	Suma y resta de números mentalmente; resolución de problemas aditivos.	Que los alumnos sumen y resten números mentalmente; también que resuelvan problemas de: combinación con final desconocido, cambio aumentando con diferencia desconocida y cambio disminuyendo con inicio desconocido.	Juego *Serpientes y escaleras*, 2 dados, fichas y hojas impresas.
3	Juego del cajero	Agrupamiento, desagrupamiento y valor posicional del SND.	Que los alumnos comprendan algunas regularidades del SND (agrupamiento y desagrupamiento, valor posicional).	Dos dados (azul y verde), bloques aritméticos multibase y hojas de registro.
4	La tía Lola	Agrupamiento, desagrupamiento y valor posicional del SND.	Que los alumnos comprendan algunas regularidades del SND (agrupamiento y desagrupamiento, valor posicional).	Bloques aritméticos multibase, dulces y hojas impresas.
5	¿Cuántos hay?	Conteo, agrupamiento y comparación de cantidades.	Que los niños empleen el conteo, agrupamiento y comparación de cantidades para reflexionar en algunos principios del SND (valor posicional). Que los niños resuelvan problemas de: comparación con diferencia desconocida, igualación con diferencia desconocida, combinación con final desconocido y cambio disminuyendo con resultado desconocido.	Fichas de plástico, cartulinas con dibujos de 5 círculos cada una, marcadores y hojas impresas.
6	Varias maneras	Suma y resta de cantidades con	Que los alumnos reflexionen acerca de la propiedad asociativa de un	Dos lienzos de tela impresos con el juego

Tabla 16. [Continuación]

Sesión	Tema	Contenido matemático	Objetivo	Material
	de encontrar un número	unidades, decenas y centenas.	número, así como de la descomposición de este.	*Varias maneras de encontrar un número* (uno con cantidades que contengan unidades y decenas, otro con cantidades que contengan centenas y unidades de millar), tarjetas con números del juego y hojas de registro
7	El boliche	Resolución de sumas y restas, empleando el cálculo mental.	Que los alumnos desarrollen habilidades para calcular mentalmente el resultado de sumas y restas con números que contengan unidades, decenas y centenas; también que resuelvan problemas de: combinación con final desconocido, igualación con diferencia desconocida y comparación con, diferencia desconocida.	Juego didáctico de boliche y hojas impresas.
8	La tiendita	Resolución de problemas de estructura aditiva, empleando diversos procedimientos.	Que los alumnos desarrollen habilidades para calcular mentalmente y de manera escrita el resultado de sumas y restas con números que contengan unidades, decenas y centenas. Resolución de problemas aditivos.	Envolturas, cajas o dibujos de diversos productos, bloques aritméticos multibase, tarjetas de registro, marcadores, papel bond y hojas impresas.
9	Resolución de problemas de estructura aditiva	Resolución de problemas de estructura aditiva.	Que los alumnos resuelvan problemas de: combinación con diferencia desconocida, cambio disminuyendo con inicio desconocido, comparación con grande desconocido, igualación con grande desconocido y combinación con final desconocido.	Hojas impresas, lápiz, fichas de colores, bloques aritméticos multibase.

7.2 Aplicación de la secuencia didáctica

Las actividades de la secuencia didáctica se desarrollaron con un grupo integrado por siete niños de 2° grado de educación primaria, en sesiones de 60 minutos aproximadamente; las sesiones consistieron en trabajo grupal e individual; se propicio la argumentación por parte de los niños de cómo habían resuelto determinado problema.

7.3 Ambiente en el salón de clase

Se solicitó a los niños su atención y participación en todas las actividades a realizar, con el propósito de generar un agradable ambiente de trabajo y que todos los participantes se sintieran con la disposición de trabajar y aprender unos de otros.

7.4 Propuesta de análisis de datos de la secuencia didáctica

Los datos de esta etapa se analizaron con la observación del proceso de resolución de problemas que realizaron los alumnos de 2° grado durante las sesiones de trabajo; se tomaron seis sesiones de nueve para mostrar el proceso de resolución de los problemas; después, se analizó el tipo de representación que elaboraron los alumnos durante las sesiones de trabajo. A continuación se presentan los resultados obtenidos en esta etapa del estudio.

7.5 Resultados de la secuencia didáctica

Los resultados de esta segunda etapa se tomaron del análisis de seis sesiones, las cuales a continuación se describen:

Actividad 1. Serpientes y escaleras

Objetivo: Que los alumnos sumaran, restaran números mentalmente y resolvieran problemas de: combinación con final desconocido, cambio aumentando con diferencia desconocida, cambio disminuyendo con inicio desconocido, y cambio aumentando con diferencia desconocida.

Contenido matemático: Suma y resta mental de números; resolución de problemas aditivos.

Materiales: Juego *serpientes y escaleras*, 2 dados y dos fichas.

Procedimiento:
1.- Se proporcionó al grupo un juego de *serpientes y escaleras*, dos dados y fichas.
2.- Por turnos, cada jugador lanzó los dados, sumó los puntos de estos y avanzó los lugares que se indicaban; cuando una ficha llegaba a un número en donde estaba la cola de una serpiente, la ficha bajaba hasta la cabeza de la serpiente. Si la ficha llegaba al número donde estaba la parte baja de una escalera, subía por ella hasta donde terminaba.
3.- Ganó el jugador que llegó primero a 100.

Consideraciones previas: A partir de los resultados encontrados en la primera etapa, los niños recurrían constantemente al conteo con objetos y con sus dedos; con esta actividad se trato de propiciar que los niños sumaran o restaran mentalmente sin necesidad de usar dedos u objetos.

En la resolución de problemas de tipo combinación con final desconocido y cambio aumentando con final desconocido, los niños recurrían a la estrategia de contar todo; con esta actividad, al ser cantidades pequeñas se utilizó la estrategia de sumar a partir del segundo sumando o del sumando mayor.

Se mostró el juego a los niños y se dieron las indicaciones del mismo; también se aclararon las dudas de los niños con respecto al juego.

El juego inició con Julieta y se desarrolló así:
Julieta: (Lanza los dos dados): seis, cinco. (son los números que le salieron en los dados), (suma mentalmente) doce.
Rafael: Once.
Camila: Shhh, cállense.
Aplicador: Sólo suma Jazmín, los demás en silencio
Julieta: (Suma mentalmente). Once.
Aplicador: Mueve tu ficha.
Julieta: (Cuenta oralmente de uno en uno hasta llegar a la casilla once).
Continua Camila, lanza los dados y la suma de ellos le da siete.
Aplicador: A ver Luis.
Luis: (Lanza los dados, caen 6 y 2). Seis, siete, ocho.
Camila: Hasta el número ocho.
Camila: Te toca, Rafael.
Niños: (Atentos a las tiradas).
Rafael: (Lanza los dados; caen 6 y 1).
Niños: Seis, siete.
Los niños continúan con el juego; la ganadora en este juego fue Julieta.

Figura 32. Juego de Serpientes y escaleras

Observaciones

En este juego los niños, al sumar, contaban a partir del sumando mayor; como eran cantidades pequeñas, en la mayoría de los casos hicieron la suma mentalmente; sólo cuando tenían duda de que su resultado fuera correcto, recurrían al conteo con los dedos de sus manos, también a partir del sumando mayor. Durante el juego, los niños estaban atentos a la suma que realizaban sus compañeros, así como al avance en las casillas; sí un niño se equivocaba, sus compañeros inmediatamente se lo hacían saber.

Dificultades

A los niños a veces se les olvidaba la manera de realizar el conteo; por ejemplo, si su ficha estaba en el 17 y después tenían que avanzar 8 lugares, contaban a partir de la casilla 17, en vez de la casilla 18. En algunos casos, no observaban la numeración de las casillas y avanzaban en forma descendente en vez de ascendente; por ejemplo si su ficha estaba en el número 62 en vez de avanzar al 63, 64… y así sucesivamente, retrocedían al 61, 60...

Logros

Con el juego los niños realizaron acciones de conteo; al contar tenían que estar atentos a la serie ascendente de los números; también sumaron mentalmente o con la ayuda de sus dedos. Al terminar el juego, se trabajó con una hoja impresa; esta actividad consistió en resolver problemas aditivos derivados del juego *Serpientes y escaleras*. Se leyó a los niños cada uno de los problemas; ellos de manera individual resolvían los problemas; posteriormente, se comentaba en grupo la forma como habían resuelto los problemas y se verificaba que el resultado fuera correcto. Por ejemplo en el problema dos: en el número 11 hay una escalera que la conduce al número 39, ¿cuántos lugares más avanzó Rocío?; la actividad se desarrollo así:

Mariana, Camila y Rafael: (Cuentan en el juego, a partir de la casilla 11 hasta la casilla 39). Uno, dos, tres, hasta el veintiocho. Veintiocho.

Aplicador: A Margarita ya le había dado también 28, ¿cómo le hiciste Margarita?

Margarita: Nada más una resta.

Aplicador: ¿Qué restaste?

Margarita: Treinta y nueve, menos once.

Aplicador: Y te dio 28, está bien tú resultado, ¿alguien más hizo resta como Margarita?

Niños: No.

Julieta: Es que yo conté a partir del 11 hasta el 39.

Aplicador: Y, ¿cuánto te dio?

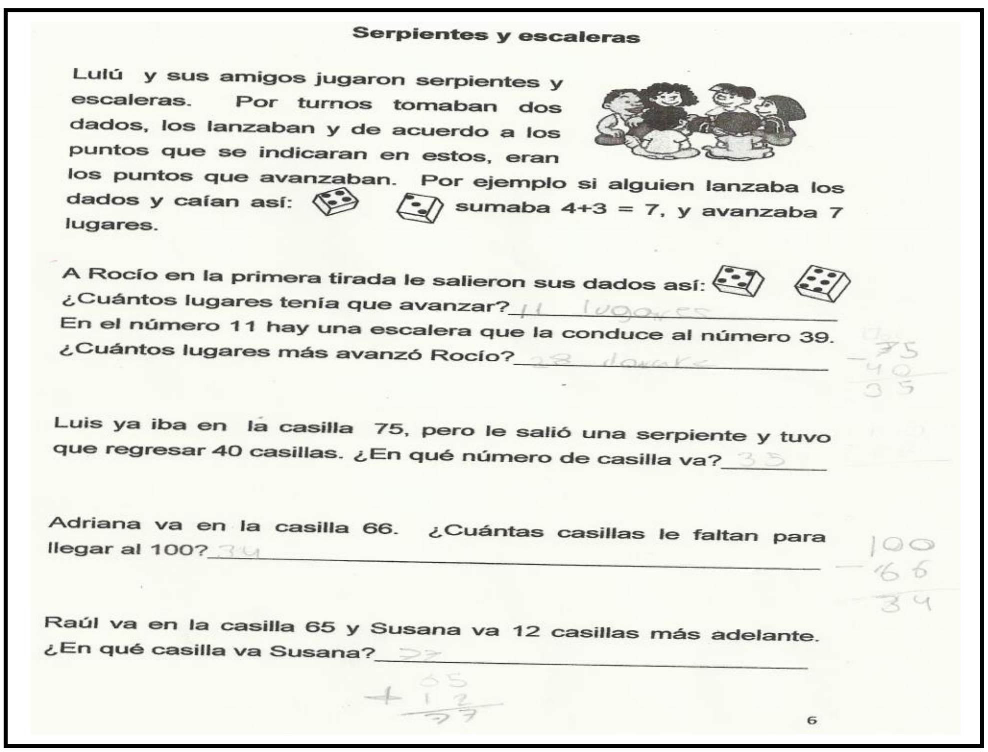
Julieta: Veintiocho.

Aplicador: Fue como si lo resolvieras con el juego.

Julieta: Mmmmhh.

A continuación se muestra la hoja de trabajo de uno de los niños.

Figura 33. Actividad derivada del juego de serpientes y escaleras



Serpientes y escaleras

Lulú y sus amigos jugaron serpientes y escaleras. Por turnos tomaban dos dados, los lanzaban y de acuerdo a los puntos que se indicaran en estos, eran los puntos que avanzaban. Por ejemplo si alguien lanzaba los dados y caían así: sumaba 4+3 = 7, y avanzaba 7 lugares.

A Rocío en la primera tirada le salieron sus dados así:
¿Cuántos lugares tenía que avanzar? 11 lugares
En el número 11 hay una escalera que la conduce al número 39.
¿Cuántos lugares más avanzó Rocío? 28 lugares

75
−40
35

Luis ya iba en la casilla 75, pero le salió una serpiente y tuvo que regresar 40 casillas. ¿En qué número de casilla va? 35

Adriana va en la casilla 66. ¿Cuántas casillas le faltan para llegar al 100? 34

100
−66
34

Raúl va en la casilla 65 y Susana va 12 casillas más adelante. ¿En qué casilla va Susana? 77

65
+12
77

6

Los procedimientos que emplearon los niños para resolver los problemas aditivos fueron diferentes, unos más sencillos y otros más elaborados; se trató de propiciar que los niños observaran que, al resolver los problemas con los algoritmos de la suma o la resta, era más fácil que al utilizar el conteo con objetos.

En el problema tres, surgió una discusión con el uso del cero. A continuación se muestra un fragmento de la sesión:

Aplicador: ¿Cómo lo resolviste Rafael?
Rafael: Lo estoy haciendo.
Aplicador: Pero tienes que anotar qué hiciste, no sólo escribir el resultado.
Margarita y Julieta: (discuten).
Margarita: (hace referencia a la resta 75 - 40). Cero para cinco, cero.
Julieta: No cero para cinco es cinco.
Margarita: No.
Julieta: ¿Verdad maestra qué cero para cinco es cinco?
Aplicador: Sí.
Julieta: (se dirige a Margarita) ¿Ya ves?
Margarita: ¿Es cero maestra?
Aplicador: Sí tienes cero cosas y quieres llegar al cinco, ¿cuánto te falta?
Julieta: Cinco, ahh.
Margarita: (pensativa).
Aplicador: Si tienes cero pesos y quieres tener cinco; ¿cuántos te faltan?
Luis: Cinco.

Margarita no se quedó convencida con esta explicación. En el problema cuatro, el 0 vuelve a causar conflicto; los niños no sabían como quitarle al 100, 66; ellos estaban seguros de que no se podía, ¿cómo quitarle 6 a 0?; veían al 0 como valor absoluto, y no como un número que ocupaba una posición en una cantidad. De acuerdo con Lerner (1997), una de las reglas del SND es el valor posicional; en este caso el valor del 0 en función de la posición que ocupa con respecto a otros números; la resolución de ese problema se dio así:

Margarita: (escribe la resta 100 - 66). A ver seis para cero, cero.

Luis: (realiza la resta mentalmente). Sorprendido y con voz fuerte: cuarenta.

Aplicador: Haz ahí tu operación (señala la hoja de trabajo).

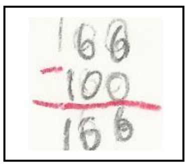
Mariana: Ay, esta no me la sé. Resto 100 – 66.

Aplicador: Sí Mariana.

Margarita: No maestra es que no se puede.

Aplicador: Sí se puede.

La resta (100 - 66), resultó complicada para todos; Margarita insistía en que 6 para 0 era 0; posteriormente ella y otros de sus compañeros, en vez de restar sumaron y el resultado que obtuvieron fue 166. Por ejemplo, Camila registro la resta 100 – 66; al no poder resolverla, invirtió las cantidades y sumó en vez de restar.



Después de unos minutos, sin que alguien resolviera el problema, la sesión continuó.

Aplicador: A ver ¿qué tienen que hacer ahí Luis?

Luis: Una suma.

Aplicador: ¿Qué vas a sumar?

Mariana: Es resta.

Aplicador: ¿En qué número de casilla va?

Niños: En la 66.

Aplicador: Y tiene ¿qué llegar al?

Niños: Cien.

Aplicador: ¿Qué voy a restar?

Julieta: Cien, menos 66.

Aplicador: Anota en el pizarrón la resta 100 – 66.

Aplicador: (saca una placa de 100 unidades de los Bloques aritméticos multibase).

A ver, aquí tenemos 100, le vamos a quitar 66.

Margarita: ¿Me presta una, maestra?

Aplicador: ¿Quién la puede resolver, ya con la placa? (hace referencia a resolver la resta con la placa de 100 unidades).
Niños: Yo.
Aplicador: Con esta, ¿creen qué la pueden resolver?
Niños: Sí.
Aplicador: (reparte a cada niño una placa de 100 unidades).
Niños: Cuentan las unidades en voz baja.
Margarita: (emocionada). Ya la tengo, venga maestra.
Niños: (siguen contando).
Mariana: (con voz alta) Treinta y cuatro.
Aplicador: Ay Mariana, porque hablaste.
Luis: Treinta y cuatro, ya sé.
Aplicador: A ver ¿cómo lo resolviste Margarita?
Margarita: Es que, me presta su tablita. (se dirige a sus compañeros). Miren primero como cada tirita son 10, conté 1, 2, 3, 4, 5, 6; marque aquí con mi lápiz. Y luego los otros 6. Después conté los que me sobraban 1, 2, 3; son treinta y luego de los otros 1, 2, 3, 4 en total son 34.

Un avance en Margarita fue el hecho de que, al contar, distinguía entre el valor de las unidades y las decenas; su conteo ya no era de uno en uno hasta la cantidad deseada, sino que al tener la placa de 100 unidades, contó las tiras de 10 unidades y les dio el valor de la decena; a las unidades sueltas les dio el valor de uno.

Para resolver ese problema se recurrió a la representación de las cantidades con el uso de los bloques aritméticos multibase; se consideró que si pasábamos directamente al algoritmo sería una situación demasiado abstracta para los niños; antes de dar ese paso debíamos trabajar aspectos como el agrupamiento y desagrupamiento de unidades, decenas y centenas. De acuerdo con Fuenlabrada et al. (1984), citada por Delprato y Fuenlabrada (2009), el SND es de base 10 y de posición; lleva rasgos peculiares de los algoritmos de suma y resta usados.

> El número de símbolos limitado a diez (0, 1, 2,…, 9) y el carácter posicional del sistema da la posibilidad de operar sobre cada agrupamiento (los unos, los dieces, los cienes, etc.), en ambas operaciones, como si se lo hiciera sobre dígitos (Delprato y Fuenlabrada, 2009, p 10).

Para trabajar aspectos del agrupamiento de los unos, los dieces y los cienes, así como el valor posicional, recurrimos al juego del cajero, éste se describe a continuación.

Actividad 2. Juego del cajero

Objetivo: Que los alumnos comprendieran algunas regularidades del SND (agrupamiento y desagrupamiento, valor posicional).

Contenido matemático: Agrupamiento, desagrupamiento y valor posicional del SND.

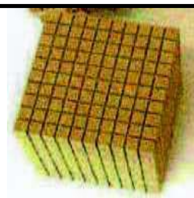
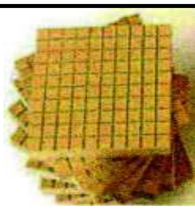
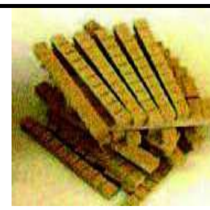
Materiales: Dos dados (azul, y verde), bloques aritméticos multibase.

Procedimiento:
1.- Se organizó un banco con los bloques y se designó a un integrante del grupo como cajero.
2.- Los jugadores por turnos tiraban los dados y pedían al cajero fichas de uno, de diez o de cien en función de lo que los dados indicaban. Cada vez que reunían 10 unidades del mismo valor cambiaban por una del valor inmediato superior.
3.- Ganaba el primer jugador que lograba reunir una cantidad de fichas preestablecida, (en un primer momento decenas, posteriormente centenas).

Consideraciones previas: Se solicitó a los niños registrar en una tabla (de tres columnas, cuyos encabezados eran centenas, decenas y unidades) los resultados de sus tiradas, uno debajo del otro, destacando lo obtenido una vez realizados los cambios.

Al inicio de la sesión se mostró a los niños los bloques aritméticos multibase (BAM) para llevar a cabo el juego del cajero. Los niños manipularon el material de manera libre durante cinco minutos, para tener familiaridad con ellos e identificar el valor de cada pieza del BAM.

Tabla 17. Valores de los bloques aritméticos multibase

1000	100	10	1
			

Se explicó en qué consistía el juego y se repartieron hojas impresas a los niños, para los registros del dinero que les diera el cajero; al cajero se le entregó una hoja diferente, dónde debía registrar las salidas del dinero del banco.

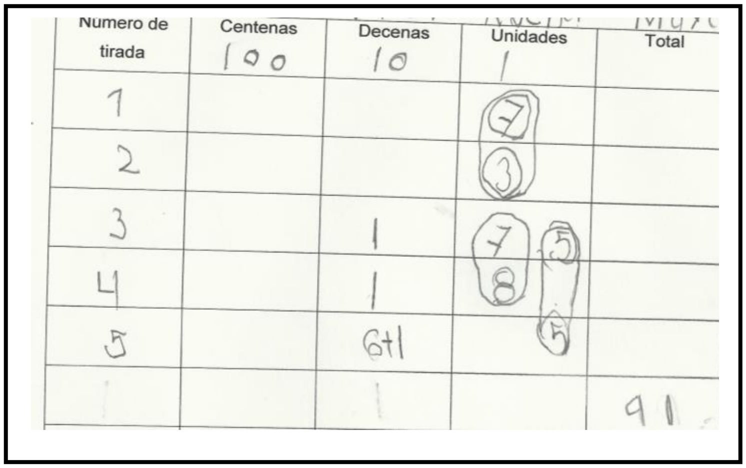
En el primer juego el ganador, fue el niño que primero llegó al 100; al final de las tiradas de cada ronda, cada jugador registraba el dinero que había ganado; el cajero debía registrar el dinero que les daba a todos los niños.

Figura 34. Hoja de registro del cajero

Nombre del jugador	Número de tirada	100 Centenas	10 Decenas	1 Unidades	Total
camilo	1	100		5	
angel				4	
javier				7	
	2				
camil				4	
angel			10	1	
javier			10	3	
	3				
camilo			1	6	
angel				6	
javier				7	

Algunos niños tuvieron confusión al inicio del juego acerca de cómo debían hacer sus registros; no sabían en qué columna registrar las decenas y en cuál las centenas; se les apoyó en identificar los cubos como unidades, las barras de 10 unidades como decenas y las placas de 100 unidades como centenas.

Figura 35. Hoja de registro del juego del cajero



Numero de tirada	Centenas	Decenas	Unidades	Total
	100	10	1	
1			7	
2			3	
3		1	7 5	
4		1	8	
5		6+1	5	
		1		91

A continuación mostramos un fragmento de la sesión:

Aplicador: (pregunta a todos los niños) ¿Alguien va a hacer algún cambio?

Camila: A mí me falta uno.

Rafael: Yo (cuenta 10 cubitos de uno en uno y se los da a Margarita).

Margarita: (vuelve a contar los cubitos de uno en uno). Sí (le da una barra de 10).

Aplicador: ¿Cuáles cambiaste?

Rafael: Por una de a diez.

Aplicador: Encierra las que cambiaste.

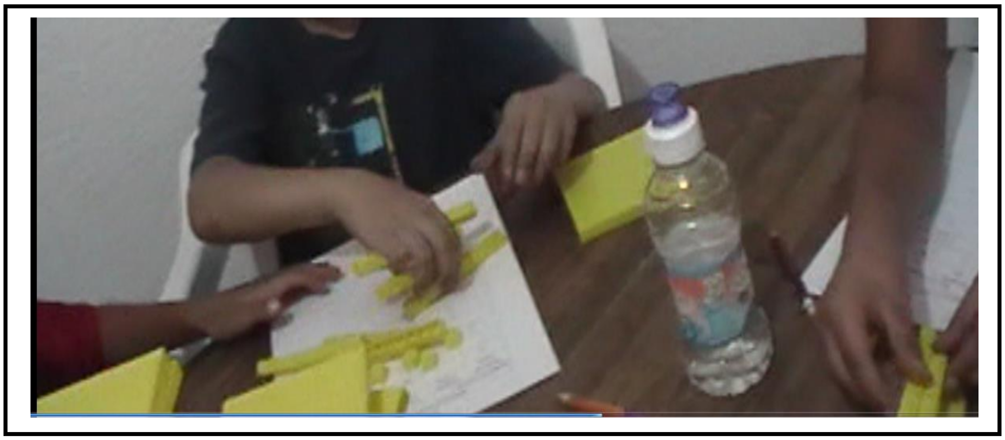
Rafael: ¿Cuál?

Aplicador: (en el registro de Rafael, señala). Éstas, el tres y el siete.

Margarita: ¿Maestra yo encierro los que Rafael me dio y le pongo aquí una de a diez? (hace referencia a su registro).

Aplicador: Sí.

Figura 36. Juego del cajero



Después de algunas rondas se hizo una variación al juego, ahora el dado azul valía 1 y el dado verde valía 10; si salían 4 puntos en el dado verde y 2 puntos en el dado azul, el puntaje total eran 42 puntos; la variación al juego fue para que también hubiera cambios de decenas a centenas

Observaciones

Los niños contaban oralmente de uno en uno las unidades; estaban atentos al agrupamiento de diez unidades para cambiarlos por una barra que equivalía a 1 decena y posteriormente cambiar 10 barras de 10 unidades cada una por una placa de 100 unidades.

Dificultades

Para los niños fue sencillo representar las cantidades con los bloques aritméticos multibase; lo que les generó confusión al inicio del juego fue registrar los números en las columnas correspondientes (unidades, decenas o centenas).

Logros

Los niños reconocieron que una decena está integrada por 10 unidades y una centena por 100 unidades o por 10 decenas; en el número 111, aunque los tres números son 1, no valen lo mismo, de acuerdo a su posición si se inicia del lado derecho el valor del 1 es 1, el valor del siguiente 1 es 10 y el valor del tercer 1 es 100.

La consolidación de esta actividad se continuó con la sesión de *La tía Lola;* en ella se rescató nuevamente la agrupación y desagrupación de unidades, decenas y centenas, como a continuación se describe.

Actividad 3. La tía Lola

Objetivo: Que los alumnos comprendieran algunas regularidades del SND (agrupamiento y desagrupamiento, valor posicional).

Contenido matemático: Agrupamiento, desagrupamiento y valor posicional del SND.

Materiales: Bloques aritméticos multibase, dulces y hojas impresas

Procedimiento: Se platicó a los niños la historia de *La tía Lola*. La historia se desarrollo de la siguiente manera: …tía Lola vive en Celaya, ella prepara ricos dulces de leche, para después venderlos; al inicio, vendía pocos dulces, sólo por piezas. Los dulces son deliciosos, por lo tanto, los clientes fueron aumentando. ¡Llegaban y pedían 12 dulces, 16 dulces,… Los niños se involucraron en la historia y se les cuestionaba acerca de las diferentes formas de agrupación de los dulces que vendía la tía Lola.
Se cuestionó a los niños con preguntas como estas:
Si le pedían 1 decena, ¿cuántos dulces daba?
Si le pedían 2 decenas con 3 dulces, ¿cuántos dulces daba?

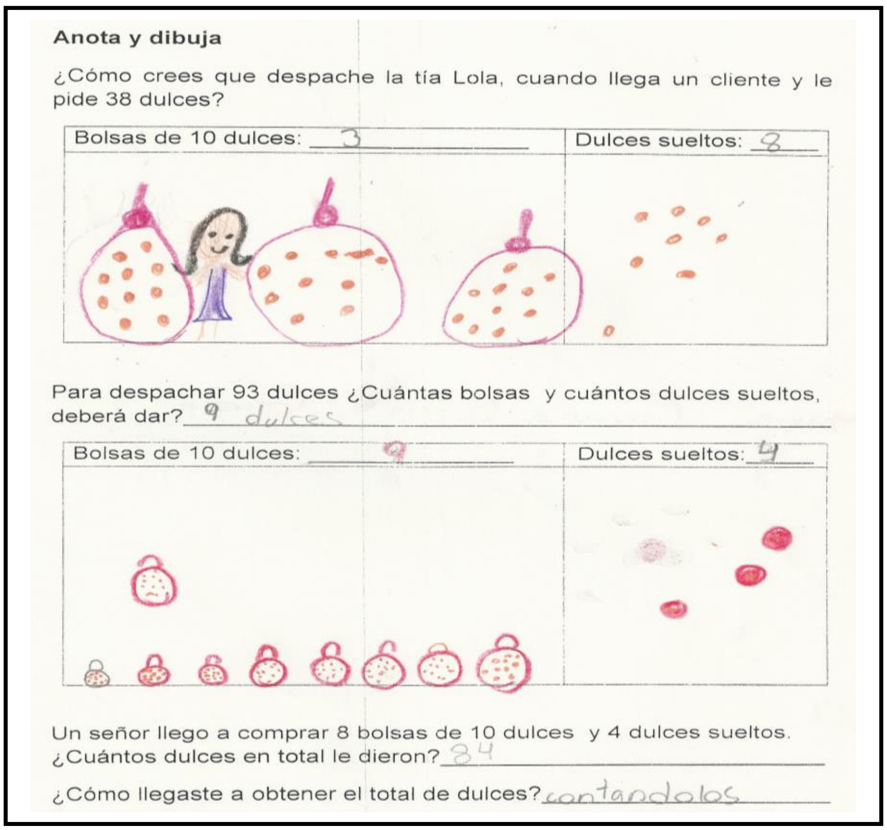
Posteriormente se observaron las bolsitas con los dulces que vendía la tía Lola y se contaron para comprobar que una decena tenía 10 dulces y 1 centena tenía 10 bolsas con 10 dulces cada una.

Observaciones

Los niños contaron oralmente las cantidades de los dulces y los agruparon en bolsitas de 10 dulces; estuvieron atentos a las agrupaciones de los dulces o los bloques; en el trabajo en hojas impresas, representaron las cantidades con dibujos; en los dibujos cuidaron que las cantidades fueran las que se les pedían en el problema a resolver.

A continuación se muestra la hoja de trabajo de uno de los niños.

Figura 37. Fragmento de la actividad de *La tía Lola*



Logros

Con esta actividad se consolidaron las ideas de decenas y centenas. Los niños reconocieron que en una decena había 10 unidades y en una centena diez decenas o 100 unidades. La representación externa de cantidades fue con bloques multibase, con dibujos y con números.

Actividad 4. Varias maneras de encontrar un número

Objetivo: Que los alumnos reflexionaran acerca de la propiedad asociativa de un número, así como de la descomposición de éste.

Contenido matemático: Suma y resta de cantidades con unidades, decenas y centenas.

Materiales: Dos lienzos de tela impresos con el juego *Varias maneras de encontrar un número* (Uno con cantidades que contengan unidades y decenas, otro con cantidades que contengan centenas y unidades de millar), tarjetas con números del juego (ver en anexos).

Procedimiento:

1.- Se colocó un lienzo de tela en el piso (contiene cantidades con unidades y decenas) y se repartió a cada niño una tarjeta.

2.- Por turnos los niños daban un salto en las cantidades que, al sumarlas o restarlas, formaban el número de la tarjeta. (por lo menos dos maneras diferentes).

3.- Después de que todos los niños habían jugado una vez, debían registrar lo siguiente: ¿qué número te salió? y ¿de cuántas maneras formaste el número?

4.- Se repitieron varias rondas.

Observaciones

Los niños formaron el número que les había salido en la tarjeta y argumentaron el por qué creían que al sumar o restar determinadas cantidades se formaba dicho número.

Dificultades

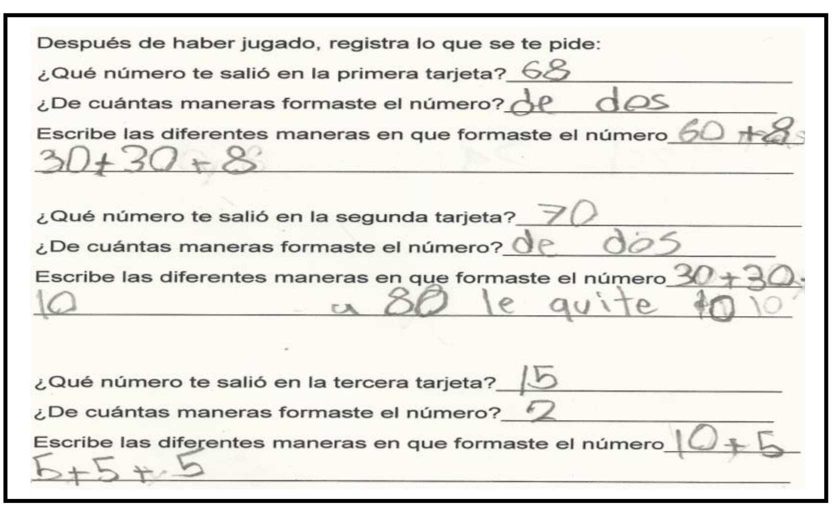
Para algunos niños fue complicado formar el número de diferentes maneras y sumar o restar mentalmente las cantidades; en un primer momento se dejó a los niños que trataran de resolver solos; sus demás compañeros los observaban y escuchaban; si al participante le costaba mucho, los otros niños intervenían para apoyarlo; de esta manera todo el grupo estuvo involucrado en la actividad.

Logros

Los niños se dieron cuenta de que un mismo número podía formarse con diferentes sumandos, es decir descubrieron la parte asociativa del número. De acuerdo con Llinares (2001), para construir el sentido numérico se requiere la posibilidad de pensar sobre los números y usarlos de una manera tal que los alumnos puedan verlos descompuestos de múltiples maneras. “Las diferentes formas de ver los números (descomposiciones y recomposición flexible) junto con la posibilidad de elegir una descomposición en vez de otra en la resolución de diferentes problemas es una característica del sentido numérico” (Llinares, 2001, p. 161).

Con esta actividad se propició que los niños formaran un mismo número con la integración de otros números; para ello emplearon la suma de los números, mentalmente; en algunos casos también recurrieron a la resta, mentalmente: a determinado número le restaban otro para llegar a una cantidad deseada. A continuación se muestra la hoja de registro de uno de los niños.

Figura 38. Hoja de registro de la actividad *Varias maneras de encontrar un número*



Después de haber jugado, registra lo que se te pide:

¿Qué número te salió en la primera tarjeta? 68

¿De cuántas maneras formaste el número? de dos

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número 60 +8

30+30+8

¿Qué número te salió en la segunda tarjeta? 70

¿De cuántas maneras formaste el número? de dos

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número 30+30+

10 a 80 le quite 10

¿Qué número te salió en la tercera tarjeta? 15

¿De cuántas maneras formaste el número? 2

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número 10+5

5+5+5

En sus registros anotaron las diferentes opciones para formar un número; esta acción les permitió consolidar su escritura numérica.

Actividad 5. El boliche

Objetivo: Que los alumnos desarrollaran habilidades para calcular mentalmente el resultado de sumas y restas con números integrados por unidades, decenas y centenas.

Contenido matemático: Resolución de sumas y restas, empleando el cálculo mental.

Materiales: Juego didáctico de boliche.

Procedimiento:

1.-Se colocaron los bolos y una marca (aproximadamente a 3 metros de distancia) que indicaba el sitio desde donde lanzarían las pelotas.

2.- Por turnos, cada niño lanzó la pelota.

3.- Después de lanzar la pelota levantaba los bolos que había tirado, decía en voz alta los números que tenía que sumar y calculaba mentalmente el total de puntos; los demás integrantes del equipo debían sumar las cantidades de puntos correspondientes para verificar que la suma de su compañero fuera correcta; si la cantidad era correcta se registraba.

4.- Se realizaron tres rondas; al final del juego ganó el jugador que tenía más puntos.

5.- Después de que todos los integrantes habían participado tres veces, se observaron los registros de la tabla y se sumó el total de puntos de cada participante; posteriormente con esta información se plantearon problemas de comparación. Por ejemplo: ¿cuántos puntos más, gano Luis que Axel?, ¿cuántos puntos le faltaron a Julieta para tener los mismos que Rafael?

Consideraciones previas: El valor asignado a cada bolo varió; en un primer momento los valores estuvieron formados por dígitos (0, 1, 2,……,9); después por nudos (10, 20, 30, etc.); posteriormente nudos y dígitos, y finalmente por números como: 12, 23, 39, etc.

Se dio a los niños el material y se organizaron los bolos; por turnos los niños registraron los puntos de cada uno de sus compañeros.

Observaciones

El niño que lanzaba las pelotas trataba de sumar todos sus puntos, sin recurrir al uso del papel y lápiz; si se le dificultaba, sus compañeros y la aplicadora lo auxiliaban; al sumar los puntos los niños recurrían al conteo con sus dedos, a partir del segundo sumando.

Figura 39. Representación de la suma de puntos del juego de boliche

Mariana sumó sus puntos a partir del 9; al 9 le suma 6; contó a partir del 9 (sumando mayor), cada vez que mencionaba un número extendía un dedo, hasta llegar a quince; después 15 + 5, resolvió mentalmente, 20; continuó con la suma 20 + 1 (sumó mentalmente) 21; 21 + 8 (sumó mentalmente) 29, 29 + 4 (volvió a contar con los dedos), 33. Finalmente 33 + 7 (sumó a partir del segundo sumando, empleó el conteo con sus dedos), 40.

Al pasar tres rondas, cada niño tenía que sumar sus puntos; las sumas anteriores las pudieron resolver mentalmente y con el empleo de los dedos. Los niños trataron de sumar mentalmente las cantidades, pero como fueron cantidades relativamente grandes se les dificultaba; fue entonces cuando vieron la necesidad de registrar las cantidades de los puntos en hojas y hacer la suma de manera escrita.

Al tener las sumas totales de los puntos, se formularon problemas como: ¿quién obtuvo más puntos, Axel o Rafael?, ¿con cuántos puntos le ganó Axel a Rafael? Para resolver problemas de este tipo los niños utilizaron el algoritmo de la resta; primero, individualmente, resolvieron; después se intercambiaron los procedimientos. Por ejemplo:

En el problema, Axel obtuvo 80 puntos y Rafael 340 puntos. ¿Con cuántos puntos le ganó Rafael a Axel?

La actividad se desarrollo así:

Aplicador: Axel obtuvo 80 puntos y Rafael 340 puntos. ¿Con cuántos puntos le ganó Rafael a Axel?

Niños: (En silencio).

Margarita: Ya sé, 340 menos 80.

Aplicador: ¿Sí será menos?

Margarita: Sí

Aplicador: ¿Por qué?

Margarita: Sí sería menos porque al 340 le tenemos que restar 80.

Aplicador: ¿Por qué le tenemos que restar?

Margarita: Porque a los 340 de Rafael le tenemos que quitar 80.

Axel: Sí y sería 0 para 0, 0.

Aplicador: (Escribe la resta $\boxed{\begin{array}{l}340\\ \underline{-\ 80}\end{array}}$ en el pizarrón y pregunta) ¿Sí están bien colocados los números?

Niños: Sí

Aplicador: Unidades, con unidades, decenas con decenas y como aquí no hay centenas así se queda (señala las cantidades).

Axel: Y ahí el 0 va abajo del 0.

Aplicador: A ver, ¿quién quiere pasar a resolverla?

Niños: Yo, yo.

Aplicador: Pasa, Axel.

Axel: (Pasa a resolver la resta).

Aplicador: (Se dirige a los niños) ¿De qué lado empezamos la resta?

Niños: (Señalan el lado derecho de la resta).

Aplicador: Resuélvela Axel.

Niños: (En su lugar resuelven la resta).

Axel: Resuelve la resta así:

$$\boxed{\begin{array}{r} 340 \\ \underline{-\ 80} \\ 420 \end{array}}$$

Aplicador: ¿Esta bien su compañero?

Niños: (Pensativos unos segundos, después algunos contestan que no y otros que sí).

Axel: No, no estoy bien, yo sumé, tenía que restar.

Aplicador: A ver corrígela y los demás la realizan en una tarjeta.

Axel: (Resuelve la resta 340 – 80 = 260), ya maestra.

Aplicador: A ver explícanos Axel.

Axel: (Señala con su mano los números), 0 más 0 es 0.

Aplicador: Es suma.

Axel: No, 0 menos 0 es 0. Después aquí (Señala el número 4), a 4 no le podemos quitar 8, entonces le quita uno a este (Señala el número 3) y ya, 14 menos 8 son 6; y como al 3 le quité 1, quedan 2, y como al 2 no se le suma nada pues ya son 260.

Aplicador: Muy bien Axel, ¿Quién lo hizo diferente a Axel?

Margarita: Yo.

Aplicador: Pasa a explicarlo.

Logros

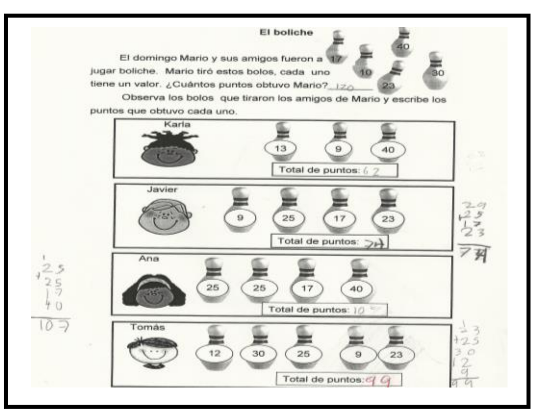
Los niños poco a poco se apropiaban de las reglas del SND y también del aprendizaje de los algoritmos convencionales de la suma y la resta; sus conocimientos se complementaron con las aportaciones de ellos mismos y de la aplicadora.

Mariana y algunos de sus compañeros empleaban el conteo con los dedos de sus manos cuando la suma de los números requería una transformación por ejemplo: 9 + 6, 8 + 9, 29 + 4, 19 + 9, 28 + 8, etc. En números pequeños, nudos o hechos numéricos conocidos como 15 + 5, 8 + 2, 20 + 10, 20 + 2, entre otros; los niños sumaban mentalmente. En las sumas de cantidades donde al sumarlas se producían cambios de unidades a decenas o decenas a centenas los niños primero sumaban las decenas y después las unidades como en: 19 + 36, 55 + 28, 89 + 12, 176 + 24, etc. Por ejemplo: 19 + 36, los niños primero sumaron 10 + 30 = 40; después 9 + 6 = 15; finalmente 40 + 15 = 55.

En cantidades mayores los niños vieron la necesidad de registrar las cantidades en hojas y desarrollar el algoritmo convencional de la suma con el apoyo de los dedos de sus manos como soporte de representación; pues de manera mental era difícil que realizaran sumas de cifras con centenas y con transformaciones como: 68 + 75, 143 + 89, 232 + 83, 174 + 31, etc.

También se trabajó una actividad derivada del juego; en ella se incluyeron problemas aditivos.

Figura 40. Hoja de trabajo de la actividad, el boliche



En esta actividad, se observó que los alumnos comprendieron los problemas y utilizaron el algoritmo para resolver los problemas aditivos planteados.

Actividad 6. La tiendita

Objetivo: Que los alumnos desarrollaran habilidades para calcular mentalmente y de manera escrita el resultado de sumas y restas con números integrados por unidades, decenas y centenas.

Contenido matemático: Resolución de problemas de estructura aditiva, empleando diversos procedimientos.

Materiales: Envolturas, cajas o dibujos de diversos productos, bloques aritméticos multibase, tarjetas de registro, marcadores y papel bond.

Procedimiento:

1.- De manera grupal se organizó un puesto con las envolturas, cajas o dibujos de productos que se vendieran; los niños colocaron a cada producto un letrero que indicaba su precio (entre 10 y 99 pesos).

2.-Se organizó al grupo en binas y se les proporcionaron los bloques aritméticos multibase que representarían el dinero.

3.- Por turnos, cada bina pasó al frente del puesto; un niño era el vendedor y otro el comprador; el comprador decía en voz alta qué productos iba a comprar y cuánto costaba cada uno; calculaba mentalmente o de manera escrita lo que tenía que pagar en total; realizaba la compra y pagaba; el vendedor también debía calcular mentalmente o de manera escrita lo tenían que pagarle (lo mismo que los demás niños del grupo); cuando le pagaban verificaba si la cantidad era exacta o tenía que devolver cambio.

4.- Los integrantes del grupo verificaban que las cantidades en la compra-venta fueran exactas.

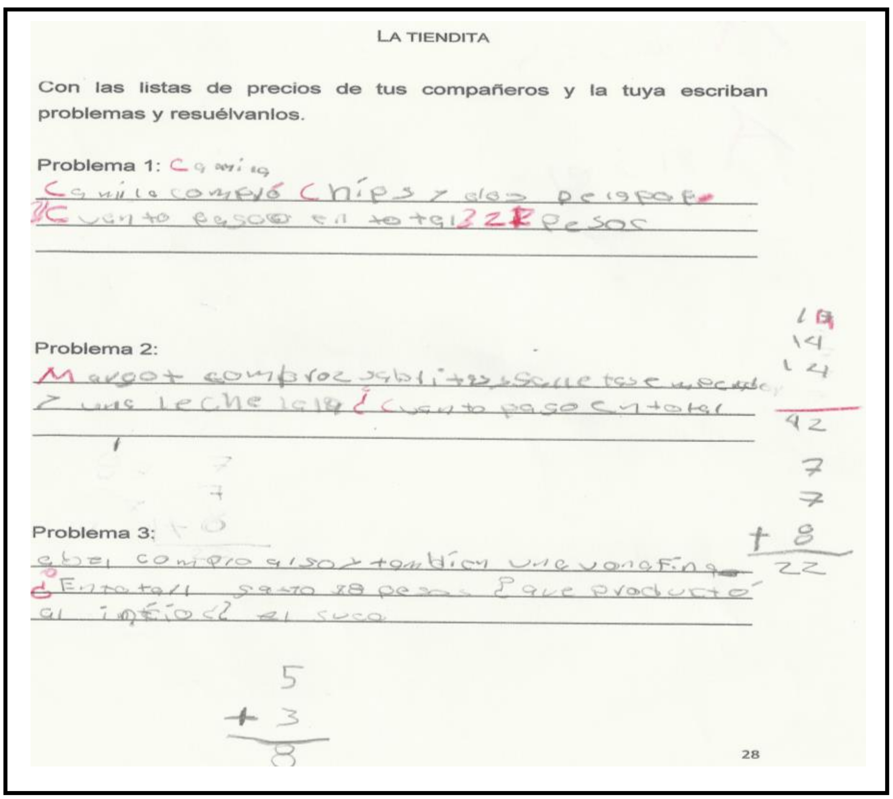
5.- Se elegía otra bina de niños y se realizaba la actividad de acuerdo con la dinámica anterior.

Consideraciones previas: Cuando se hacía el pago del comprador al vendedor, todo el grupo debía estar atento a que las cantidades fueran las correspondientes.

Los alumnos registraron los artículos que compraron cada uno de sus compañeros y elaboraron las operaciones correspondientes para saber cuánto tenían que pagar los compradores y cuál era su cambio. Posteriormente, los niños al acompañar a su mamá o algún familiar al mercado, elaboraron una lista con los dibujos de los productos que compraron y sus precios.

En clase se mostraron las listas y con ellas se formularon problemas aditivos, primero de manera oral y después escrita. Algunos de los problemas formulados y resueltos por los niños fueron los siguientes:

Figura 41. Problemas aditivos, formulados y resueltos por los niños



Observaciones

Los niños en un primer momento, al formular problemas, recurrían a los de tipo combinación y subtipo final desconocido; se les sugirieron otras formulaciones para la elaboración de los antes mencionados, mismas que los niños retomaron para la redacción de los siguientes problemas.

Logros

Con esta actividad los niños resolvieron problemas aditivos, con el uso del cálculo mental y los algoritmos de la suma y la resta; el empleo de los dedos tuvo menor presencia que en actividades anteriores. Consideramos que esta situación se dio porque los precios de los productos eran con cifras de unidades y decenas, y se trabajó con los niños en sesiones previas los algoritmos de la suma y la resta con cálculo mental, o escritas de manera convencional. En el SND, los niños, al hacer los registros de las cantidades que pagaban, consolidaron la numeración escrita.

7.6 Sistema de representación externa en la aplicación de la secuencia didáctica

En esta parte del estudio se analiza cómo, por medio de representaciones externas, los niños resolvieron problemas de estructura aditiva. En el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica para resolver problemas aditivos también estuvieron presentes las categorías de la primera etapa:

1.- Representación externa del problema con apoyo de objetos.

2.- Representación externa del problema con apoyo de gráficos

3.- Representación externa del problema de manera simbólica

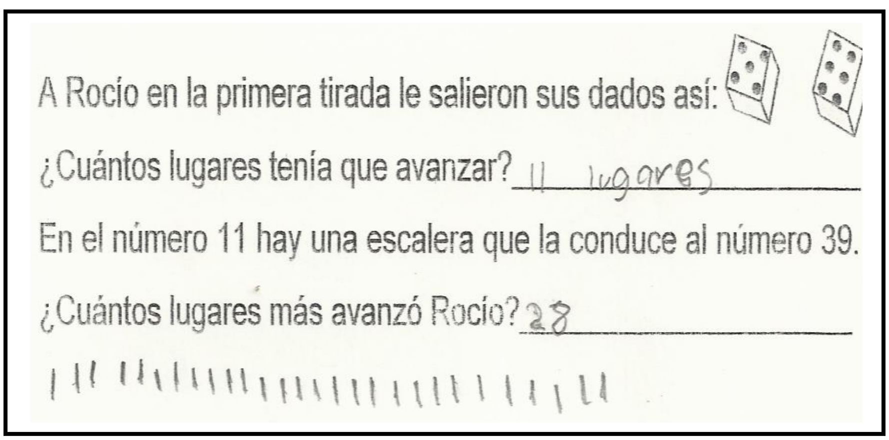
A continuación se describen algunas actividades y el tipo de representaciones que los niños utilizaron para resolver los problemas: Una de las primeras sesiones que se trabajó con los niños fue la de *Serpientes y escaleras*; en ella se abordó la resolución de diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos, uno de ellos fue el de *cambio aumentando con diferencia desconocida*; algunos niños, al resolverlo, en un primer momento recurrieron a la representación externa del problema con apoyo de la lámina del juego.

Figura 42. Representación externa del problema con apoyo de gráficos

El niño se ubicó en la casilla número 11; después, de manera oral y de uno en uno, contó el número de casillas que había entre la casilla 11 y la casilla 39.

Otros niños representaron la resolución del mismo problema, con el uso de gráficos.

Figura 43. Representación gráfica del problema



A Rocío en la primera tirada le salieron sus dados así:

¿Cuántos lugares tenía que avanzar? 11 lugares

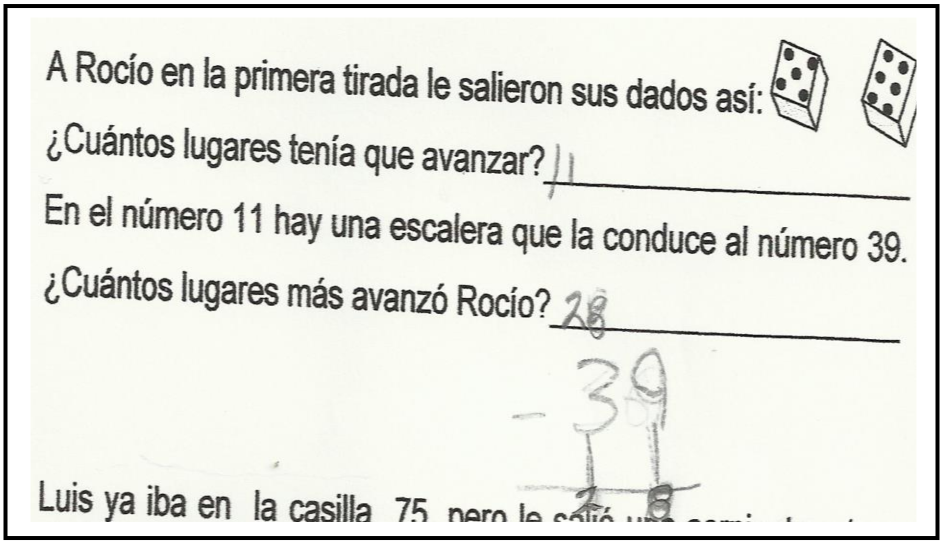
En el número 11 hay una escalera que la conduce al número 39.

¿Cuántos lugares más avanzó Rocío? 28

El niño contó a partir del número 11; cada número que avanzaba lo representaba con una marca, al llegar al número 39, se detuvo y contó las marcas que había registrado.

Los niños más avanzados resolvieron por medio de la representación externa del problema con el algoritmo convencional de la resta.

Figura 44. Representación del problema con el algoritmo convencional



El niño, escuchó el planteamiento del problema, comprendió lo que se le pedía, seleccionó la información necesaria y resolvió con el algoritmo convencional de la resta.

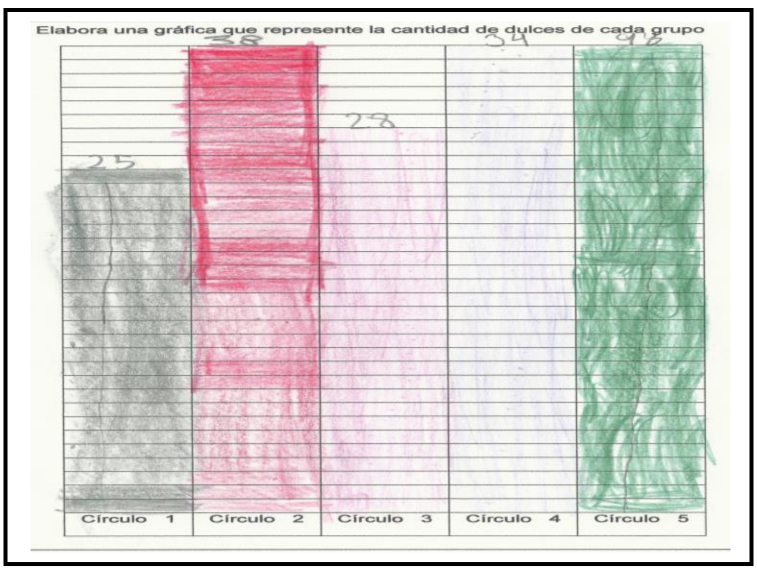
En los tres casos presentados los niños llegaron al resultado, sólo que las representaciones para resolver el problema fueron diferentes. De acuerdo a Zhang y Norman (1995), cada representación tiene un impacto distinto en sus usuarios, es decir "…diferentes representaciones para una estructura abstracta común pueden causar conductas a nivel cognitivo dramáticamente diferentes" (p. 271). En este caso un mismo problema para los niños causó diferentes formas de concebirlo y representarlo para resolverlo.

Por otro lado, en la actividad ¿cuántos hay?, en un primer momento los niños representaron diferentes cantidades con bloques aritméticos multibase y realizaron comparaciones entre las cantidades representadas; para establecer la relación que había entre una y otra cantidad de bloques recurrieron al conteo oral de uno en uno.

Figura 45. Representación de cantidades con bloques

En un segundo momento, representaron las mismas cantidades de manera grafica y también establecieron comparaciones entre las diferentes cantidades.

Figura 46. Representación gráfica de cantidades

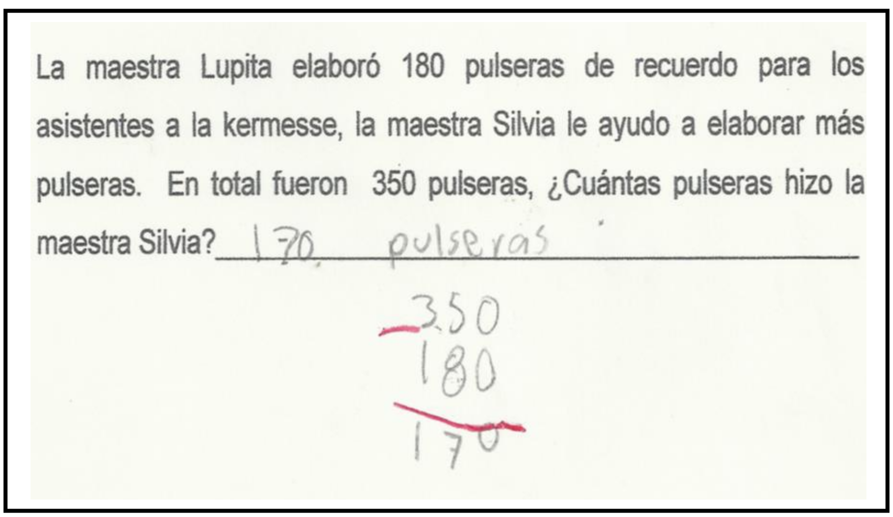


Posteriormente se hicieron comparaciones de las cantidades con la escritura simbólica de los números.

En esta sesión de *¿Cuántos hay?*, al igual que en otras sesiones más de la aplicación de la secuencia didáctica, los niños representaron cantidades de manera externa de diferentes formas; con ello resolvieron problemas de tipo *igualación con diferencia desconocida*, al igualar las cantidades de dos grupos. También resolvieron problemas de tipo *combinación con final desconocido* y *cambio disminuyendo con resultado desconocido*. El conteo, la representación de cantidades de manera interna y externa estuvieron presentes en todas las sesiones.

La actividad final de la secuencia didáctica fue *La Kermesse,* describiremos algunos avances de los niños en esta sesión; para resolver el problema de *combinación con diferencia desconocida*; utilizaron el algoritmo convencional de la resta.

Figura 47. Representación del problema con el algoritmo


La maestra Lupita elaboró 180 pulseras de recuerdo para los asistentes a la kermesse, la maestra Silvia le ayudo a elaborar más pulseras. En total fueron 350 pulseras, ¿Cuántas pulseras hizo la maestra Silvia? 170 pulseras

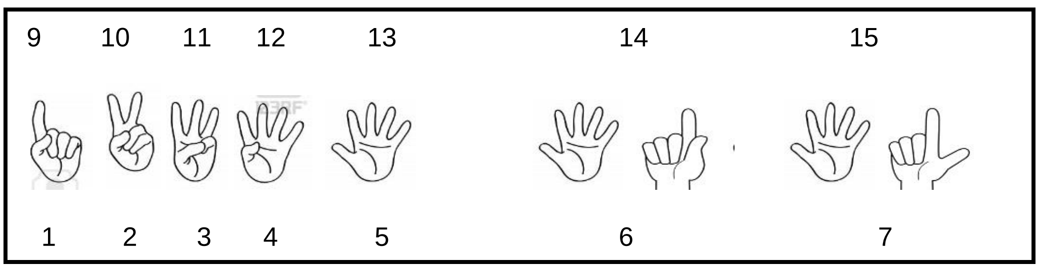
$$\begin{array}{r} 350 \\ -\,180 \\ \hline 170 \end{array}$$

En esta sesión, los niños mostraron mayor familiaridad con el algoritmo y recurrieron menos al uso de fichas o de los bloques. En esta resta emplearon el desagrupamiento de una centena a decenas.

Algunos niños usaron la estrategia de *quitar:* iniciaron a resolver la resta del lado derecho; 0 menos 0, 0; cinco menos 8, no se puede, le quitamos 1 al 3 y ya son 15 menos 8, 7; como al 3 le quitamos 1 quedaron 2, a 2 le quito 1 me queda 1. El resultado es 170.

Otros niños emplearon la estrategia del *conteo progresivo;* también iniciaron a restar del lado derecho y resolvieron así: 0 para 0, 0; ocho para 5, no se puede, le quitamos 1 al 3 y son 8 para 15 (contaron con los dedos a partir del 9, cada que mencionaban un número extendían un dedo; al llegar a 15 contaron los dedos extendidos), 9, 10, 11, 12, 13 14 y 15. Son 7. (Véase figura 47); como al 3 le quitamos 1 quedaron 2, 1 para 2, me queda 1. El resultado es 170.

Figura 48. Representación externa del problema con el uso de los dedos



Al finalizar las actividades de la secuencia didáctica, aunque los niños ya estaban más familiarizados con los algoritmos de la suma y la resta, algunos de ellos seguían auxiliándose con el conteo de los dedos de sus manos para resolver los problemas aditivos.

7.7 Conclusiones de la segunda etapa del estudio

A partir de los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, se concluye que los niños mostraron un avance en lo que refiere a los problemas aditivos planteados y los procedimientos utilizados para resolverlos. Los niños fueron reconociendo que ciertas estrategias intuitivas se asemejan a estrategias formales y otras no, por ejemplo: para resolver problemas aditivos de tipo *combinación con resultado desconocido*, en el cuestionario diagnóstico emplearon el conteo de objetos de uno en uno y oralmente; al finalizar las actividades de la secuencia didáctica, ese mismo tipo de problemas lo resolvían con el algoritmo de la suma.

En el desarrollo de las actividades los niños percibieron la necesidad de emplear el algoritmo, principalmente en cantidades mayores y que al sumarlas o restarlas hubiera transformaciones de unidades a decenas, decenas a centenas o viceversa centenas a decenas y decenas a unidades. También siguieron empleando el conteo con los dedos de las manos como un apoyo de soporte de representación.

Al trabajar la secuencia didáctica con los estudiantes, ellos tuvieron la libertad de expresar sus dudas, inconformidades y argumentos sobre el procedimiento que habían elegido para resolver determinado problema. Esto contribuyó a la evolución de sus habilidades de lenguaje oral y escrito, su autonomía al decidir cómo resolver un problema y seguridad al expresarse de manera oral o escrita.

Por otra parte, los niños modificaron sus soportes de representaciones externas para resolver los problemas; al inicio de las actividades de la secuencia didáctica empleaban fichas, bloques aritméticos o dibujos; al finalizar empleaban más el algoritmo de la suma o la resta. Los niños, también mostraron mayor familiaridad con la estructura sintáctica y semántica de los tipos y subtipos de problemas; por ejemplo: el problema de tipo *cambio disminuyendo con inicio desconocido* que en la primera etapa les causó mayor dificultad, en esta etapa lo resolvieron más fácil.

Consideramos que los cambios en los niños al resolver problemas aditivos se propiciaron durante la aplicación de las actividades, porque se dio atención a sus participaciones, cuando resolvían un problema argumentaban sus procedimientos, entre ellos se escuchaban y trataban de reflexionar lo que sus compañeros o ellos mismos habían hecho.

En lo que se refiere a las actividades de la secuencia didáctica, fueron diseñadas en función de las características de los niños y con el objetivo de trabajar la resolución de problemas aditivos. Algunas actividades se retomaron de la literatura como, el juego del cajero de Fuenlabrada (2009). En la actividad *la tía Lola* retomamos los agrupamientos y desagrupamientos de unidades que se hicieron previamente en el *juego del cajero* sólo que en un contexto de compra y venta de dulces. Otras actividades fueron diseñadas a partir de juegos, por ejemplo: *el boliche*, *serpientes y escaleras* y *la tiendita.* Y algunas más como: *¿Cuántos hay? y varias maneras de encontrar un número,* fueron construidas por la autora de la tesis y la directora de la misma.

Durante la aplicación de la secuencia didáctica se efectuaron ajustes de acuerdo con los procesos de los niños en las actividades que se trabajaban. Es decir la organización inicial que se tenía de la secuencia didáctica se modificó de acuerdo a los procedimientos que los niños empleaban para resolver las tareas planteadas en cada una de las sesiones. La modificación se realizó con el objetivo de dar un seguimiento a los procesos de los alumnos en su aprendizaje de la resolución de los problemas aditivos.

Es pertinente mencionar que en las actividades de la secuencia didáctica con los niños; se trató de prestar atención a todo lo que realizaban. En el caso de los juegos; por medio de la observación a los niños, se rescataron aspectos interesantes, por ejemplo en el juego de serpientes y escaleras si la ficha del niño estaba en el 17 y después tenía que avanzar 8 lugares, él contaba a partir de la casilla 17, en vez de la casilla 18. En algunos casos, los niños no observaban la numeración de las casillas y avanzaban en forma descendente en vez de ascendente; por ejemplo si su ficha estaba en el número 62 en vez de avanzar al 63, 64… y así sucesivamente, retrocedían al 61, 60...

A partir de ésta experiencia una recomendación a los docentes al aplicar un juego a sus alumnos es que: deben atender lo que los niños hacen, si realmente juegan como debiera ser, cuáles son las dificultades a las que se enfrentan durante el juego, cuáles son los logros y qué de ese juego pueden rescatar para trabajar un contenido matemático en específico (en este caso problemas aditivos). Pues al jugar con los niños, el juego tiene un sentido no sólo como herramienta de distracción y diversión sino también de manera didáctica.

VIII. RESULTADOS DE LA TERCERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO FINAL

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos en la tercera etapa del estudio, y corresponde a los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario final de problemas de estructura aditiva. Inicialmente se describe el cuestionario y la aplicación del mismo, después se muestran los resultados obtenidos en esta etapa del estudio.

8.1 Descripción del cuestionario final

A continuación se describe el instrumento aplicado en la tercera etapa del estudio, que corresponde al cuestionario final sobre problemas de estructura aditiva.

Tabla 18 Preguntas del cuestionario final de problemas aditivos: modelo funcional

No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido.	? 120 | 143	(Previamente aparece un recuadro con las imágenes de las prendas y los precios de éstas: falda $120, blusa $143, suéter $228, guantes $46, calcetas $25 y boina $158). La mamá de Adriana compró el uniforme que le solicitaron en la escuela. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Adriana en el uniforme completo?
2	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido	? 228 | 120	(Los precios son los mismos que los del problema anterior). La mamá de Gustavo compró un suéter, una camisa, un pantalón, un par de guantes, un par de calcetines, una corbata y una boina. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Gustavo en el uniforme?

Tabla 16 [Continuación]

No.	Modelo, tipo y subtipo	Esquema	Solicitud de la pregunta
3	Problema de comparación, diferencia desconocida	720 747 ?	¿Cuál de las dos mamás gastó más dinero? ¿Cuál fue la diferencia?
4	Problemas de combinación diferencia desconocida	56 27 ?	La mamá de Adriana organizo una fiesta para la graduación de su hija Carmen. En la fiesta hubo tortas, jugos, gelatinas y dulces. La mamá de Carmen preparó 27 tortas para los invitados, la tía de Carmen le ayudo a preparar más tortas. En total había 56 tortas. ¿Cuántas tortas preparo la tía de Carmen?
5	Modelo funcional; tipo combinación, final desconocido	? 13 9	En la fiesta jugaron varios juegos uno de ellos fue el boliche. Al final del juego sumaban los puntos de cada jugador y ganaba el que tenía mayor número de puntos. Observa los bolos que tiraron Carmen y su amigo. Escribe los puntos que obtuvo cada uno. Carmen: 13, 9 y 40puntos. Jesús: 9, 25, 17 y 23. Diana: 23, 6 y 10 puntos.
6	Modelo funcional; tipo igualación y subtipo diferencia desconocida	74 62 ?	¿Cuántos puntos le faltaron a Carmen para tener los mismos puntos que su amigo Jesús?
7	Problema de igualación grande desconocido.	? 39 23	Diana obtuvo 39 puntos; si hubiera tenido 23 puntos más, ¿tendría los mismos puntos qué obtuvo Carmen o los mismos puntos que obtuvo Jesús?
8	Modelo funcional; tipo cambio disminuyendo, comienzo desconocido.	-37 ? → 63	Adriana compró una bolsa grande de paletas. En la fiesta había 37 invitados, a cada invitado le regaló 1 paleta. Al final de la fiesta le quedaron 63 paletas. ¿Cuántas paletas tenía Adriana al inicio de la fiesta?

8.2 Aplicación del cuestionario de resolución de problemas aditivos

El cuestionario se aplicó a los siete niños que participaron en la segunda etapa del estudio (actividades de secuencia didáctica); el cuestionario se trabajó en una sesión de 60 minutos; cada alumno contestó el cuestionario de manera individual en el salón de clase donde asistían; la consigna fue resolver los problemas; podían apoyarse con dibujos, fichas, o bloques aritméticos multibase. La aplicación se llevó de la siguiente manera:

1. Se entrego a los niños su cuestionario.
2. De forma individual los niños resolvieron los problemas.
3. Si lo niños tenían duda podían preguntar a la aplicadora.

8.3 Análisis de los datos de problemas aditivos

El análisis de los datos se realizó en dos etapas: la primera etapa consistió en el análisis de las producciones de los niños en los cuestionarios y observar si algunas de las categorías de la primera etapa del estudio seguían vigentes y si había categorías diferentes a las antes mencionadas; y la segunda en estudiar ¿qué diferencia hubo de los resultados del cuestionario inicial con el cuestionario final?

8.4 Resultados de la tercera etapa del cuestionario final: problemas aditivos

En esta parte del estudio se describen los resultados del cuestionario de problemas de estructura aditiva. El análisis de los datos consiste en: 1) identificar si las categorías que se presentaron en la primera etapa del estudio siguen vigentes o se han modificado. 2) Descripción del porcentaje de las estrategias empleadas de acuerdo con el tipo y el subtipo de problema, y 3) Sistema de representación externa.

Categorías en la resolución de problemas de estructura aditiva

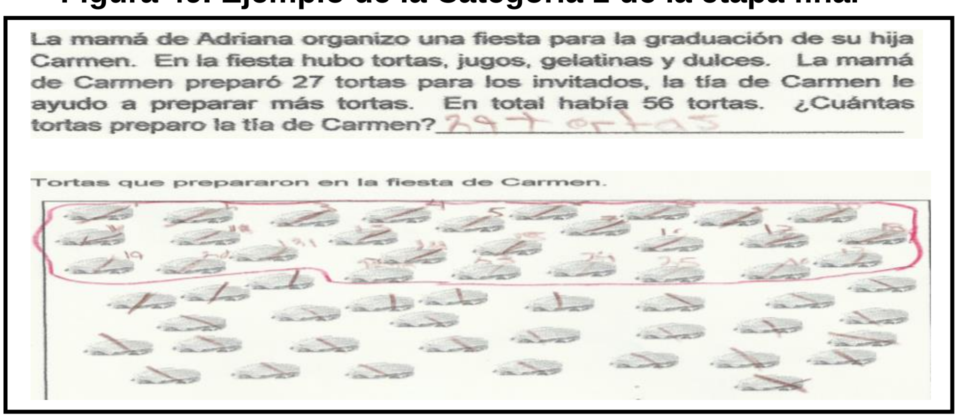
En este apartado del estudio se identificaron estrategias en el proceso de resolución de problemas de estructura aditiva con el modelo matemático funcional. De acuerdo a las estrategias empleadas por los niños para resolver los problemas, las categorías que se presentaron en la resolución del cuestionario final de problemas de estructura aditiva, fueron: *Estrategia de complemento; uso equivocado del algoritmo, uso adecuado del algoritmo; uso del cálculo mental y otra.*

A continuación se describe cada una de ellas y se ejemplifican.

Categoría 1. *Estrategia de complemento* (Tomada de Vergnaud, 2010)

Descripción: En esta categoría a partir de la representación del problema con fichas o dibujos, el niño "busca sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir o quitar al estado inicial para llegar al estado final" (Vergnaud, 2010, p. 172). Representa el minuendo con fichas o dibujos, retira las fichas, tacha o colorea los dibujos que representan el sustraendo; las fichas que quedan o dibujos sin colorear o marcar, son la diferencia; o también puede representar una cantidad inicial con fichas, dibujos o monedas; a ella le añade la cantidad necesaria de objetos para llegar al estado final (a una cantidad deseada); después cuenta el número de objetos, dibujos o fichas que añadió.

Figura 49. Ejemplo de la Categoría 1 de la etapa final

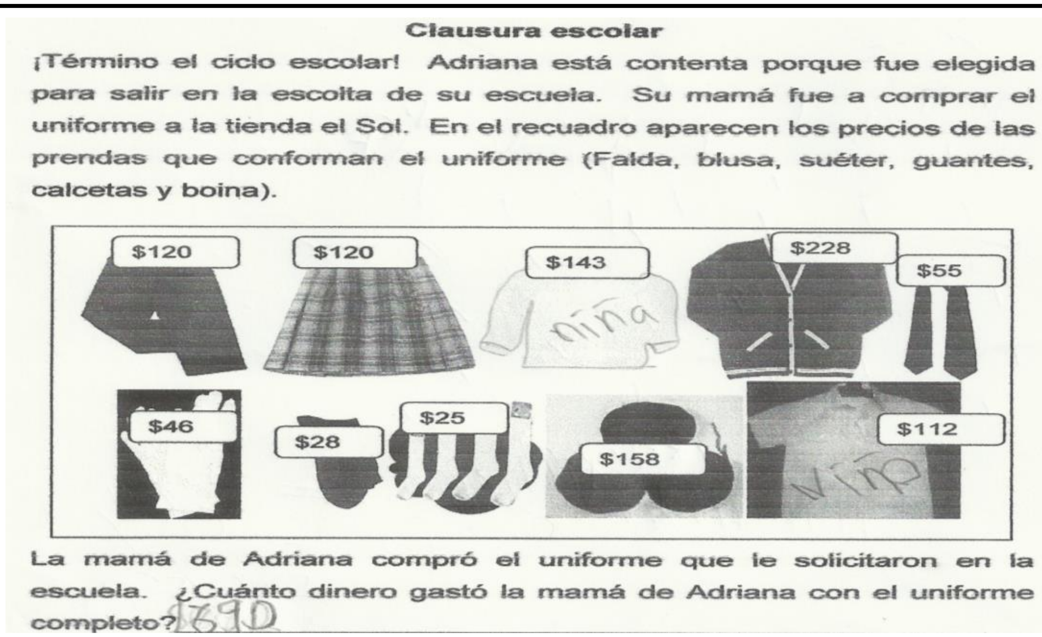


Comentario: El niño se apoyó con el uso de dibujos; el estado inicial fueron todas las tortas de la ilustración; colocó a 27 tortas números del uno al 27 y las encerró; contó las demás tortas oralmente, de una en una y les colocó una marca; hasta encontrar el estado final o resultado.

Categoría 2. ***Uso equivocado del algoritmo***

Descripción: En esta categoría el niño hace la operación contraria a la requerida para resolver el problema; realiza una suma en vez de una resta, o viceversa; también se ubicaron en esta categoría los niños que realizaron el algoritmo de la suma o la resta de manera no adecuada.

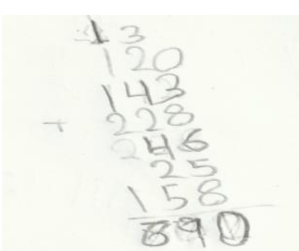
Figura 50. Ejemplo de la Categoría 2 de la etapa final



Clausura escolar

¡Término el ciclo escolar! Adriana está contenta porque fue elegida para salir en la escolta de su escuela. Su mamá fue a comprar el uniforme a la tienda el Sol. En el recuadro aparecen los precios de las prendas que conforman el uniforme (Falda, blusa, suéter, guantes, calcetas y boina).

La mamá de Adriana compró el uniforme que le solicitaron en la escuela. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Adriana con el uniforme completo? 1890

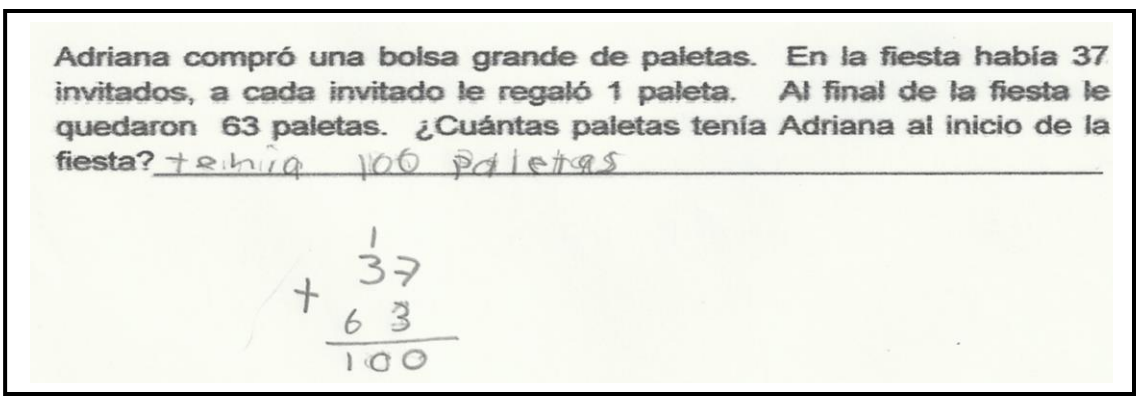


Comentario: El niño identificó los precios de las prendas que iba a comprar la mamá de Adriana; representó la suma de los precios, inició a sumar por el primer sumando, sumó correctamente las unidades; en las centenas no conto bien y se equivocó, por lo tanto también se equivocó en la suma de las centenas y su resultado es equivocado.

Categoría 3. ***Uso adecuado del algoritmo***

Descripción: En esta categoría el niño resuelve por medio del algoritmo de la suma o resta de acuerdo con el problema planteado. En el caso de la suma emplea la estrategia de *contar a partir del sumando mayor* ó *contar a partir del segundo sumando;* se apoya con el conteo con fichas o con los dedos de sus manos; para el algoritmo de la resta, primero resta las unidades y después las decenas; utiliza la estrategia de quitar con el apoyo del conteo de fichas o los dedos de sus manos.

Figura 51. Ejemplo de la Categoría 3 de la etapa final


Adriana compró una bolsa grande de paletas. En la fiesta había 37 invitados, a cada invitado le regaló 1 paleta. Al final de la fiesta le quedaron 63 paletas. ¿Cuántas paletas tenía Adriana al inicio de la fiesta? tenia 100 paletas

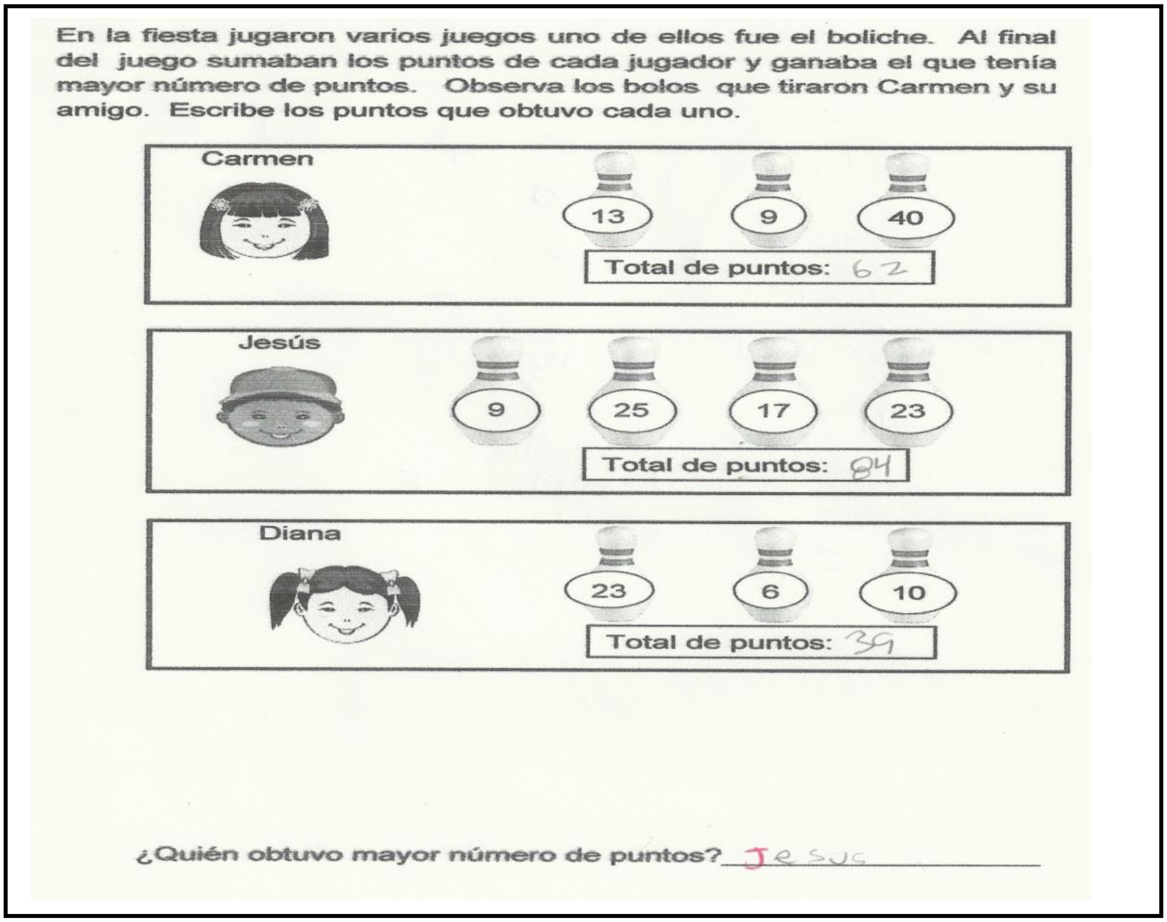
1
37
+ 63
100

Comentario: Al resolver este problema, el niño comprendió de que se trataba y qué se solicitaba en él. Identificó los datos necesarios y resolvió con una adición de manera convencional. Es decir sumó las unidades, inició a sumar a partir del sumando mayor con el uso de sus dedos, después sumó las decenas de la misma manera.

Categoría 4. ***Uso del cálculo mental***

Descripción: En esta categoría el niño suma mentalmente las cantidades; recurre a hechos conocidos, por ejemplo, para sumar 13 + 9 + 40, suma primero las decenas 40 + 10 = 50; continúa con el número mayor de unidades (9), 50 + 9 = 59, y finalmente agrega 3 al 59; 59 + 3 = 62.

Figura 52. Ejemplo de la Categoría 4 de la etapa final



Comentario: El niño no elaboró registros para representar la resolución del problema, sólo escribe los resultados de manera correcta.

Categoría 5. ***Otra***

Descripción: En esta categoría se clasifican las preguntas que los niños contestaron por inferencia, o las respuestas que no tenían relación directa con la pregunta.

Figura 53. Ejemplo de la Categoría 5 de la etapa final

Diana obtuvo 39 puntos, si hubiera tenido 23 puntos más. ¿Tendría los mismos puntos qué obtuvo Carmen o los mismos puntos que obtuvo Jesús? no

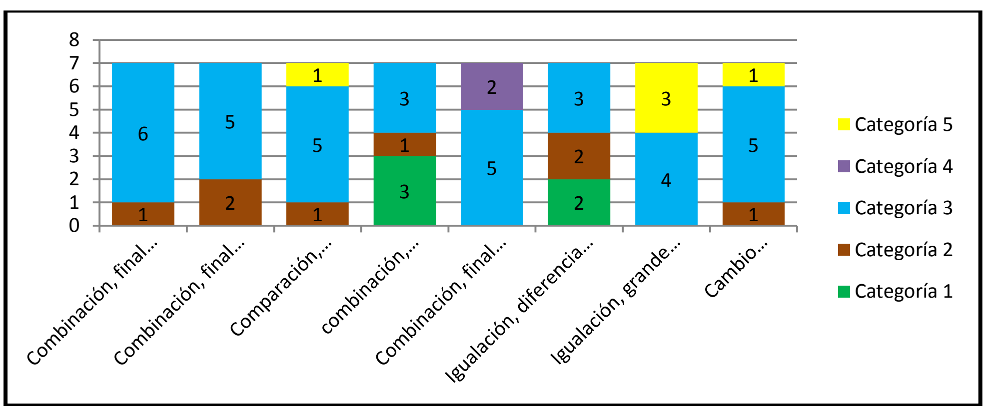
Comentario: Por la respuesta que da el niño, pareciera que no comprendió el problema.

8.5 Frecuencia del uso de las estrategias de acuerdo con el tipo y subtipo de problemas

En esta parte del estudio mostramos la distribución de las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de cada uno de los tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva del modelo matemático funcional.

Cinco estrategias estuvieron presentes en la resolución de problemas aditivos del cuestionario final; los problemas a resolver fueron ocho y los niños participantes en la resolución del cuestionario fueron siete. En total son 56 respuestas, distribuidas en las diferentes categorías.

Figura 54. Categorías que se encontraron en la resolución de problemas de aditivos del cuestionario final



Las categorías son:

1.- Estrategia de complemento

2.- Uso equivocado del algoritmo

3.- Uso adecuado del algoritmo

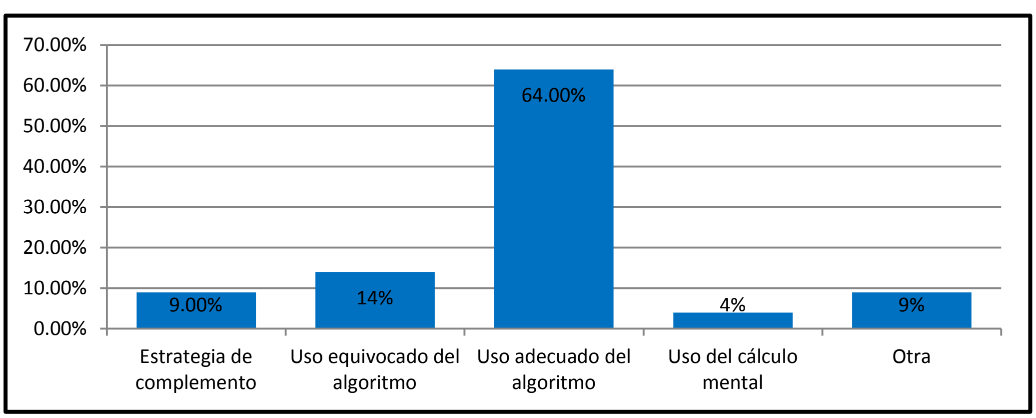
4.- Uso del cálculo mental

5.- Otra

Al analizar la gráfica, nos damos cuenta de que hay categorías que se habían presentado en la primera etapa del estudio (aplicación de cuestionarios iniciales), y se volvieron a presentar en esta etapa del estudio *(Estrategia de Complemento, Uso equivocado del algoritmo* y *Uso adecuado del algoritmo)*. También observamos que categorías como: *Transcodificación literal completa (600506 en vez de 656), Cuenta todo, Transcripción de información del enunciado del problema, y Uso del algoritmo incompleto,* ya no estuvieron presentes en esta etapa del estudio. Se agregaron dos categorías: Uso del cálculo mental y Otra.

La siguiente gráfica presenta el porcentaje de las estrategias empleadas para la resolución de los diferentes problemas de estructura aditiva. Los participantes que contestaron el cuestionario fueron siete niños, y los problemas resueltos fueron 8; el total de respuestas fueron 56. Esas 56 respuestas conforman el 100%; las respuestas de los niños se integraron en cinco categorías.

Figura 55. Porcentajes de las categorías de respuesta en la resolución de problemas aditivos del cuestionario final



De acuerdo con los porcentajes que se muestran en la tabla, la estrategia que más utilizaron los niños en la resolución de los problemas de estructura aditiva fue el *Uso adecuado del algoritmo*, se presento en 36 respuestas (64 %), seguida del *Uso equivocado del algoritmo* (14%); la estrategia del *complemento* que era una de las privilegiadas en la primera etapa, pasó a ser una de las menos utilizadas (9%); dos estrategias que no estuvieron en la primera etapa, surgieron en ésta: *Uso del cálculo mental* (4%) y *Otra* (9%).

A partir de los porcentajes obtenidos se observa que la mayoría de los niños se han apropiado del *Uso adecuado del algoritmo* y los que no, siguen en proceso de consolidación.

8.6 Dificultad en la resolución de los problemas aditivos

En esta parte del estudio presentamos las variables que intervinieron para que un problema generara mayor o menor dificultad en su resolución. También analizamos los problemas que en los niños generaron mayor, mediana y menor dificultad. Las variables que intervinieron para que un problema presentara más dificultad que otro fueron las mismas que se emplearon en la primera etapa.

Los problemas que presentaron menor dificultad fueron: *tipo combinación y subtipo final desconocido*; este problema presentó en la primera etapa del estudio menor dificultad para resolverlo y se mantuvo así hasta la tercera etapa; otro problema que causó menor dificultad fue *combinación con diferencia desconocida*, qué pasó de ubicarse con mediana dificultad en la primera etapa del estudio a una menor dificultad.

Los problemas que presentaron mediana dificultad fueron: el de *tipo igualación y subtipo diferencia desconocida* y el de tipo *cambio disminuyendo y* *subtipo inicio desconocido*; ambos problemas en la primera etapa del estudio se clasificaron como problemas que causaron mayor dificultad en su resolución.

El problema que presentó mayor dificultad fue: el de *tipo igualación, grande desconocido*; este problema se ubico en la primera etapa como uno de los que causo mayor dificultad y en esta etapa del estudio siguió ubicándose de la misma manera.

8. 7 Conclusiones de la tercera etapa del estudio

De acuerdo con los resultados de esta etapa, se observó una evolución entre las estrategias que los niños emplearon en la etapa inicial y ésta. Por ejemplo, en la representación para resolver un problema había más familiaridad con los algoritmos de la suma y la resta, es decir los niños fueron abandonando estrategias intuitivas y empleaban más las estrategias formales.

La representación de los números era adecuada y ya no aparecieron las cantidades literales, por ejemplo de 1005 en vez de 105. Tampoco estaban los números rotados como Ɛ en vez de 3.

Los niños estaban más relacionados con la estructura sintáctica y semántica de los tipos y subtipos de problemas, por ejemplo: al resolver problemas de tipo *combinación con diferencia desconocida*, *igualación grande desconocido* y *cambio disminuyendo con inicio desconocido,* la mayoría de los niños resolvieron satisfactoriamente; leían los problemas, una, dos o tres veces si era necesario hasta comprender el problema y tener claro que se pedía. Ellos representaban interna y externamente la resolución de los problemas, en ocasiones pensaban en voz alta y resolvían los problemas.

Algunas estrategias que los niños utilizaron para resolver los problemas en la etapa inicial con relación a ésta, cambiaron; por ejemplo: la *transcodificación literal completa (600506 en vez de 656), cuenta todo, transcripción de información del enunciado del problema* y *uso del algoritmo incompleto,* ya no aparecieron en ésta etapa. El *uso adecuado del algoritmo* en la primera etapa presentaba el 18%, en ésta etapa presentó el 64%. La *estrategia del complemento* en el cuestionario de diagnóstico tenía un 41. 3 % en su utilización, era la más empleada por los niños, en la etapa final sólo tenía el 5 %.

Aspectos como los mencionados son indicios del avance de los estudiantes en la resolución de problemas aditivos. Los resultados de ésta etapa son producto del trabajo de las etapas anteriores. Elementos como la observación, indagación, adecuación de actividades, participación, reflexión, comunicación, entre otros; fueron primordiales en el desarrollo de todas las etapas.

CONCLUSIONES GENERALES

Los objetivos del estudio fueron: 1) Investigar las estrategias y las representaciones externas que hacen los niños al resolver problemas aditivos. 2) Diseñar una secuencia didáctica que integre tipos y sub-tipos de problemas aditivos para trabajar con los niños de 2° grado de educación primaria. 3) Verificar la viabilidad de la secuencia. Con relación a los resultados de las tres etapas se concluye que:

Los niños elaboran ideas intuitivas del SND antes de la adquisición de las reglas formales. La adquisición de las reglas del SND en los primeros grados repercute en el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta.

Consideramos que sí los docentes conocieran el pensamiento matemático infantil y las reglas intuitivas que los niños elaboran antes y durante la instrucción escolar; tendrían más herramientas para diseñar actividades que favorezcan en sus estudiantes el pasaje del conocimiento de las reglas intuitivas del SND a las reglas formales del mismo. También, el docente interpretaría las escrituras que sus alumnos elaboran; por ejemplo: sí un niño escribe 10025 en vez de 125, lo vería como parte de su proceso en la adquisición del SND y no como un error.

Por otra parte, la resolución de problemas de estructura aditiva es un tema complejo en el que intervienen varios elementos; para trabajarlo con los niños, el docente requiere conocer los diferentes tipos y subtipos de problemas, los aspectos que hacen que uno u otro problema sea más complicado, las estrategias para resolverlos, entre otros.

Los niños representan externamente la resolución de los problemas aditivos de diferentes maneras, las cuales son válidas; pues las situaciones individuales de los niños propician un desarrollo cognitivo diferente. Los soportes de representación que los niños elaboran para resolver un problema aditivo se ven influidos por las situaciones didácticas implícitas en el mismo problema, y los procesos cognitivos de los alumnos. El docente, con el conocimiento de las diferentes formas de representación externa, de la resolución de problemas, puede favorecer la potencialidad de sus estudiantes para resolver diferentes problemas aditivos.

En ese sentido, la enseñanza y el aprendizaje en la resolución de problemas aditivos con los niños participantes en el estudio propiciaron el desarrollo de diferentes competencias; éstas fueron organizadas por esquemas y se vieron reflejadas en el comportamiento de los niños. Pues los niños al resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos, desarrollaron competencias como: comprender los problemas, razonar los procedimientos para resolver uno u otro problema, argumentar sus formas de representar la resolución, su expresión oral y escrita al interactuar ideas y comunicar sus resultados a compañeros y la aplicadora, y sobre todo la autonomía en la decisión de resolver por uno u otro procedimiento sin necesidad de preguntar ¿qué hago aquí maestra?, ¿es de suma o de resta?

De acuerdo con el estudio realizado se considera primordial para una mejor práctica docente de los problemas aditivos, el conocimiento del docente del contenido matemático, pedagógico, didáctico, del pensamiento infantil; con esos elementos propiciar el pasaje del conocimiento intuitivo de sus estudiantes al conocimiento formal. Pues el responsable directo de la enseñanza y aprendizaje de sus alumnos es el profesor frente a grupo.

La literatura nos ilustró para conocer lo que investigadores han indagado de la resolución de los problemas aditivos y retomar aspectos para el desarrollo de éste estudio. De igual manera esperamos que nuestro estudio contribuya al mejoramiento de la práctica docente de otros profesores; sin embargo no hay modelos para la enseñanza en el aula, el profesor debe realizar adecuaciones en función de las características particulares de sus estudiantes y de los objetivos específicos qué desea lograr con ellos.

Al desarrollar ésta investigación se reflexionó en lo fundamental que es atender los procesos que los niños elaboran al resolver un problema aditivo y no sólo tomar en cuenta el resultado final; dar atención a las inquietudes, dudas y participaciones de los estudiantes y construir en conjunto su conocimiento. Es pertinente mencionar que todas las acciones desarrolladas a lo largo del estudio fueron pensadas exclusivamente en los niños con quiénes se trabajo, con un fin especifico.

En general los resultados del estudio fueron satisfactorios, lo cual es un referente de que los niños pueden aprender más a resolver diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos y de diversas maneras; cuando el docente tiene tiempo de indagar el tema, elaborar un diagnóstico, pensar y diseñar actividades exclusivamente para un grupo de alumnos, reflexionar los procesos de los niños y adecuar las actividades de acuerdo a las características de sus estudiantes y los objetivos que desea lograr con ellos.

Implicaciones didácticas

Las implicaciones didácticas para trabajar la resolución de problemas de estructura aditiva con los niños de primaria es una gran tarea para los profesores y los estudiantes; principalmente para los primeros. Se considera que las implicaciones fundamentales para trabajar este tema, son: el conocimiento del profesor en el contenido matemático, pedagógico, didáctico y el pensamiento infantil.

Con estos elementos el profesor podría diseñar actividades que incidan de manera benéfica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes. También el docente tendría herramientas para dar seguimiento adecuado al proceso de sus estudiantes en la resolución de los diferentes tipos y subtipos de problemas aditivos.

Aunado a las implicaciones mencionadas, de igual forma está el compromiso que como docentes se tiene con la labor educativa y el gusto con su profesión; aspectos que conllevan a la apertura de otras formas de enseñanza, donde se pone de manifiesto la creatividad e innovación a favor del aprendizaje de los estudiantes. En ese proceso profesor y estudiantes son protagonistas de la enseñanza y aprendizaje, pues ambos son participes de la construcción de conocimientos de manera reflexiva y argumentada.

FUENTES DOCUMENTALES

Alvarado, M. y Ferreiro, E. (2000). El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años. *Revista Latinoamericana de Lectura (Lectura y Vida)*, 21(1), 6-17.

Bermejo, V. y Bermejo, M. (2004). Aprendiendo a sumar y restar. En: *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Coord. Vicente Bermejo. España. CCS. Capítulo 2, pp. 51-70.

Brizuela, B y Cayton, G. (2010). Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. *Cultura y educación. Revista de teoría, investigación y práctica.* Fundación, Infancia y Aprendizaje 22(2), 149-167.

Cantero, A., Hidalgo, A., Merayo, B., Primo, F., Sanz, A. y Vega, A. (2003). Resolución de problemas aritméticos en educación primaria. Consultado en: http://www.omerique.net/twiki/pub/Recursos/DocumentoModularArticulado *De Mamemáticas En Educ Primaria/Resolucin_problemas_Ponferrada.pdf*

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1996). *Los números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1992). *Problemas aritméticos de dos etapas*. Departamento de Didáctica de la Matemática José Gutiérrez, Departamento de Pedagogía, Universidad de Granada. España.

Cortina, J. (1997). *Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grado.* Tesis de Maestría en Educación, UDLA. D.F.

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños.* Argentina, Paidós. Capítulos 5 y 6, pp. 113-163.

Delprato, M. F. y Fuenlabrada, I. (2009). El cajero. Cinvestav-Sede Sur, Departamento de Investigaciones Educativas, Documento 64, pp. 9-14. México.

Díaz, Y. y Butto, C. (2011). Adquisición del concepto de adición por niños de primer y segundo grados de primaria de una escuela pública del estado de Morelos. En López, G. Roger, S. y Reyes, M. A. (Editores), *Investigación en comunicación humana: Problemas, intervenciones y nuevas tecnologías,* (pp. 97, 122.) México, Ediciones Mínimas.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. España, Síntesis.

Eisner, E. (1998). El ojo ilustrado. *Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España, Paidós. Capítulo 2, pp. 43-57.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Quinta edición). Perú, Mc Graw Hill. Capítulos 1 y 5, pp. 2-23 y 76-89.

INEE [Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación]. (2010). *México en PISA 2009.* México: INEE. Capítulos 1 y 5, pp. 13-26 y 99-114.

INEE [Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación]. *Acerca de los EXCALE*. Obtenido el 4 de abril de 2011 de: http://www.inee.edu.mx/. México: INEE.

INEE [Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación]. (2008). *Estudio comparativo del aprendizaje en sexto de primaria en México 2005 – 2007: español y matemáticas.* México: INEE.

Kamii, C. (1996). La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética. En: *Perspectivas, XXVI,* 107-119.

Lerner, D. (1997). *La matemática en la escuela. Aquí y ahora.* Argentina. Aique, Capítulo 4, pp. 155-184.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (2010). El sistema de numeración: Un problema didáctico. En: *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Comps. Parra, C. y Saiz, I. México. Paidós. Capítulo 5, pp. 95-182.

Luceño, J. L. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula.* España. Aljibe.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En: *Didáctica de la matemática en la educación primaria.* Editor Castro, E. España. Síntesis. Capítulo 7, pp. 151-175.

Maza, C. (1999). *Enseñanza de la suma y la resta*. España, Síntesis. Capítulo 1 y 2, pp. 17-35.

Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Revista *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*, *7*(1), 2002. http://www.if.ufrgs.br/ienci. Traducción de Isabel Iglesias. Brasil.

Parra, C y Saiz, I. (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos. De la exploración al dominio.* Argentina, Homo Sapiens. Capítulo 1, pp. 17-40.

Peltier, M. L. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. En: Revista *Educación Matemática*, vol. 15, número 003. México, Santillana, pp. 29-55.

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares.* España, Síntesis.

Ressia, B. (2003). La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel Inicial y el primer año de la EGB. En: *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* Comp. Mabel Panizza. Argentina, Paidós. Capítulo 3, pp. 73-128.

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S. y Tiéche Christinat, C. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. En: *Infancia y aprendizaje*, 90, 31-50.

SEP. [Secretaría de Educación Pública]. (2007). *Programa Sectorial de Educación 2007 – 2012.* México: SEP.

SEP. [Secretaría de Educación Pública]. (1993). *Educación Básica. Primaria. Plan y Programas de Estudios.* México: SEP.

SEP. [Secretaría de Educación Pública]. (2006). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios.* México: SEP.

SEP. [Secretaría de Educación Pública]. (2009). *Educación Básica. Primaria. Plan de Estudios.* México: SEP.

SEP. [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Educación Básica. Primaria. Plan de Estudios.* México: SEP.

SEP. Subsecretaría de educación básica (2010). *Libro de Texto Matemáticas 1er grado.* México. SEP.

SEP. Subsecretaría de educación básica (2010). *Libro de Texto Matemáticas 2° grado.* México. SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. *Enlace 2011*. Obtenido el 23 de abril de 2011 de: http://www.enlace.sep.gob.mx/ba/

Terigi, F. y S. Wolman (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. En: *Revista Iberoamericana de Educación*, 043(4), 59-83.

UNESCO LLECE. (2008). *Resumen Ejecutivo del Primer Reporte de Resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.* Chile: UNESCO, LLECE.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales en *Recherches en Didáctique des Mathématics.* Traducción de Godino, J. D. Vol. 10 n° 2. 3. Pp. 133-170.

Vergnaud, G. (2010). Los problemas de tipo aditivo. En: *El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas, 1991 (reimpresión 2010).

ANEXOS

Anexo I

Cuestionario inicial de escritura numérica

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL-AJUSCO
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Escuela: ____
Nombre: ____
Grado: ____
Fecha: ____

CUESTIONARIO INICIAL SOBRE ESCRITURA NUMÉRICA

1.- Cuenta del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	32	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.- Dictado de números

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

3.- Escritura de números

6 ____

19 ____

109 ____

5 ____

39 ____

199 ____

9 ____

50 ____

1019 ____

3 ____

110 ____

3585 ____

10 ____

115 ____

1000 ____

5895 ____

4.- Coloca el número que va antes y el número que va después

______ 1 ______

______ 5 ______

______ 7 ______

______ 9 ______

______ 11 _______

______ 101 ______

______ 110 _______

______ 1019 ______

______ 3585 ______

______ 1000 ______

______ 5895 ______

______ 47 ________

______ 149 ________

_______ 99 ________

Anexo II

Cuestionario inicial de problemas aditivos

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL-AJUSCO
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Escuela: ____
Nombre: ____
Grado: ____
Fecha: ____

¡VAMOS A RESOLVER PROBLEMAS!
Resuelve los siguientes problemas; si deseas apóyate con dibujos y realiza las operaciones necesarias.

1.- Luis y Susana son amigos y están organizando una fiesta para su graduación. Luis está juntando el dinero de los estudiantes de 6º “A” y Susana está juntando el dinero del 6º “B” Luis lleva 166 pesos y Susana 133 pesos. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos?_________
____

Luis			
Susana			
¿Cuánto tienen los dos?			

2.- En un juego de canicas, Gabriel ganó 27canicas y Mario ganó varias. Los dos juntos tienen 89 canicas. ¿Cuántas canicas son de Mario? ____Si deseas resuelve el problema con dibujos.

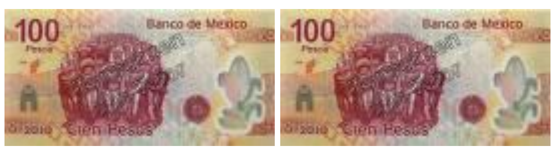
Juego de canicas	**Gabriel**	**Mario**
Canicas que cada uno tiene		
Los dos juntos tienen		

3.- El sábado Alejandro fue a la feria con sus papás, jugó tiro de dardos, en el primer tiro ganó algunos puntos y en el segundo tiro ganó 75 puntos. Después de dos tiros llevaba 150 puntos. ¿Cuántos puntos ganó en el primer tiro?______________________________

Tiros	**Puntos**
1er	
2do	75 puntos
Total	150 puntos

¿Cómo descubriste la cantidad de puntos que ganó Alejandro en el primer tiro de dardos?_____________________________________

4.- Enrique tenía $ 434°° ahorrados, en su cumpleaños su abuelita le regaló $222°° ¿Cuánto dinero tiene ahora Enrique?_______________

Enrique Tenía			
Su abuelita le regala			
Ahora tiene			

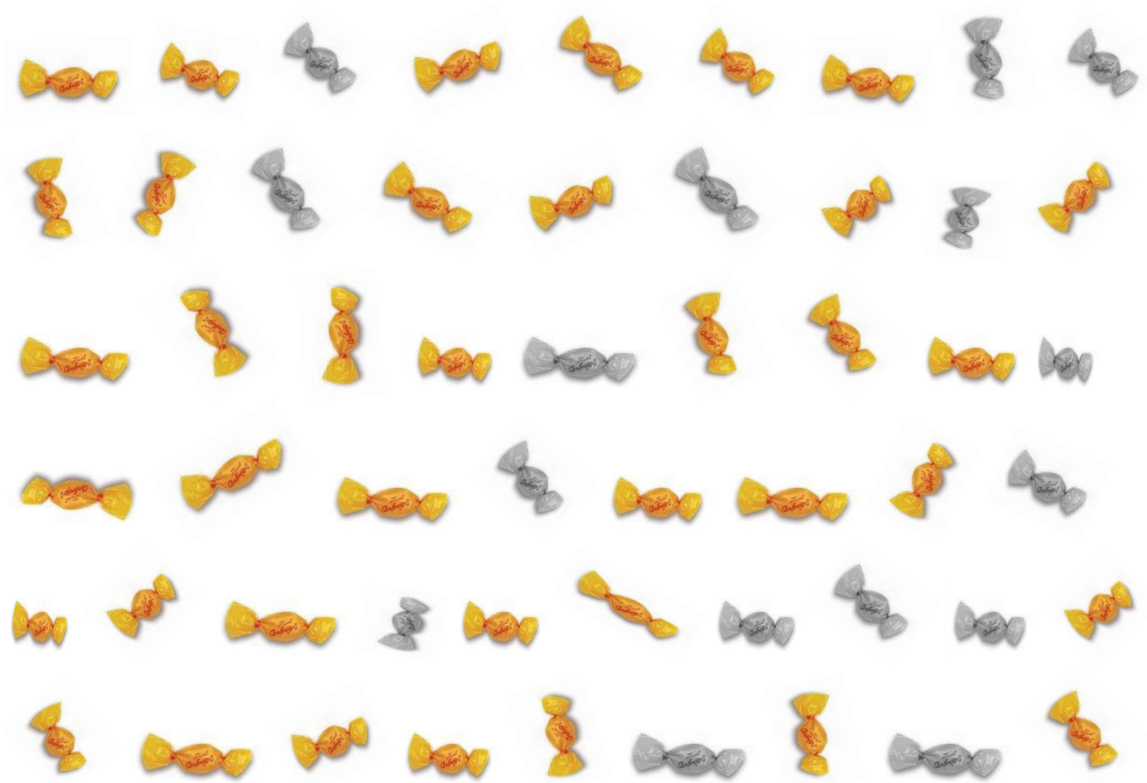
¿Cómo descubriste la cantidad de dinero que tiene ahora Enrique?
____

5.- Mónica tenía 36 dulces, el sábado fue a la fiesta de Judith, ahí le dieron algunos más. Ahora Mónica tiene 89 dulces. ¿Cuántos dulces le dieron a Mónica?___________________________________

6.- Miguel tenía algún dinero, su papá le dio 30 pesos más para comprar su lunch. Ahora Miguel tiene 42 pesos. ¿Cuánto dinero tenía al principio?____

Miguel tenía dinero		
Su papá le dio		
Ahora Miguel tiene		

7.- En la fiesta de cumpleaños de Enrique cayó la piñata**,** Laura ganó 54 caramelos, le dio 26 a Mónica. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Laura?____



8.- Zayra fue a la fiesta de Enrique, al romper la piñata ganó 60 caramelos, le dio algunos a Rita. Ahora Zayra tiene 18 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio a Rita?___________________________

9.- Julieta tenía algunos juguetes, le dio 85 a Saúl. Ahora Julieta tiene 46 juguetes. ¿Cuántos juguetes tenía al principio Julieta?__________

____

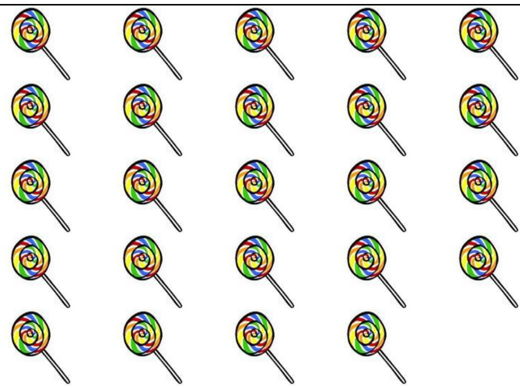
10.- Al final de un juego de canicas Jorge tiene 33 canicas y Miguel tiene 58 canicas más que Jorge. ¿Cuántas canicas tiene Miguel?____

Juego de canicas	**Jorge**	**Miguel**
Canicas que cada uno tiene		

11.- Don Hugo vende ricos helados, hoy vendió 67 helados de fresa y 45 de vainilla. ¿Cuántos helados de fresa vendió más que de vainilla?____

12.- Julio y Susana están jugando serpientes y escaleras, Julio va en una casilla, Susana va en la casilla número 46, tiene 13 puntos más que Julio. ¿En qué casilla va Julio?__________________________

13.- Ana compró 24 paletas. Sandra compró 37 paletas más que Ana. ¿Cuántas paletas tiene Sandra?______________________________

Ana	**Sandra**
	

¿Cómo descubriste la cantidad de paletas que tiene Sandra?

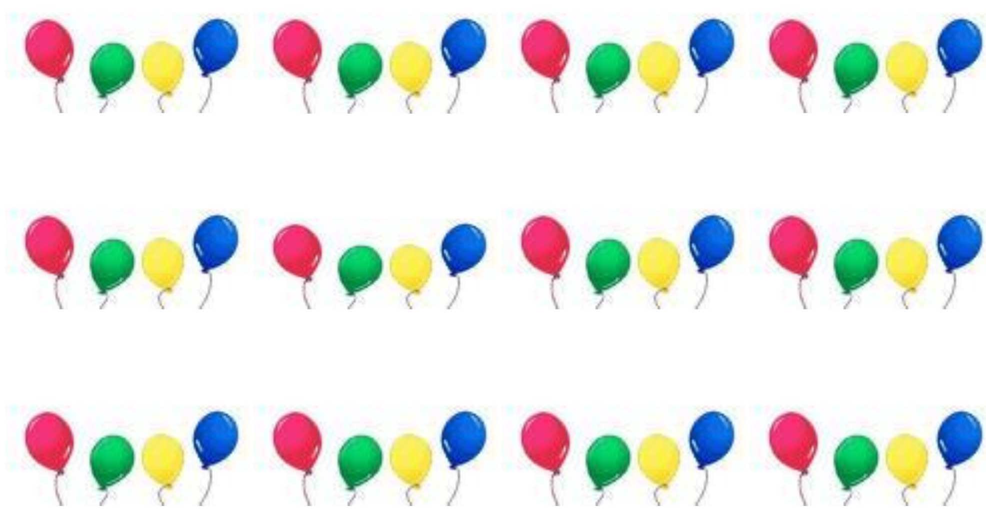
____

____

14.- En el cumpleaños de Enrique**,** su mamá infló 48 globos. Alicia infló 15 menos. ¿Cuántos globos infló Alicia?____________________

____

Globos que infló la mamá de Enrique



15.- Patricia tiene 84 pesos. Sandra tiene 59. ¿Cuántos pesos necesita Sandra para tener los mismos pesos que tiene Patricia?____

Patricia		
Sandra		

Anexo III

Secuencia Didáctica

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL – AJUSCO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO, LINEA

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"ACTIVIDADES PARA TRABAJAR PROBLEMAS DE SUMA

Y RESTA CON NIÑOS DE SEGUNDO GRADO DE

PRIMARIA"

NOMBRE: ____

GRUPO: ____

ANTES Y DESPUÉS

- Actividad: Antes y después
- Objetivo: Que los alumnos reconozcan que antes y después de un número hay otro.
- Contenido Matemático: Antecesor y sucesor de un número.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Tres juegos de tarjetas con números del 0 al 9.
- Procedimiento:

  1.- Se organiza al grupo en equipos de 3 o 4 niños.

  2.- A cada equipo se le asignan tres juegos de tarjetas.

  3.- En equipo, depositan las tarjetas en 1 bolsa.

  4.- Un integrante del equipo pasa al frente, saca 2 tarjetas (posteriormente 3) y con ellas forma 1 número. Los demás niños deben anotar en una hoja blanca el número que va antes y el que va después del que formó su compañero.

  5.- Los integrantes del equipo muestran sus números y los leen a sus compañeros; gana el niño que tenga correctos el antecesor y sucesor de dicho número.

  6.- Después, pasará otro niño a formar un número; los demás anotan los antecesores y sucesores (Cada integrante pasa dos veces).

- Consideraciones previas: Después de un tiempo considerable para escribir el antecesor y sucesor de determinado número, es relevante escuchar el argumento de cada uno de los niños respecto a los números que anotaron.
- En un inicio sacan 2 tarjetas, posteriormente 3 tarjetas.

REGISTRO DE NÚMEROS ANTECESORES Y SUCESORES			
Antecesor	Número que se formó	Sucesor	¿Por qué crees que sean esos números el antecesor y sucesor?
Nombre del alumno:____			

ANTES Y DESPUÉS

Anota los números que formaron en el juego de “Antes y después” y contesta las preguntas.

_________ ¿Cuántas unidades hay?_______________________________

¿Cuántas decenas hay?_______________________________

¿Cómo lo supiste?_____________________________________

_________ ¿Cuántas unidades hay?_______________________________

¿Cuántas decenas hay?_______________________________

¿Cómo lo supiste?_____________________________________

_________ ¿Cuántas unidades hay?_______________________________

¿Cuántas decenas hay?_______________________________

¿Cuántas centenas hay?_______________________________

¿Cómo lo supiste?_____________________________________

_________ ¿Cuántas unidades hay?_______________________________

¿Cuántas decenas hay?_______________________________

¿Cuántas centenas hay?_______________________________

¿Cómo lo supiste?_____________________________________

_________ ¿Cuántas unidades hay?_______________________________

¿Cuántas decenas hay?_______________________________

¿Cuántas centenas hay?_______________________________

¿Cómo lo supiste?_____________________________________

Con los antecesores y sucesores de los números que formaron, forma series numéricas, una que inicie con el antecesor y termine con el sucesor; y otra que inicie con el sucesor y termine con el antecesor.

Primera serie: ___________________________

____

Segunda serie: ___________________________

____

Tercera serie: ___________________________

____

Cuarta serie: ___________________________

____

Quinta serie: ___________________________

____

Sexta serie: ___________________________

____

SERPIENTES Y ESCALERAS

- Actividad: Serpientes y escaleras
- Objetivo: Que los alumnos sumen y resten números mentalmente.
- Contenido Matemático: Suma y resta de números mentalmente.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Juego “Serpientes y escaleras”, 2 dados y dos fichas (Por bina).
- Procedimiento:

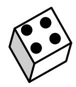
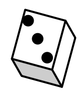
  1.- Se organiza al grupo en binas y a cada una de ellas se le proporciona un juego de “Serpientes y escaleras”, dos dados y dos fichas.

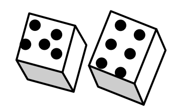
  2.- Por turnos, cada jugador lanza los dados, suma los puntos de estos y avanza los lugares que se indiquen. Cuando una ficha llegue en un número en donde este la cola de una serpiente la ficha bajará hasta la cabeza de la serpiente. Si la ficha llega al número donde esta la parte baja de una escalera, subirá por ella hasta donde termine.

  3.- Gana el jugador que llegue primero a 100.

- Consideraciones previas: El juego puede ser en binas o en equipos de 3 o 4 integrantes.

Serpientes y escaleras

Lulú y sus amigos jugaron serpientes y escaleras. Por turnos tomaban dos dados, los lanzaban y de acuerdo a los puntos que se indicaran en estos, eran los puntos que avanzaban. Por ejemplo si alguien lanzaba los dados y caían así:   sumaba 4+3 = 7, y avanzaba 7 lugares.

A Rocío en la primera tirada le salieron sus dados así: 

¿Cuántos lugares tenía que avanzar?_____________________

En el número 11 hay una escalera que la conduce al número 39.

¿Cuántos lugares más avanzó Rocío?____________________

Luis ya iba en la casilla 75, pero le salió una serpiente y tuvo que regresar 40 casillas. ¿En qué número de casilla va?__________

Adriana va en la casilla 66. ¿Cuántas casillas le faltan para llegar al 100?____

Raúl va en la casilla 65 y Susana va 12 casillas más adelante. ¿En qué casilla va Susana?____________________________

JUEGO DEL CAJERO

- Actividad: Juego del cajero
- Objetivo: Que los alumnos comprendan algunas regularidades del SND (Agrupamiento y desagrupamiento, valor posicional).
- Contenido Matemático: Agrupamiento, desagrupamiento y valor posicional del SND.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Tres dados (azul, rojo y amarillo), fichas azules, rojas y amarillas para cada equipo.

- Procedimiento:

  1.- Se organiza al grupo en equipos de 3 o 4 niños.

  2.- Se organiza un banco con las fichas y se designa a un integrante del equipo como cajero.

  3.- Los jugadores por turnos tiran los dados y piden al cajero fichas de uno, de diez o de cien en función de lo que los dados indiquen. Cada vez que se reúnan 10 fichas del mismo valor deben cambiarse por una del valor inmediato superior.

  4.- Gana el primer jugador que logre reunir una cantidad de fichas preestablecida. (En un primer momento decenas, posteriormente centenas).

- Consideraciones previas: El material que se emplee puede variar. Solicitar a los niños ir registrando en una tabla (de tres columnas cuyos encabezados serán centenas, decenas y unidades) los resultados de sus tiradas, uno debajo del otro, destacando lo obtenido una vez realizados los cambios.

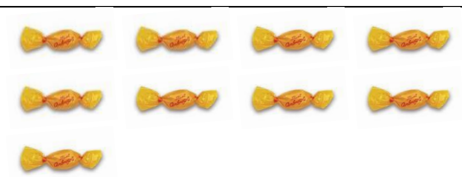
Registro de tiradas en el juego "el cajero"				
Nombre del jugador:				
Número de tirada	Centenas	Decenas	Unidades	Total

Registro de salidas de dinero en el banco del juego "el cajero"					
Nombre del cajero:					
Nombre del jugador	Número de tirada	Centenas	Decenas	Unidades	Total

La tía Lola

Mi tía Lola vive en Celaya, ella prepara ricos dulces de leche, para después venderlos. Al inicio, vendía pocos dulces, sólo por piezas. Los dulces son deliciosos, por lo tanto, los clientes fueron aumentando. ¡Llegaban y pedían 12 dulces, 16 dulces, o más! Mi tía contrató a dos personas para que le ayudaran, ¡aún así no se daban abasto pues el negocio seguía en crecimiento! y además se tardaba mucho en contar los dulces para despacharlos. Entonces se le ocurrió una idea, ¡hacer bolsitas de 10 dulces, así cuando los clientes llegaban y pedían era más sencillo hacer el conteo de los dulces y despachar!

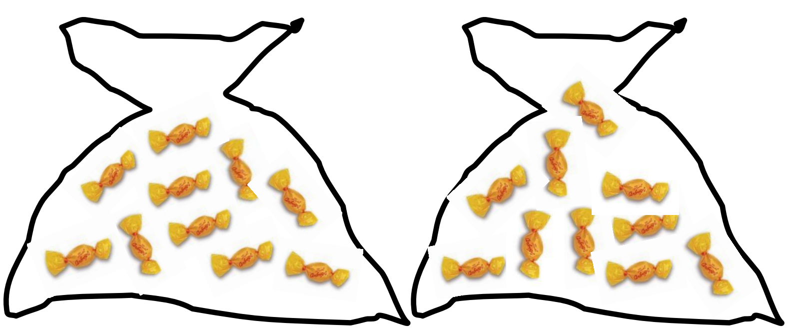
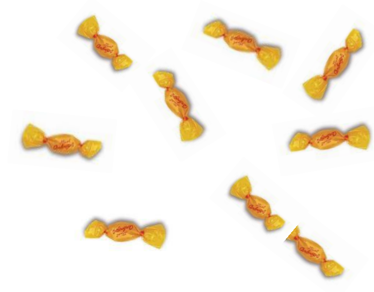
Sí un cliente llega a comprar 9 dulces; ella despacha así:

Dulces sueltos
9


Sí otro cliente llega y compra estos dulces. ¿Cuántos son?

Dulces sueltos


Cuando una persona llega y pide 29 dulces; ella despacha así:

¿Cuántos dulces tiene cada bolsa?________ ¿Cuántos bolsas con dulces son?_________	¿Cuántos dulces sueltos son?________
	

Anota y dibuja

¿Cómo crees que despache la tía Lola, cuando llega un cliente y le pide 38 dulces?

Bolsas de 10 dulces: ________________	Dulces sueltos: _____

Para despachar 93 dulces ¿Cuántas bolsas y cuántos dulces sueltos, deberá dar?____

Bolsas de 10 dulces: _______________	Dulces sueltos:_____

Un señor llegó a comprar 8 bolsas de 10 dulces y 4 dulces sueltos. ¿Cuántos dulces en total le dieron?____________________________

¿Cómo llegaste a obtener el total de dulces?_____________________

____

Como te habrás dado cuenta la idea de la tía Lola fue muy buena, sin embargo en una ocasión llegó una señora que dijo, tendría una fiesta para su hijo; por lo tanto necesitaba 530 dulces. En la tienda iniciaron a contar los dulces por bolsas de 10 en 10; aunque tardaban menos que si contaran de uno en uno. A la tía Lola se le ocurrió empaquetar dulces en cajas. Cada caja tendría 10 bolsas de 10 dulces cada una.

¿Cuántos dulces en total, tiene una caja?_______________________

¿Cómo quedarían empaquetados 530 dulces, si se utilizan cajas y bolsas?___ ____

Realiza el dibujo

Cajas de dulces con 10 bolsas de 10 dulces cada una: __________________	Bolsas de 10 dulces:___________	Dulces sueltos:_______

Sí tú le ayudarás a vender a la tía Lola, ¿Cómo despacharías 650 dulces?____

Anota y dibuja

Cajas de dulces con 10 bolsas de 10 dulces cada una: __________	Bolsas de 10 dulces cada una: _________	Dulces sueltos: ________________

Un cliente llegó a comprar 5 cajas, 8 bolsas y 4 dulces sueltos.
¿Cuántos dulces en total le dieron?____________________________

¿Cómo llegaste a obtener el total de dulces?______________________
____

Otro cliente llegó a comprar 9 cajas, 9 bolsas y 9 dulces sueltos.
¿Cuántos dulces en total le dieron?____________________________

¿Cómo llegaste a obtener el total de dulces?______________________
____

¿CUÁNTOS HAY?

- Actividad: ¿Cuántos hay?
- Objetivo: Que los niños empleen el conteo, agrupamiento y comparación de cantidades para reflexionar en algunos principios del SND (valor posicional).
- Contenido Matemático: Conteo, agrupamiento y comparación de cantidades.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Fichas de plástico, cartulinas con dibujos de 6 círculos cada una, hojas de papel bond cuadriculado, marcadores.
- Procedimiento:

  1.- A cada niño se le entrega 1 cartulina, 1 marcador y 170 fichas.

  2.- Con el material, deben formar 6 grupos (cada grupo dentro de 1 círculo), con la cantidad que deseen, de manera que no les sobren fichas. A cada grupo le registran el número de elementos que lo integran.

  3.- Muestran sus agrupamientos a sus compañeros y realizan comparaciones entre los grupos de los diferentes círculos. Contestan a preguntas como:

  Sí comparas el círculo 1 y 2, ¿dónde hay más fichas?, ¿dónde hay menos?

  ¿Hay grupos que tengan la misma cantidad de fichas?, ¿cuántas fichas debemos retirar para que haya la misma cantidad en el círculo 3 y 4?, ó ¿cuántas fichas debemos agregar para que haya la misma cantidad en los dos grupos?

  ¿Cuántas fichas hay en total?

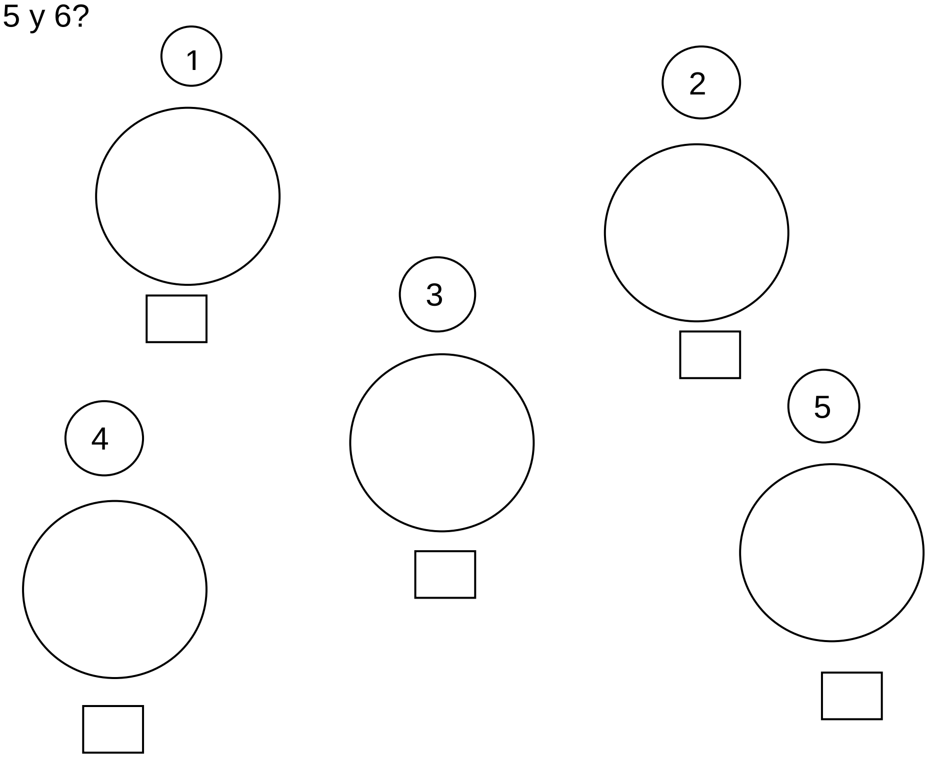
  ¿Sí quitamos dos círculos, cuántas fichas quedan?

  4.- De forma individual los niños elaboran una gráfica que represente la cantidad de fichas de cada grupo (círculo). Muestran las gráficas y realizan comparaciones, auxiliándose de preguntas similares al paso 3.

- Consideraciones previas: A cada niño se le entrega una cartulina como el dibujo de la página 15 para elaborar sus agrupaciones.
- Para la elaboración de gráficas se proporciona a los niños hojas impresas (cada cuadrícula representa 1 elemento) como se muestra en la página siguiente.

¿Cuántos hay?

Con las fichas que te proporcionen elabora una agrupación en cada círculo y anota, ¿cuántas fichas hay en los grupos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?



Elabora una gráfica que represente la cantidad de fichas de cada grupo

Círculo 1	Círculo 2	Círculo 3	Círculo 4	Círculo 5

Observa tus agrupaciones y contesta:

1. ¿En cuál círculo hay más dulces?_________________________
2. ¿En cuál círculo hay menos dulces?_______________________
3. Sí comparas el círculo 1 y 2, ¿dónde hay más dulces?____
4. ¿Dónde hay menos?___________________________________
5. ¿Hay grupos que tengan la misma cantidad de dulces?, ¿cuáles son?____
6. ¿Cuántos dulces debes retirar para que haya la misma cantidad en el círculo 3 y 4?, ó ¿cuántos dulces debes agregar para que haya la misma cantidad en los dos grupos?_________________
____
7. ¿Cuántos dulces hay en total?___________________________
8. ¿Sí quitas dos círculos, cuántos dulces quedan?____

VARIAS MANERAS DE ENCONTRAR UN NÚMERO

- Actividad: Varias maneras de encontrar un número.
- Objetivo: Que los alumnos reflexionen acerca de la propiedad asociativa de un número así como de la descomposición de este.
- Contenido Matemático: Suma y resta de cantidades con unidades, decenas y centenas.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Dos lienzos de tela impresos con el juego "Varias maneras de encontrar un número" (Uno con cantidades que contengan unidades y decenas, otro con cantidades que contengan centenas y unidades de millar), tarjetas con números del juego.

- Procedimiento:

  1.- Se coloca el lienzo de tela en el piso (El que contiene cantidades con unidades y decenas) y se reparte a cada niño una tarjeta.

  2.- Por turnos los niños deberán dar un salto en las cantidades que al sumarlas o restarlas formen el número de la tarjeta. (Pueden ser varias formas, por lo menos 2).

  3.- Después de que todos los niños han jugado una vez deben registrar lo siguiente: ¿Qué número te salió? y ¿de cuántas maneras formaste el número?

  4.- Se vuelven a repetir rondas de juego, de acuerdo al número de niños.

  5.- Se juega de manera similar con el lienzo de tela que contiene el juego impreso con cantidades que contienen centenas y unidades de millar.

  - Consideraciones previas: Cuando los niños forman el número que les salió en la tarjeta, argumentan el por qué creen que al sumar o restar determinadas cantidades se forma dicho número.
  - Las impresiones del juego en las telas son similares a las que se integran en la siguiente página.

Varias maneras de encontrar un número

12 60 5 10

22 8 25

30 17

92 46 80

Varias maneras de encontrar un número

225 18 100

650

125

500 250

130

1000

220 300 120

Después de haber jugado, registra lo que se te pide:

¿Qué número te salió en la primera tarjeta?_____________________

¿De cuántas maneras formaste el número?____________________

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número__________

____

¿Qué número te salió en la segunda tarjeta?_____________________

¿De cuántas maneras formaste el número?____________________

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número__________

____

¿Qué número te salió en la tercera tarjeta?_____________________

¿De cuántas maneras formaste el número?____________________

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número__________

____

¿Qué número te salió en la cuarta tarjeta?_____________________

¿De cuántas maneras formaste el número?____________________

Escribe las diferentes maneras en que formaste el número__________

____

EL BOLICHE

- Actividad: El boliche
- Objetivo: Que los alumnos desarrollen habilidades para calcular mentalmente el resultado de sumas y restas con números que contengan unidades, decenas y centenas.
- Contenido Matemático: Resolución de sumas y restas, empleando el cálculo mental.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Materiales: Juego didáctico de boliche. (Por equipo)
- Procedimiento:

  1.- Se organiza al grupo en equipos de 3 o 4 integrantes. A cada equipo se le asigna un juego de boliche.

  2.-Se colocan los bolos y una marca (aproximadamente a 3 metros de distancia) que indique el sitio desde donde lanzar las pelotas.

  3.- Por turnos, cada integrante del equipo lanza la pelota.

  4.- Después de lanzar la pelota levanta los bolos que logro tirar, dice en voz alta los números que tiene que sumar y calcula mentalmente el total de puntos. Los demás integrantes del equipo deben sumar las cantidades de puntos correspondientes para verificar que la suma de su compañero sea correcta. Sí la cantidad es correcta se registra en una tabla, como está:

NOMBRE DEL JUGADOR	PRIMERA TIRADA	SEGUNDA TIRADA	TERCERA TIRADA	TOTAL DE PUNTOS

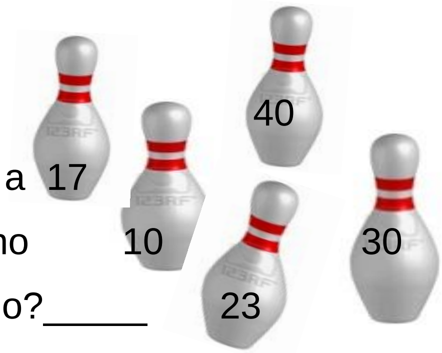
  5.- Se realizan 3 rondas, al final gana el jugador que tenga más puntos.

  6.- Después de que todos los integrantes han participado 3 veces, se observan los registros de la tabla y se van planteando problemas de comparación. Por ejemplo: ¿Cuántos puntos más, gano Luis que Ana?, ¿Cuántos puntos le faltaron a Diana para tener los mismos que Andrea?

- Consideraciones previas: El valor asignado a cada bolo puede variar, en un primer momento los valores pueden estar formados por dígitos (0, 1, 2,……,9); después por nudos (10, 20, 30, etc.); posteriormente nudos y dígitos y finalmente por otros números como: 12, 23, 39, etc.

JUEGO DEL BOLICHE				
NOMBRE DEL JUGADOR	PRIMERA TIRADA	SEGUNDA TIRADA	TERCERA TIRADA	TOTAL DE PUNTOS

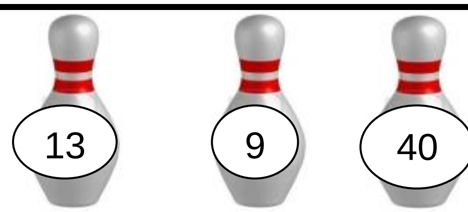
El boliche



El domingo Mario y sus amigos fueron a jugar boliche. Mario tiró estos bolos, cada uno tiene un valor. ¿Cuántos puntos obtuvo Mario?_____

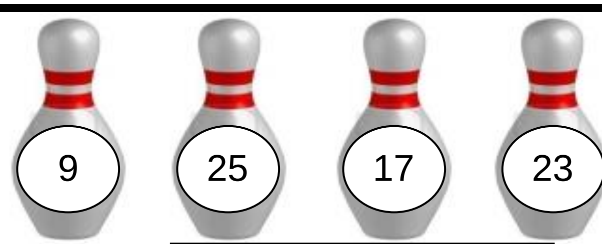
Observa los bolos que tiraron los amigos de Mario y escribe los puntos que obtuvo cada uno.

Karla



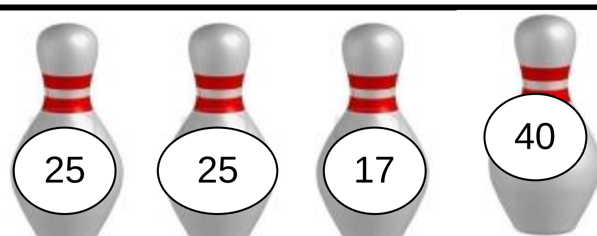
Total de puntos:

Javier



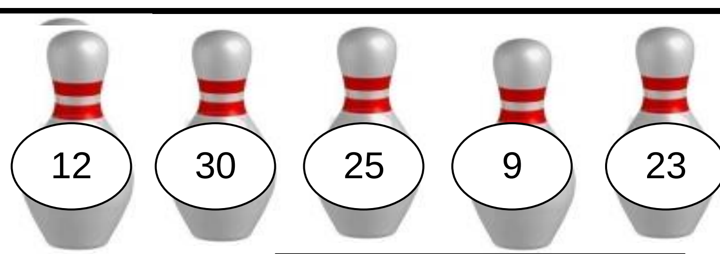
Total de puntos:

Ana



Total de puntos:

Tomás



Total de puntos:

¿Quién ganó más puntos?________________________________

¿Quién ganó menos puntos?______________________________

¿Cuántos puntos le faltaron a Karla para tener los mismos que Javier?____

¿Con cuántos puntos le ganó Tomás a Javier?_______________

La tiendita

- Actividad: La tiendita
- Objetivo: Que los alumnos desarrollen habilidades para calcular mentalmente y de manera escrita el resultado de sumas y restas con números que contengan unidades, decenas y centenas.
- Contenido Matemático: Resolución de problemas de estructura aditiva, empleando diversos procedimientos.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
- Materiales: Envolturas, cajas o dibujos de diversos productos, billetes y monedas didácticos o bloques aritméticos multibase, tarjetas de registro, marcadores y papel bond.

- Procedimiento:

1. De manera grupal se organiza un puesto con las envolturas, cajas o dibujos de productos que se van a vender. Los niños colocan a cada producto un letrero que indique su precio (Entre 10 y 99 pesos) y elaboran una lista con los precios de los productos.

2.-Se organiza al grupo en binas y se les proporcionan los billetes y las monedas.

3.- Por turnos, cada bina pasa al frente del puesto. Un niño será el vendedor y otro el comprador. El comprador dice en voz alta que productos va a comprar y cuánto cuesta cada uno; calcula mentalmente o de manera escrita lo que tiene que pagar en total. Realiza la compra y paga. El vendedor también debe calcular mentalmente o de manera escrita lo que le deben pagar (lo mismo que los demás niños del grupo), cuando le paguen debe verificar si es la cantidad exacta o tiene que devolver cambio.

4.- Los integrantes del grupo verifican que las cantidades en la compra-venta sean exactas.

5.- Se elige otra bina de niños y se realiza la actividad de acuerdo a la dinámica anterior.

- Consideraciones previas: Cuando se hace el pago del comprador al vendedor, todo el grupo debe estar atento a que las cantidades sean las correspondientes.
- Los alumnos registran los artículos que compran cada uno de sus compañeros y elaboran las operaciones correspondientes para saber cuánto tienen que pagar los compradores y cuál debe ser su cambio. Los registros serán en una tarjeta como la siguiente:

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre:____________________
Fecha: ____________________</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vendedor:</td></tr>
<tr><td>Lista de productos vendidos</td><td>Escribe la cantidad</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuánto le pagaron?____________________
¿Cómo le pagaron?____________________
¿Cuánto dio de cambio?____________________</td></tr>
</table>

- Posteriormente, los niños al acompañar a su mamá o algún familiar al mercado, elaboran una lista con los dibujos de los productos que compraron y sus precios.
- En clase se muestran las listas a sus compañeros y con ellas se formulan problemas. Por ejemplo: Sí la mamá de Lorena compró estos productos y pagó con un billete de $200.00, ¿cuánto le dieron de cambio?

La tiendita

Con las listas de precios de tus compañeros y la tuya escriban problemas y resuélvanlos.

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

- Actividad: Resolución de problemas de estructura aditiva
- Objetivo: Que los alumnos resuelvan problemas de estructura aditiva.
- Contenido Matemático: Resolución de problemas de estructura aditiva.
- Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Materiales: Hojas impresas, lápiz, fichas de colores, bloques aritméticos multibase.
- Procedimiento:

  1.- Se proporciona a cada niño hojas impresas con los problemas a resolver.

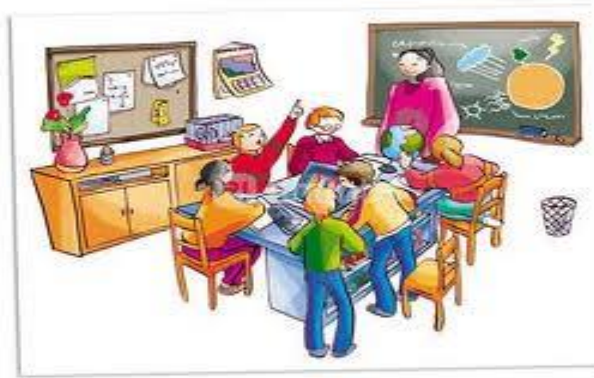
  2.- Los niños de manera individual resuelven los problemas.

  3.- Cada niño muestra y argumenta sus resultados.

  4.- En conjunto se analiza el procedimiento que siguió cada niño para resolver cada uno de los problemas.

- Consideraciones previas: Los problemas que se planteen a los niños serán los que en la 1ra y 2da etapa del estudio causaron mediana y mayor dificultad.

La Kermesse



La maestra Lupita y su grupo organizaron una kermesse para el día de la primavera. En la kermesse hubo muchos juegos divertidos para todos los niños, también rica comida y refrescos. Las actividades se organizaron por equipos, por ejemplo:

La maestra Lupita elaboró 180 pulseras de recuerdo para los asistentes a la kermesse, la maestra Silvia le ayudo a elaborar más pulseras. En total fueron 350 pulseras, ¿Cuántas pulseras hizo la maestra Silvia?____

Susi, Luis y Jorge, fueron los encargados de las bebidas, hicieron este cartel.

Bebidas	
Refrescos	$10.00
Agua simple	$6.00
Agua de sabor	$10.00

Al comenzar la kermesse había muchos refrescos, se vendieron 224 y quedaron 43. ¿Cuántos refrescos había al inicio de la kermesse?______________________

En el juego de lanzar aros, estaba Ana, Felipe y Rita.

Juanito y su amiga Yessi jugaron. Al final del juego, Juanito ganó 168 puntos. Yessi ganó 36 puntos más que Juanito. ¿Cuántos puntos obtuvo Yessi?_________________

Las mamás de Lulú y Toña, vendieron comida, en su puesto colocaron un anuncio que decía así:

Puesto de comida	
Producto	Precios
Tortas	$17.00
Tacos de guisado	$12.00
Hamburguesas	$20.00
Rebanada de pizza	$15.00
Hot dogs	$10.00
Palomitas	$5.00
Pambazos	$15.00
Papas a la francesa	$17.00
Elotes	$13.00
Esquites	$7.00

Jorge compró una hamburguesa y otras cosas. En total pago $37.00 ¿Qué productos pudo haber comprado aparte de la hamburguesa?________

____

Elisa se compró un refresco y una torta, le sobraron 23 pesos.

¿Cuánto dinero tenía antes de comprar?_____________

En el juego de boliche, tienes oportunidad de lanzar dos veces la pelota. Al final del juego sumas los puntos que ganaste y de acuerdo al total de puntos que tengas, ganas un premio.

PREMIOS								
								
0-30	31-60	61-90	91-120	121-150	151-180	181-210	211-240	241-270

Lupita y Lalo jugaron. Lupita obtuvo los siguientes puntos 16, 22, 34. Lalo ganó estos puntos 26, 33, 12 y 13. Ahora suma el total de puntos de cada uno y anota:

¿Cuál fue el total de puntos de Lupita?_________________________

¿Cuál fue el total de puntos de Lalo? ___________________________

¿Cuántos puntos necesitaba Lupita para tener los mismos puntos que Lalo?____

¿Cuáles fueron los premios de cada uno?

____

Si Omar ganó 112 puntos y Alicia ganó 143 puntos. ¿Cuántos puntos le faltaron a Omar para tener los mismos puntos que Alicia?________

¿Qué premio ganó Alicia?___________________________________

Abel se encargo del juego de lanzar el balón de básquetbol, y meter el balón en la canasta, los participantes tenían oportunidad 3 veces. El costo de este juego era de $20.00 Cada canasta valía 100 puntos, y había premios de acuerdo al número de canastas.

No. De canastas	No. De puntos	Premios
1	100	1 alcancía 
2	200	1 oso de peluche 
3	300	1 balón de básquetbol 

Luis ganó 1 balón de básquetbol y Leonardo 1 alcancía. ¿Cuántos puntos más ganó Luis que Leonardo? _________________________

Anexo IV

Cuestionario final de problemas aditivos

Universidad Pedagógica Nacional – Ajusco
Maestría en Desarrollo Educativo

Escuela: ____

Nombre: ____

Grado: ______   Fecha: ____________________________________

Clausura escolar

¡Término el ciclo escolar! Adriana está contenta porque fue elegida para salir en la escolta de su escuela. Su mamá fue a comprar el uniforme a la tienda el Sol. En el recuadro aparecen los precios de las prendas que conforman el uniforme (Falda, blusa, suéter, guantes, calcetas y boina).

La mamá de Adriana compró el uniforme que le solicitaron en la escuela. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Adriana con el uniforme completo?____

La mamá de Gustavo compró un suéter, una camisa, un pantalón, un par de guantes, un par de calcetines, una corbata y una boina. ¿Cuánto dinero gastó la mamá de Gustavo con el uniforme?________

____

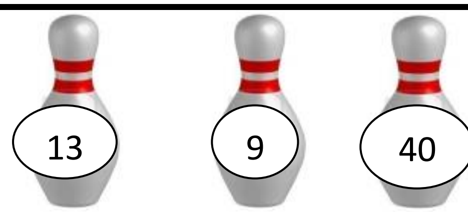
¿Cuál de las dos mamás gastó más dinero?____________________

¿Cuál fue la diferencia?____________________________________

La mamá de Adriana organizó una fiesta para la graduación de su hija Carmen. En la fiesta hubo tortas, jugos, gelatinas y dulces. La mamá de Carmen preparó 27 tortas para los invitados; la tía de Carmen le ayudó a preparar más tortas. En total había 56 tortas. ¿Cuántas tortas preparó la tía de Carmen?__________________________________

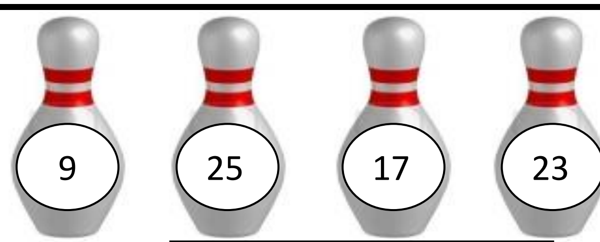
En la fiesta jugaron varios juegos uno de ellos fue el boliche. Al final del juego sumaban los puntos de cada jugador y ganaba el que tenía mayor número de puntos. Observa los bolos que tiraron Carmen y su amigo. Escribe los puntos que obtuvo cada uno.

Carmen



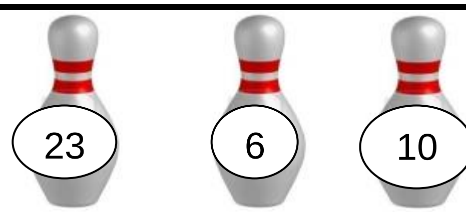
Total de puntos:

Jesús



Total de puntos:

Diana



Total de puntos:

¿Quién obtuvo mayor número de puntos?__________________

¿Cuántos puntos le faltaron a Carmen para tener los mismos puntos que su amigo Jesús?_______________________________________

Diana obtuvo 39 puntos, si hubiera tenido 23 puntos más. ¿Tendría los mismos puntos qué obtuvo Carmen o los mismos puntos que obtuvo Jesús?____

Adriana compró una bolsa grande de paletas. En la fiesta había 37 invitados, a cada invitado le regaló 1 paleta. Al final de la fiesta le quedaron 63 paletas. ¿Cuántas paletas tenía Adriana al inicio de la fiesta?____