UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

# "EL PAPEL DE LA CALCULADORA GRÁFICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN EN NIÑOS DE 7-8 AÑOS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO

PRESENTA:

MARINA CAMPOS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. TENOCH ESAÚ CEDILLO ÁVALOS

México, DF. Diciembre 2005

# AGRADECIMIENTOS

La tesis es un trabajo en apariencia individual, pero realmente ésta es una empresa donde concurre mucha gente ya sea por su asesoría y orienta-ción, por su apoyo moral o logístico para su realización.

Es así como quiero agradecer a mi asesor el Dr. Tenoch Esaú Cedillo Áva-los sin cuya ayuda este trabajo no se habría logrado. Durante el proceso de realización el Doctor mostró total disposición, que se expresó en apoyos de tipo académico, pero también una calidad humana que permitió hacer el trabajo agradable así como una estimulación constante para seguir siem-pre adelante.

También quiero agradecer las facilidades brindadas por el director de la escuela primaria donde se realizó el trabajo de campo: Prof. Jorge Téllez Sánchez, así como a la Profa. María Esther Calva Osornio responsable del grupo de segundo grado.

Finalmente agradezco a mi familia el apoyo incondicional y moral que me han dado siempre para sentirme segura donde quiera que me encuentre:
A Juan y a Toño.

Marina.

ÍNDICE


Introducción 5
Capítulo I: Planteamiento del problema 8
Justificación 8
Referencia desde la practica docente 10
Un estudio exploratorio 12
Preguntas de investigación 15
Capítulo II: Revisión de literatura 17
Investigación Empírica 17
Posturas teóricas: 27
Enlace entre la teoría y la enseñanza: Bruner-Cedillo 27
Concepto de número 37
Los números racionales en el contexto de la investigación 40
Las fracciones 43
La relación parte-todo 50
La calculadora gráfica: un recurso didáctico 53
La calculadora y las fracciones comunes 60
Capítulo III: Metodología 62
Método de Investigación 62
El estudio de caso como estrategia de investigación 64
Fases de la investigación 65
Diseño del estudio principal 66
Categorías de análisis 68
La escuela 69
Sujetos 70
Ambiente de trabajo 70
Recolección de datos 71

Relación de las actividades de enseñanza con los objetivos 71
Papel asignado a la calculadora 72
Escenario del trabajo de campo 73
Fuentes de datos 74
Preguntas de investigación 75
Descripción e interpretación de los datos 76
Sesiones de trabajo en el aula 76
Secuencia de actividades en cada sesión 77
Conclusiones 102
Referencias Bibliográficas 106
Anexos 109

# INTRODUCCION

En el currículo de la educación primaria mexicana se pueden observar cuatro propósitos fundamentales (Ornelas, 1995:151):

- Promover el pensamiento crítico y creador del alumno.
- Desarrollar en el alumno la capacidad de abstracción y razonamiento.
- Desarrollar una afectividad normada por un sistema de valores.
- Acrecentar la sociabilidad del alumno y la capacidad de utilizar todas sus posibilidades.

Estos objetivos sugieren que el Sistema Educativo Nacional está orientado a formar alumnos con habilidades que les permitan desempeñarse con autonomía y que lo aprendido en las aulas escolares les sirva como herramienta de convivencia con el mundo externo, en esto reside el papel fundamental de la escuela como una instancia que sea capaz de organizar el aprendizaje del alumno de tal forma que pueda contribuir en su desarrollo en la sociedad.

En esta intención de organizar el aprendizaje del alumno, específicamente en su capacidad de abstracción y razonamiento, es donde podemos participar los profesores realizando estudios que contribuyan al desarrollo de capacidades y habilidades para la vida. En esta tesis nos proponemos estudiar el potencial de los recursos que ofrece la tecnología informática para emplearlos en la enseñanza en el aula. Nuestro interés es aprovechar el mundo tecnológico en que está inmerso el niño como parte de su educación informal, más específicamente, esta tesis presenta un reporte de experiencias con niños de 7-8 años de edad y los aprendizajes que lograron usando la calculadora gráfica como un recurso didáctico para abordar algunas nociones numéricas en el ámbito de las fracciones comunes.

En este trabajo asumimos que las matemáticas son una disciplina viva que hay que redescubrir, palpar y experimentar y que la calculadora gráfica puede emplearse como una herramienta cognitiva para ayudar a los niños en la construcción del conocimiento matemático escolar.

En esta investigación se usó la calculadora gráfica para introducir a niños que cursan el segundo grado de la escuela primaria en la construcción de la noción de fracción. Para ello nos hemos planteado los objetivos que mencionamos a continuación.

**OBJETIVO GENERAL**

Obtener evidencia empírica acerca del papel que desempeñan los recursos visuales y de cálculo numérico que ofrece la calculadora gráfica en el aprendizaje de las primeras nociones sobre las fracciones comunes con niños de 7-8 años de edad.

**Objetivos particulares:**

Estudiar:

- El papel que desempeña la calculadora como herramienta cognitiva en el aprendizaje de los niños.
- El papel que desempeña la calculadora como herramienta de enseñanza.
- Las dificultades que se superan, las que se mantienen y las que surgen, en el aprendizaje de las primeras nociones sobre el concepto de fracción común con alumnos de 7-8 años de edad, cuando se trabaja en un ambiente basado en el uso de la calculadora gráfica.

Estructura de la tesis

La tesis consta de cinco capítulos que describimos de manera general a continuación.

En el primer capítulo se hace el planteamiento del problema que se aborda en la presente investigación. En el segundo capítulo se discute el marco conceptual en que se ubica este trabajo, reportando la investigación empírica que se ha realizado en torno al tema de las fracciones y posteriormente se abordan las posturas teóricas que dan sustento al desarrollo del presente documento.

En el tercer capítulo se discute el método de investigación que empleamos a partir de formular las preguntas de investigación que orientaron este trabajo. En particular, se describe la versión del método de análisis cualitativo que proponen Miles y Huberman (1984). En la sección Diseño del Estudio se describen las secuencias de actividades y la organización del trabajo en el aula que aplicamos en el estudio principal, y las fuentes de datos que se usaron, esencialmente, las video grabaciones realizadas durante las sesiones de trabajo, las entrevistas a los niños y sus respuestas a las actividades que se les propusieron. .

En el cuarto capítulo se presenta una descripción de los resultados y una interpretación de los mismos, para finalmente abordar los resultados en su conjunto. En el quinto capítulo presentamos las conclusiones que sugiere el presente trabajo.

Al final de la tesis se incluyen las referencias bibliográficas que consultamos y un apartado de anexos en los que se presentan en detalle las secuencias de actividades que se emplearon durante el trabajo de campo, las respuestas escritas de los niños a éstas y los protocolos de las entrevistas individuales que se hicieron con los niños que se eligieron para ser seguidos mediante la técnica de estudio de casos.

# CAPITULO I

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

**Justificación**

El plan y programa de estudios vigente (l993) señala cuatro propósitos fundamentales, de los cuales mencionaremos solamente el primero:

> "Asegurar que los niños adquieran y desarrollen las habilidades intelectuales (la lectura y la escritura, la expresión oral, la búsqueda y selección de información, la aplicación de las matemáticas a la realidad) que les permitan aprender permanentemente y con independencia, así como actuar con eficacia e iniciativa en las cuestiones prácticas de la vida cotidiana" (SEP, Plan y programas, 1993:13).

Para lograr lo anterior se recomienda que la enseñanza de las matemáticas ponga mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas, teniendo como propósito central relacionar la aplicación de las matemáticas en situaciones reales, destacando los siguientes principios:

- Utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.
- Anticipar y verificar resultados.
- Comunicar e interpretar información matemática.
- Desarrollar la imaginación espacial.
- Estimar resultados de cálculos y mediciones.
- Tener destreza en el uso de instrumentos de medición, dibujo y cálculo.
- Emplear el pensamiento abstracto a través de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

El enfoque actual de las matemáticas señala que la escuela tiene que buscar la manera de entrelazar este conocimiento con experiencias concretas. Se recomienda usar las matemáticas para resolver problemas en diversos ámbitos, como el científico, el técnico, el artístico y la vida cotidiana; para esto se propone que la escuela promueva la resolución de problemas matemáticos, donde se comparen resultados y formas de solución para acceder a los procedimientos y conceptos formales, de manera que los alumnos los empleen como instrumentos que permiten economizar tiempo y adquirir una cultura matemática (SEP, Plan y programas, 1993).

Según el plan y programa en cuestión, los contenidos del currículo oficial se articulan con base en seis ejes, a saber:

- Los números, sus relaciones y sus operaciones.
- Medición.
- Geometría.
- Procesos de cambio.
- Tratamiento de la información.
- La predicción y el azar.

De los ejes anteriormente señalados, nos interesa abordar en este trabajo el que se refiere a los números, sus relaciones y sus operaciones; en el que se propone que los significados de los números se presenten en diversos contextos, así como los símbolos que los representan y sus diferentes relaciones, para que puedan ser utilizados como herramientas en la solución de situaciones problemáticas (SEP, Plan y programas, 1993).

En este eje se ubica a los números fraccionarios a partir del tercer año de primaria y se propone abordar los significados de una fracción como razón y cociente mediante el estudio de situaciones de reparto y medición.

Consideramos pertinente destacar que los números fraccionarios son un contenido que se relaciona con el desarrollo del pensamiento abstracto, lo cual representa un alto nivel de dificultad para los alumnos, pues el tema de las fracciones tiene poca utilidad cotidiana y requiere de cierto grado de desarrollo cognitivo para su asimilación. Entre otras, por estas razones los temas de multiplicación y división con fracciones se trasladaron a nivel secundaria, esperando que un mayor desarrollo intelectual les permitiera a los alumnos acceder con menor dificultad a este conocimiento.

Los propósitos del currículo escolar y los reportes de investigación nos dan un panorama sobre las dificultades que ofrece el tema de fracciones comunes respecto a su enseñanza y aprendizaje, proporcionan argumentos que justifican la búsqueda de acercamientos didácticos alternativos para abordarlo en los grados iniciales del nivel de educación primaria. En este trabajo nos proponemos estudiar el potencial de las facilidades gráficas que ofrece la calculadora algebraica, como un recurso para favorecer que alumnos de 7-8 años de edad desarrollen nociones elementales sobre los números fraccionarios en el contexto de relaciones parte-todo, acudiendo a sus intuiciones sobre ubicación espacial de puntos en la recta numérica y a sus nociones básicas de adición y sustracción.

**Referencia desde la práctica docente**

Mi experiencia en aula me ha permitido verificar que el conocimiento sobre las fracciones se dificulta tanto para su enseñanza por parte del maestro, como en la apropiación del mismo por parte del alumno. Con la finalidad de sustentar de manera más sólida estas concepciones que provienen de la práctica docente cotidiana, aplicamos los reactivos de la Prueba de Diagnóstico en Matemáticas Chelsea (Hart, 1984) sobre el significado de la relación parte-todo, a los alumnos de cuarto grado de la escuela primaria oficial “Manuel Alcalá Martín”, ubicada en la calle de Felipe Montero No. 3 Col. Paraje San Juan, Iztapalapa, D.F. El cuestionario fue aplicado en el turno matutino al cuarto grado grupo “B” con 25 alumnos, cuyas edades fluctuaban entre 8 y 11 años, Las respuestas de los alumnos nos permiten formular las conclusiones que se describen a continuación:

- Los alumnos no tienen la capacidad de relacionar el número de partes con la unidad de la que se han tomado, esto sugiere que los alumnos no han consolidado el significado de la relación parte-todo en contextos continuos, como en la recta numérica; ni en contextos discretos.

- La noción de equivalencia que poseen los alumnos aún es deficiente, no identifican la unidad como un todo.

- En los tres contextos no establecen divisiones congruentes. Según Llinares (l997) existen tres contextos para la adquisición de las primeras nociones relativas a la relación parte-todo: contextos continuos, contextos discretos y el contexto en la recta numérica.

- El concepto de fracción dentro de contextos continuos y discretos no es manejado por los alumnos, como lo pudimos apreciar en los resultados de la prueba, esto parece explicar por qué no pueden trabajar en la recta numérica. A este respecto Llinares plantea que los dos primeros contextos son requisito fundamental para trabajar con la recta numérica.

- Llinares (1997) plantea dos principios:
    - La necesidad de centrar las nociones sobre fracciones en contextos concretos, en un nivel puramente descriptivo, teniendo en cuenta tanto la idea de medida como de reparto, con materiales continuos y discretos.
    - La idea de que el trabajo inicial con las fracciones se considera un generador de lenguaje.

    El autor considera importante que el niño reconozca el todo, así como las partes que integran el todo; la noción de inclusión de las partes en el todo y realizar divisiones congruentes del todo. La estructura cognitiva sobre la que se basan esos atributos la constituye la acción de dividir un todo en partes, estos son los fundamentos para manejar la relación parte-todo. Podemos apreciar que los principios que plantea Llinares deben ser trabajados en el aula con materiales concretos, que le permitan al niño identificar la unidad con el todo, así como las partes de ésta.

- El niño debe tener claro el concepto de unidad, para después verlo como un todo que podemos dividir en partes y posteriormente representar esas partes de manera numérica.

Ávila (1989), Arceo (1996), Block (1986 y 2001), Dávila (1994), Nickson (2000), Fuson (1992), Kieren (l983), Streenfland (l991), Freudenthal (l983), Behr (l992), entre otros autores reportan dificultades similares a las mostradas por los niños mediante la prueba antes mencionada. En el capítulo Revisión de la Literatura abundaremos en los resultados de estas investigaciones.

Los resultados de la prueba que aplicamos y los reportados por varios investigadores nos motivaron a trabajar la noción de fracción con niños más pequeños empleando otros recursos y enfoque didácticos.

**Un estudio exploratorio**

Con la asesoría del Dr. Cedillo, se realizó un estudio exploratorio sobre la viabilidad y pertinencia del presente trabajo. El estudio consistió en una sesión de una hora y media con tres niños de 7 años de edad que cursaban la etapa final del primer grado de educación primaria. Los alumnos conocieron las funciones básicas de la calculadora y sus respuestas nos indican que entendieron el lenguaje que hay que utilizar para comunicarse con la máquina.

Las actividades que se realizaron en este estudio son las siguientes:

- Exploración de la calculadora por parte de los alumnos.
- Descubrimiento de las características y funciones de la calculadora.
- Comprobación de resultados al realizar cálculos mentales de adición y sustracción.
- Planteamiento y solución de retos como la construcción de ecuaciones algebraicas (y=x+1, y=x+2). Observación de que los efectos se traducen en gráficas.
- Construcción de una gráfica cuya línea pase entre x+1 y x+2.

La sesión fue video grabada y del análisis que realizamos se derivan las observaciones que señalamos.

Los principales hallazgos que obtuvimos en este estudio exploratorio fueron los siguientes:

- Los niños no presentaron dificultad alguna para relacionarse con la calculadora gráfica y fueron capaces de utilizar el código de la calculadora para comunicarse con ella.
- Los niños respondieron con interés a situaciones problemáticas que consistieron en la búsqueda de soluciones a “retos matemáticos” que se les plantearon en el formato de juegos.
- Los niños comprendieron el significado de la unidad y fueron capaces de conceptualizar “la mitad de uno”.

Los hallazgos antes señalados se sustentan en los datos que recabamos durante esa sesión de trabajo de hora y media, en la que los niños, a través de producir gráficas en la calculadora mediante ecuaciones lineales de la forma y=x+b, fueron capaces de construir el concepto de “la mitad de uno”. Se pudo observar que después de varias actividades no fue complicado para ellos utilizar el lenguaje matemático que requiere el uso de la calculadora para producir gráficas de funciones lineales. Al terminar la sesión, el trabajo realizado por los niños sugiere que estaban en el umbral de nociones importantes sobre las fracciones comunes, por ejemplo, “la mitad de uno”. Este breve estudio nos permitió apreciar que la calculadora gráfica, utilizada como recurso didáctico, puede facilitar la construcción del concepto de fracción.

A manera de conclusión señalaremos, como ya lo mencionamos anteriormente, que a partir de la propia experiencia había podido identificar la problemática que existe para la enseñanza-aprendizaje de las fracciones. Posteriormente pude constatarlo al aplicar la Prueba Chelsea a los alumnos de cuarto grado, de donde se considero la necesidad que existe de trabajar el tema de las fracciones con niños de los grados inferiores a los que señala el programa de estudios de la SEP. Consideramos que el abordar la noción de fracción con alumnos de los primeros grados les va a permitir posteriormente acceder con mayor facilidad al desarrollo de este concepto. La realización del estudio exploratorio nos dio la pauta a realizar la presente investigación confirmando la pertinencia, vigencia y viabilidad del trabajo, ya que se avanzó en la posibilidad de acceder al tema de las fracciones a través del uso de la tecnología como recurso didáctico.

En resumen, a partir de esta experiencia laboral y de los sondeos realizados y señalados anteriormente nos propusimos realizar la investigación que aquí se presenta y que tiene como objeto de estudio:

¿Cuál es el papel de los recursos visuales y de cálculo que ofrece una calculadora gráfica en el aprendizaje de las primeras nociones sobre las fracciones comunes con niños de 7-8 años de edad?

**Preguntas de investigación**

Retomando los objetivos particulares señalados anteriormente formularemos las siguientes preguntas de investigación que fungirán como eje rector del trabajo:

- El papel que desempeña la calculadora como herramienta cognitiva en el aprendizaje de los niños.

A partir de este punto nos planteamos dos interrogantes:

- ¿Qué nociones desarrollan los niños de 7-8 años de edad cuando abordan actividades sobre fracciones empleando el ambiente gráfico de la calculadora?
- ¿Qué estrategias emplean los niños de 7-8 años de edad cuando abordan la solución de problemas que involucran el concepto de fracciones empleando la calculadora?

- El papel que desempeña la calculadora como herramienta de enseñanza.

Aquí también desprendemos dos cuestionamientos:

- ¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora gráfica en las formas de participación de los niños con el maestro?
- ¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora en las formas en que los niños se relacionan con los contenidos matemáticos que se les proponen?

- Las dificultades que se superan, las que se mantienen y las que surgen, en el aprendizaje de las primeras nociones sobre el concepto de fracción común con alumnos de 7-8 años de edad, cuando se trabaja en un ambiente basado en el uso de la calculadora gráfica.

De este punto solo desprendemos una pregunta:

- ¿Cuáles son las dificultades u obstáculos que se presentan al trabajar la noción de fracción en un ambiente gráfico de la calculadora?

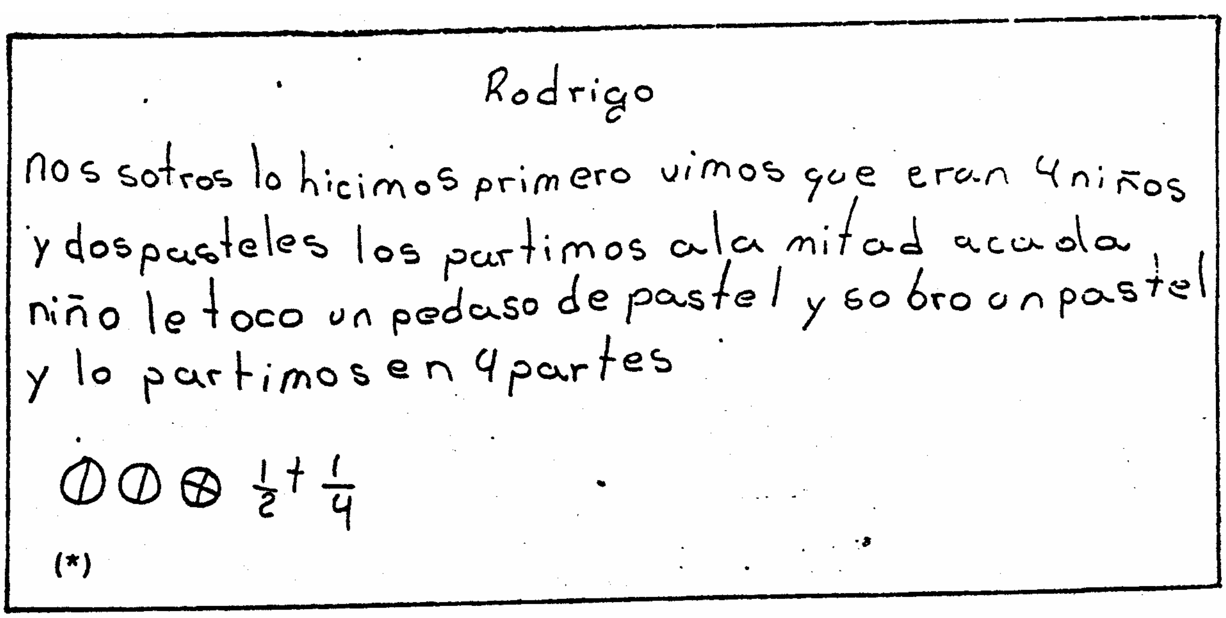
Estas fueron las preguntas de investigación que orientaron nuestro trabajo y que trataremos de ir abordando en cada uno de los capítulos para irlas clarificando más hasta abordarlas completamente dentro de las conclusiones.

# CAPITULO II
# REVISIÓN DE LA LITERATURA

## Investigación empírica

Algunas investigaciones muestran las dificultades que tienen los niños para apropiarse del conocimiento de las fracciones, así como los obstáculos que confrontan los maestros para su enseñanza. Balbuena et al (1984), realizaron un estudio sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria con alumnos de una generación que ingresó a primer año en el ciclo escolar 1978-79 y que en 1984 se encontraban terminando su sexto año de primaria en el Centro de Educación Preescolar y Primaria del STUNAM (CEPPSTUNAM). Entre los contenidos que trabajaron está el de las fracciones. La intención fue señalar algunos aspectos que deberían ser contemplados en la escuela primaria. Entre otras conclusiones proponen que "las fracciones forman un conjunto de números con propiedades específicas, distintas de las propiedades de los números enteros y muchos de los problemas se originan por no tener claras esas diferencias" (Balbuena, 1984:1). Destacan que en los números enteros encontramos una secuencia y orden que en los fraccionarios no podemos tener.

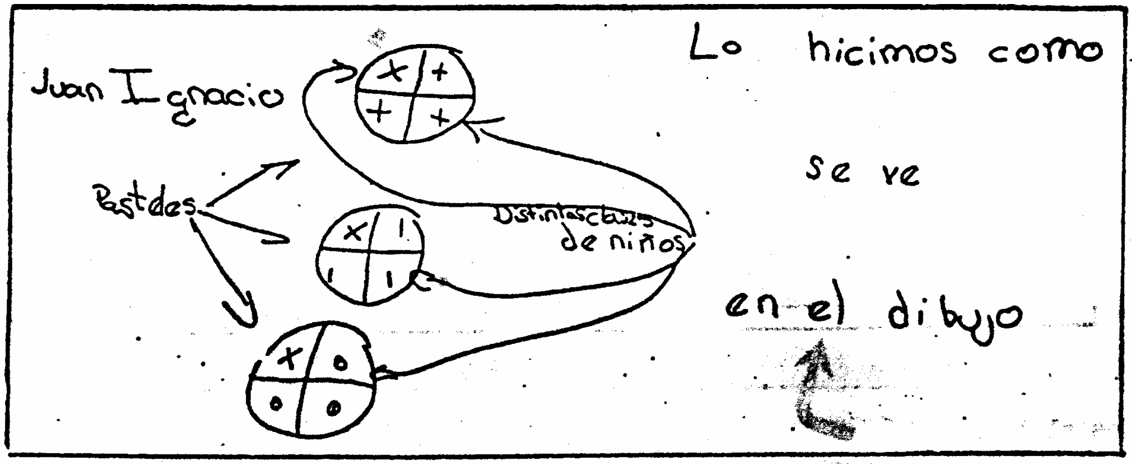
En quinto grado abordaron el tema de las fracciones sin introducción previa a partir del planteamiento de un problema, por ejemplo: queremos repartir 3 pasteles entre 4 niños. ¿Cuánto le toca a cada niño?
Se obtuvieron respuestas como la siguiente:

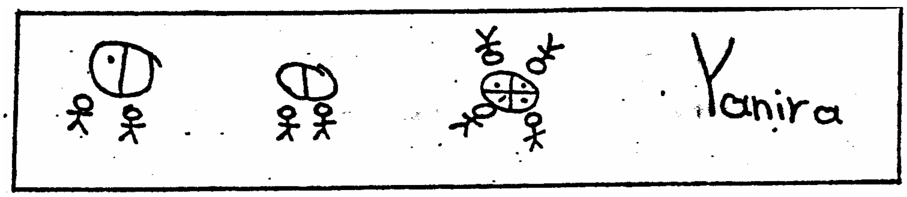

Rodrigo

nos sotros lo hicimos primero vimos que eran 4 niños y dospasteles los partimos ala mitad acada niño le toco un pedaso de pastel y sobro un pastel y lo partimos en 4partes

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

(*)




En la comparación de los procedimientos utilizados y de las representaciones numéricas, los niños observaron que en todos los casos la cantidad de pastel que le correspondía a cada niño era la misma (Balbuena, 1984:11).

Plantearon este tipo de actividades para tratar el tema de las fracciones; después de proponerles un problema, los niños lo abordaban trabajando en equipo y pasaban a exponer su procedimiento de solución justificándolo, finalizando con una plenaria sobre las diferentes soluciones abordadas (Balbuena, 1984).

Estos autores reportan que están convencidos que "el concepto de fracción es suficientemente rico, útil e interesante, como para dedicarle un tiempo considerable dentro del programa de matemáticas y que sin una real comprensión del significado de fracción, es muy difícil lograr un buen manejo de las operaciones con fracciones" (Balbuena, l984). Con su trabajo quisieron mostrar algunos principios didácticos que les parecieron fundamentales (Balbuena, 1984), entre otros creemos pertinente destacar los siguientes:

- Que el niño, mediante actividades de enseñanza adecuadas, es capaz de desarrollar sus propias estrategias para resolver las situaciones que les plantea el maestro.

- Que propiciar que los niños confronten los procedimientos que emplearon hace posible que se rescaten los correctos y más adecuados, y que no es el maestro quien debe imponer su forma de razonamiento.
- Que los conceptos deben presentarse a partir de problemas accesibles a los niños.
- Que la comprensión de los procedimientos y conceptos es más importante que cualquier algoritmo o regla "recitada".
- Que es importante escuchar a los niños, entre otras cosas porque nos dan pautas sobre lo que están pensando en una situación determinada y con esto darles seguridad para que expresen sus opiniones y las justifiquen.

Block (1986) realizó un estudio didáctico sobre la enseñanza y aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria, en el que pone en práctica una serie de situaciones didácticas que permiten que el alumno participe en actividades que pueden propiciar la construcción del concepto de fracción. Block propone una secuencia de actividades como la siguiente:

| 1. Reparto de "x" pasteles entre "y" niños | | | |
|---|---|---|---|
| Actividad | Grado | Contenido | Objetivos |
| 1.1 | 3º y 4º | Repartir 3 pasteles entre dos niños | Obtener m pedazos iguales al partir n enteros |
| 1.2 | 3º y 4º | Discriminar entre varios pedazos de un entero, cuales son mitades | Verificar que m pedazos = n enteros |
| 1.3 | 3º y 4º | Repartir dos pasteles entre 3 niños | Comparar diferentes enteros al realizar la partición |
| 1.4 | 3º y 4º | Cada equipo hace un reparto diferente | Los pedazos que resultan tienen misma área aunque diferentes formas |
| | | Se realizan algunas anticipaciones acerca del tamaño de los pedazos | Asocian progresivamente los datos (n, m) del reparto con el tamaño del pedazo |

2. A partir del pedazo y de los datos del reparto construir el entero.

   A partir del entero y del pedazo, determinar los datos del reparto.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.1 | 3o y 4º | Dado el pedazo y los datos del reparto (2 enteros, 5 niños; 4 enteros, 3 niños). | Tomar conciencia y utilizar la relación n enteros = m pedazos. |
| 2.2 | 3o y 4º | Construir el entero con la misma actividad (3 enteros, 2 niños). | Asociar progresivamente los datos (n, m) del reparto con el tamaño del pedazo. |
| 2.3 | 3º | Dado el pedazo y los datos del reparto, escoger el entero entre tres posibles. | |
| 2.4 | 3º y 4º | Dados el entero y el pedazo, determinar los datos del reparto (3 enteros, 5 niños; 4 enteros, 3 niños). | |
| 2.5 | 3º y 4º | Con la misma actividad cada equipo con un pedazo diferente (2, 3; 3, 5; 5, 6; 4, 3; 3, 2; 1, 3; 5, 12). | |

Este estudio reporta que “los problemas de reparto propician que los niños movilicen determinados procedimientos de resolución en los cuales subyace la relación de igualdad entre enteros por repartir y pedazos repartidos” (Block, 1986:335). Algunas de las conclusiones a las que llega este autor son las siguientes:

- En la secuencia didáctica 2.1 y 2.2 (construir el entero), algunos niños de tercer grado construyeron un entero reuniendo todos los pedazos, es decir, no dividen el total de pedazos entre el número de enteros para obtener un entero. En este caso, sí consideran la igualdad de los totales. La dificultad está en concebir al total original, antes de ser repartido, formado también por partes.
- Las situaciones de reparto 1.1 a 2.5 favorecieron, en efecto, que los niños de ambos grupos movilizaran la relación de igualdad entre enteros y pedazos como un medio para resolver los problemas planteados.
- Los niños presentan una dificultad para prever la forma de dividir entre números distintos de 2 y se consideró que posiblemente esta deficiencia tuviera relación con la dificultad para pensar en un pedazo como producto de dos operaciones, una de las cuales es una operación. Por esto se consideró que estas actividades de reparto ameritan un trabajo un poco más prolongado. Esto podría realizarse a partir del segundo grado de primaria, nivel en el cual las

condiciones de un buen reparto (exhaustividad, igualdad de las partes) podrían constituir dificultades interesantes para los niños.

- Las confrontaciones colectivas funcionaron casi siempre como el medio de validación colectiva de resultados.

En esta tesis retomamos la recomendación de Block sobre empezar a trabajar la noción de fracción a partir del segundo grado de primaria.

Posteriormente Block (2001) realizó un estudio sobre la noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria, donde trató de encontrar la posibilidad de “acercar” ese concepto a las estrategias que los alumnos emplean al resolver cierto tipo de problemas. El autor plantea que el concepto de razón se establece a partir de las relaciones multiplicativas aún no cuantificadas de un solo número. Block planteó la tarea de comparar los resultados en dos situaciones de reparto de pasteles: 3 pasteles entre 4 niños contra 4 pasteles entre 3 niños. En las respuestas de los alumnos de 4º grado observa que “no cuantificaron el tamaño de los pedazos con fracciones, se limitaron a señalar que en un caso hay más pasteles y menos niños que en el otro, por lo cual a los primeros les toca más pastel. Estos alumnos, trabajaron con las relaciones entre cantidades enteras, aún no cuantificadas con números fraccionarios. En varios problemas con otras características se pudo observar un fenómeno parecido” (Block,2001:9-10). En ese estudio se llevaron a cabo situaciones experimentales con grupos de cuarto a sexto de primaria, se observó que detrás de la noción de fracción subyace una noción más amplia, menos precisa, la idea misma de la relación multiplicativa. Esto plantea la necesidad de retomar la idea de razón como un conocimiento previo a las fracciones, que le permita al alumno conceptualizar mejor este tema.

En esa investigación se formulan las siguientes conclusiones:
1) La noción de razón constituye un conocimiento que está relacionado con la construcción de diversas nociones de las matemáticas de la escuela primaria, aunque en casi todos los casos, se desvanece detrás de los conocimientos con los que culminan estos procesos: los números y las operaciones con los números. La razón constituye, desde este punto de vista, una especie de andamiaje en la edificación de diversas nociones.

2) Se identificaron tres momentos en el paso de la noción de razón a la noción de fracción:

- el primero, en el que las fracciones (para expresar medidas y para expresar operadores) permanecen implícitas en conjuntos de razones que se formulan mediante parejas de cantidades naturales y se manejan mediante operadores naturales internos;
- el segundo, en el que se construye la razón canónica, la que expresa al valor unitario, momento en el que las fracciones emergen como expresiones de una medida y son objeto de separadores que siguen siendo naturales.
- el tercero, en el que la fracción se hace explícita en el papel de operador.

3) Las situaciones experimentales que realizó le permitieron destacar que, frente a cierto tipo de problemas, los niños utilizaron efectivamente razones y, sobre todo, puso de manifiesto algunas de las formas en que las razones se articulan, en sus procedimientos, con otros conocimientos que están en proceso de construir.

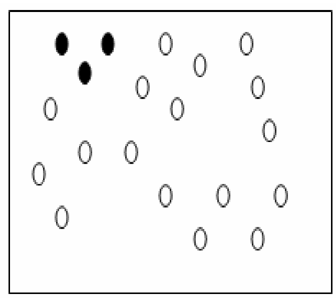
4) Se considera que la noción de razón es necesaria como un puente que permite a los alumnos establecer una primera relación con determinados objetos matemáticos elementales. Pero el autor encontró que hay dificultades en el tratamiento didáctico de la noción de razón debido a que ha desaparecido prácticamente del currículo de las matemáticas escolares, lo cual representa una limitante.

5) La identificación de dificultades permite afirmar que el estudio de la noción de razón se utiliza implícitamente en muchas formas, lo que podría proporcionar a los maestros un conocimiento teórico adecuado para comprender cómo resuelven los problemas multiplicativos los alumnos y así organizar, con mayor conocimiento de causa su propio programa y sus situaciones didácticas.

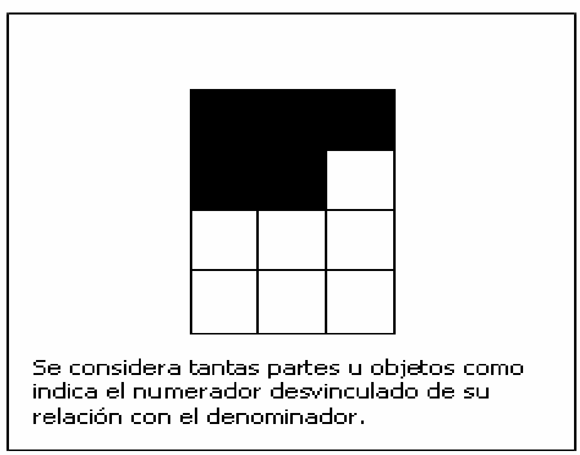
Ávila y Mancera (l989) realizaron una investigación con 293 niños que terminaban el sexto grado de la escuela primaria. Su estudio se centró en las dificultades que tienen los niños al enfrentarse a la fracción como una expresión numérica, es decir a su forma a/b sin ligarla a ningún contexto. Para indagar cómo interpretaban los niños una fracción expresada en la forma a/b, se les planteó la pregunta: ¿Qué quiere decir 4/6?

El cincuenta y seis por ciento de los niños interrogados evidenciaron en sus respuestas una interpretación errónea o insuficiente de la fracción. Las respuestas "correctas" (44%) muestran que la interpretación que los niños dan a la fracción está fundamentalmente ligada al modelo "del pastel", es decir, a la partición de una figura plana la cual se subdivide en partes iguales y luego se "toman" o colorean cierto número de partes (Ávila y Mancera, 1989).

Las actividades que se les plantearon fueron como las siguientes:
Sombrear ¾ de una colección de 20 canicas. Casi el total de los niños respondió coloreando de la siguiente manera:



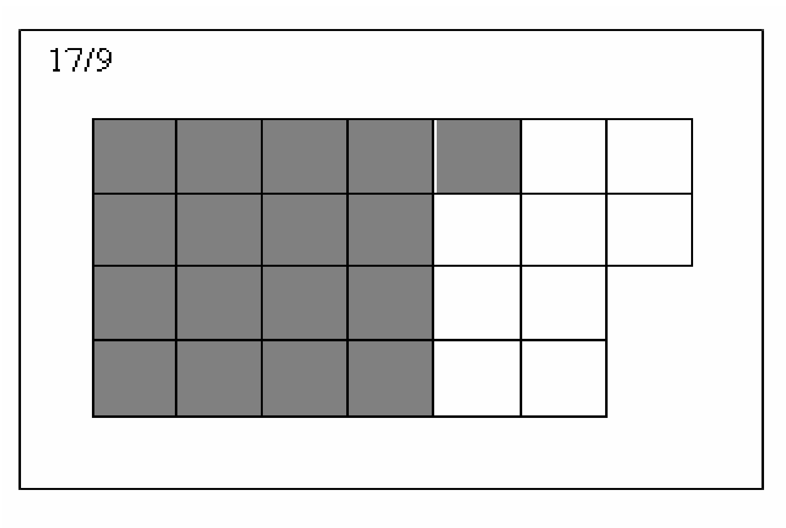
Colorear 5/6 del mosaico, la respuesta más común fue la siguiente:

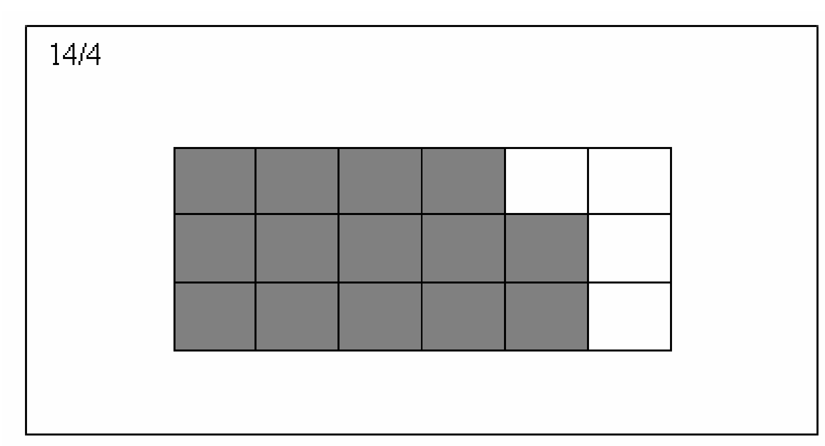



En la primera actividad los niños dibujaron 3 canicas y en la segunda se colorearon 5 partes, porque consideraron tantas partes u objetos como indica el numerador, desvinculándolo de su relación con el denominador; esto sugiere que no han logrado interpretar la fracción como una relación parte-todo.

Otra actividad que se usó fue:

Dibuja las figuras que tú quieras para representar 17/9 y 14/4. Las respuestas que se obtuvieron fueron como las siguientes:




Es decir, transformaron 17/9 en 17/26, porque 17 + 9 = 26; y transformaron 14/4 en 14/18, porque 14 + 4 = 18 (Ávila y Mancera, 1989). Se encontró que las fracciones mayores que uno causan mayor dificultad a los niños que las menores que 1. A este respecto Ávila y Mancera reportan que en la representación de 17/9 y 14/4, sólo obtuvieron un 7% de respuestas correctas y que las respuestas más frecuentes entre las “no correctas” muestran una tendencia a invertir los términos de la fracción.

Ávila y Mancera encontraron que “las conceptualizaciones que de las fracciones han logrado los niños se basan fundamentalmente en el modelo del pastel, es decir, la fracción es predominantemente una figura (no dos ni tres) que se subdivide y colorea. Tal conceptualización dificulta rebasar los limites de la unidad." (Ávila y Mancera, 1989:25).

Los autores concluyen que los resultados apuntan a dos hechos fundamentales:

- La dificultad para establecer la relación parte-todo.
- La dificultad para rebasar las conceptualizaciones basadas en el "modelo del pastel".

Los estudios que se han realizado sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones utilizando lápiz y papel u objetos manipulables, nos sirven de base para seguir buscando otras alternativas de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, Dávila (1994) y Arceo (1996) señalan algunas dificultades que representan tanto la enseñaza como el aprendizaje de las fracciones. Dávila informa que "una de las razones por las que se tiene dificultad en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, la misma complejidad de la noción y la tendencia de reducir la noción de fracción a una de sus interpretaciones y, dentro de ésta, destacar la similitud entre los números naturales y las fracciones (obstáculos didácticos)" (Dávila, 1994:138). Arceo señala que "la dificultad para enseñar y para aprender las fracciones tiene que ver con la pobreza de los significados que históricamente se han manejado en la escuela, en la que se limita la capacidad del alumno y se propicia una concepción de la fracción reducida y con escaso significado. Esto impide al alumno que entienda que las fracciones adquieren distintos significados dependiendo de la situación en que se usan" (Arceo, 1996:3).

Las investigaciones que se han realizado y los autores que abordan el tema de las fracciones, coinciden en que la construcción de la noción de fracción implica una serie de dificultades que exigen se continúe avanzando en la investigación sobre estos problemas que propongan otras formas de enseñanza-aprendizaje para facilitar la apropiación del tema en cuestión.

### La calculadora en el aula

En la búsqueda de otras maneras de incursionar en el proceso enseñanza-aprendizaje, encontramos que la tecnología electrónica ofrece promisorios recursos que pueden ser empleados en la enseñanza.  Por supuesto, es necesario saber utilizar esos recursos para aprovecharlos de manera eficiente.

La calculadora es un instrumento que se utiliza de manera cotidiana, aunque su funcionamiento no se aprenda necesariamente en la escuela.  La calculadora (simple o básica), apareció a comienzos de los años setenta, siendo un instrumento que se introdujo. En el Plan y programa de 1993 se recomienda el uso de la calculadora a partir del 5º grado de educación primaria, pero ya existen algunas investigaciones como la de Irma Saíz (1985), Grecia Gálvez (1994) y Santiago Valiente (2001), por mencionar algunos, que nos muestran su utilidad como recurso didáctico desde el primer año.  El uso de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas ofrece al alumno recursos que pueden emplearse para que se involucre de manera más activa con las ideas matemáticas. El aprendizaje de esta asignatura puede ser más dinámico porque la calculadora gráfica, en particular, permite que los alumnos observen los procesos de construcción que se trabajan en clase.

Nos interesa abordar como tema de investigación el uso de la calculadora gráfica, como una herramienta para introducir a los niños de 7-8 años de edad en el trabajo con fracciones sencillas, un tema que consideramos muy pertinente dada la poca difusión y conocimiento que se tiene sobre su uso en este campo.

Actualmente se están realizando investigaciones para determinar el impacto de la reforma de 1993 sobre la práctica educativa y de esta manera realizar las adecuaciones pertinentes a los planes y programas, así como a los materiales utilizados (libros de texto del alumno, ficheros, libros del maestro, etc),  Se necesita seguir realizando investigación sobre las fracciones que nos permita superar las dificultades de aprendizaje de este tema para poder incluir en el currículo una variedad de estrategias de enseñanza-aprendizaje que, considero, facilitarían en gran medida la apropiación de este conocimiento abstracto y que podríamos ver de manera más concreta.

**Posturas teóricas**

***Enlace entre la teoría y la enseñanza: Bruner-Cedillo.***

En el presente trabajo retomamos como referente teórico la investigación de Bruner en la adquisición de la lengua materna. Este autor sostiene "que los niños al intentar usar el lenguaje para lograr sus fines, hacen mucho más que simplemente dominar un código. Están negociando procedimientos y significados y, al aprender a hacer eso, están aprendiendo los caminos de la cultura, así como los caminos de su lenguaje" (Bruner, 1995:15). Bruner propone que el proceso de adquisición del lenguaje comienza antes de que el niño sea capaz de producir sus primeras expresiones verbales; que la adquisición del lenguaje comprende un largo periodo de preparación en el que los niños adquieren las pistas que les permiten entender de lo que se habla y, más tarde, decodificar lo que inicialmente aparece como un flujo continuo de expresiones verbales. Dicho estadio preparatorio para la adquisición del lenguaje se basa en una interacción adulto-niño altamente acotada, que fue adaptada por Cedillo (1996) para dar forma a la organización de la clase de manera que los estudiantes pudieran ver el código de la calculadora como un lenguaje en uso. El uso del código de la calculadora se pone en un contexto en el que puede ayudar a los estudiantes a negociar los significados del nuevo lenguaje por medio de explorar los efectos de utilizar "expresiones de calculadora" específicas.

Bruner (l995) plantea como premisa central para volverse un miembro de una comunidad lingüística que el ser humano debe no sólo aprender acerca del lenguaje como un sistema de expresiones bien formadas y delimitadas por reglas, sino también cómo hacer cosas con palabras en el lenguaje de la comunidad, es decir "los niños comienzan a usar el lenguaje no sólo porque tengan capacidad para hacerlo, sino porque tienen necesidad de conseguir los fines que su uso les confiere. Los padres los ayudan a conseguir esos propósitos. En este sentido es que Cedillo (l996, 2001) concibe al ambiente basado en la calculadora.

Bruner afirma que "la adquisición del lenguaje comienza antes de que el niño exprese su primer léxico-gramatical. Comienza cuando la madre y el niño crean una estructura de acción recíproca predecible, que puede servir como un microcosmos para comunicarse y para constituir una realidad compartida.  Las transacciones que se dan dentro de esa estructura constituyen la puerta de entrada a partir de la cual el niño conoce la gramática, la forma de referir y de asignar significados y la forma de llevar a cabo sus intenciones comunicativamente”.(Bruner,1995:21).

En la adquisición del lenguaje Bruner considera tres grandes facetas:

- La sintaxis trata del problema de cómo adquirimos la facilidad para manejar expresiones bien formadas gobernadas por una gramática.
- La semántica se aboca a la naturaleza de la relación entre las palabras y los mundos posibles en la medida en que conocemos dichos mundos.
- La pragmática tiene que ver con la manera en que finalmente logramos utilizar expresiones bien formadas acerca de situaciones posibles para ejercer un efecto sobre otros.

Bruner sugiere que la fase pragmática es la primera y la sintáctica la última, considera que la adquisición del idioma –en uso- depende fuertemente de la interdependencia de la corrección sintáctica, el significado, la referencia y las convicciones de uso. Para Bruner el lenguaje se aprende al utilizarlo, una parte central de su uso es lo que llamó formatos, que son intervenciones altamente delimitadas entre la madre y el hijo.

El trabajo de Bruner sostiene la hipótesis de que “Para que el niño sea hábil en el uso del lenguaje, primero tiene que entrar en contactos sociales para conocer los usos del lenguaje en el discurso relacionados con una intención compartida y para establecer presuposiciones” (Bruner, 1982:15). A ese tipo de contacto social el lo llama *formato*. Un formato es “un microcosmos de reglas en el que el adulto y el niño hacen cosas el uno por el otro. En un sentido general, es el instrumento del comportamiento humano por medio de patrones” (Bruner, 1982:16). Los formatos son vehículos cruciales en el tránsito hacia la comunicación mediante el lenguaje; los formatos dan patrones a la interacción comunicativa entre un infante y la persona que lo atiende antes de que empiece el habla léxico-gramatical.

“Un formato implica la interacción de dos partes contingentes. Es contingente en el sentido de que las respuestas de cada miembro pueden ser mostradas para ser dependiente de una respuesta del otro" (Bruner, 1982:16). Debido a que cada miembro del par tiene un objetivo y los medios para lograr su conquista, es necesario que el formato cumpla con dos condiciones: primero, que las respuestas sucesivas de un participante sean instrumentos para esa meta, y segundo, que haya un orden discernible en la secuencia indicando que la meta ha sido alcanzada.

Los formatos, definidos en este sentido, pueden llegar a ser tan variados y complejos como sea necesario. Su crecimiento se va dando de muchas maneras; podrían en un momento incorporar nuevos medios o estrategias para alcanzar ciertas metas, incluidas las simbólicas y las lingüísticas. Podrían moverse hacia una coordinación de las metas de los dos hablantes, no solamente en el sentido de acordar sino también respecto de la división de labores o a quién es el que toma la iniciativa. Los formatos son modulares en el sentido de que son manejables como rutinas para ser incorporados en grandes escalas, es decir como rutinas a largo plazo. Un formato de saludo, por ejemplo, puede estar incorporado en una rutina a gran escala incluyendo otras formas para entrar en acción. En este sentido cualquier formato dado puede tener una estructura jerárquica, con algunas partes que se pudieran interpretar en términos del lugar que toman en una estructura más larga. La creación de formatos de orden más alto por medio de la incorporación de subrutinas es una de las principales fuentes de los contenidos que dan lugar a una presuposición. Lo que se incorpora se vuelve explícito o presupuesto. Los formatos, excepto cuando se trata de verdaderos convencionalismos, no pueden ser identificados independientemente de las percepciones de los participantes. En este sentido, ellos tienen la propiedad de ser contextos definidos por los participantes. La definición colectiva de formatos es una de las mayores formas de control que tiene una comunidad sobre sus integrantes. Una vez que un formato se vuelve convencional y se 'socializa' se le puede ver como teniendo exterioridad y coacción y se aprecia como un estatus objetivo. Eventualmente, proveen las bases para los actos del habla y pueden ser reconstituidos según las necesidades por medios lingüísticos.

Bruner sugiere que una propiedad especial de los formatos "es que son asimétricos respecto de la 'conciencia' de los miembros, uno que tiene idea de qué se trata y el otro sin saber nada o sabiendo menos. El adulto sirve como modelo, andamio y monitor, hasta que el niño puede hacerlo por sí mismo" (Bruner, 1982:18). Bruner utiliza los formatos del juego "asignándoles una estructura profunda y un conjunto de reglas de realización con las cuales se maneja la superficie del juego" (Bruner, 1995:47).

Cedillo (1996) emplea el concepto de formato creado por Bruner (1982) para enmarcar las interacciones alumno-profesor y alumno-calculadora. El concepto de formato de Bruner fue adaptado para ayudar a los niños a desarrollar la función referencial del lenguaje a través de confrontarlos con la identificación de patrones numéricos generales y su descripción algebraica mediante el lenguaje de la calculadora. También acude a este concepto para diseñar esquemas de interacción alumno/calculadora/profesor, con la intención de que los niños desarrollen la función lingüística de petición, en el sentido de propiciar la necesidad social de emplear el lenguaje de la calculadora (código algebraico) como un medio de comunicación mediante el que se pueden obtener respuestas deseadas; en particular, que los niños logren que ésta produzca los resultados que ellos requieren en el contexto de dar respuesta a preguntas específicas sobre el comportamiento general de patrones numéricos.

Para Bruner, la fase pragmática del lenguaje consiste en el *intento comunicativo,* "… nos comunicamos teniendo alguna finalidad en la mente, alguna función que cubrir, pedimos o indicamos o prometemos o amenazamos" (Bruner, 1995:38). Para que el niño se apropie de la fase pragmática del lenguaje se requiere que el adulto sea un compañero. La pragmática necesariamente se relaciona con el discurso y, al mismo tiempo, es siempre un contexto dependiente de un contexto compartido. El discurso presupone un acuerdo recíproco entre los hablantes que incluye por lo menos tres elementos: (i) un conjunto compartido de convenciones para establecer la intención del emisor y la comprensión del receptor, (ii) una base compartida para explorar las posibilidades deícticas espaciales, temporales e interpersonales del contexto; y (iii) medios convencionales para establecer y retribuir presuposiciones. Estos tres elementos, anuncio de intención, regulación de deixis y control de presuposición, dan al discurso sus orientaciones futuras, presentes y pasadas.

Bruner, con base en datos empíricos, encontró que referir y pedir son las principales funciones lingüísticas que los niños desarrollan en el proceso de dominio del lenguaje como medio de comunicación. La referencia depende del contexto donde se desarrolla; Bruner afirma que “la referencia depende no sólo del dominio de la relación entre signo y significado, sino del uso de los procedimientos sociales de común acuerdo con ambos, para asegurar que el signo y el significado en proceso de unión se conjugan en una forma negociable con los usos de otros” (Bruner, 1995:88). La finalidad de la petición es conseguir que alguien entregue cosas y las cosas están en el mundo real, no sólo en el lenguaje (Bruner, 1995). El niño presenta tres tipos de petición, primeramente de un objeto, posteriormente de invitación a realizar algo y finalmente de apoyo para lograr algo que no puede hacer (Bruner, 1995).

Cedillo (1996) se propone explorar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra por medio del paradigma pragmático de la adquisición del lenguaje. Esto implica crear un método de enseñanza en el que los medios de aprendizaje consideren las circunstancias sociales que enmarcan la adquisición de la lengua materna. Cedillo considera que un enfoque sintáctico se identifica con una postura de enseñanza en la que el alumno juega el papel de ‘consumidor de un aporte lingüístico’, más específicamente, un consumidor de las reglas que gobiernan el uso del código algebraico. En este enfoque el maestro actúa principalmente como modelo para que sus alumnos le imiten y el tratamiento de los contenidos está caracterizado por la introducción al álgebra empezando por el estudio de las expresiones poli nominales y las reglas para hacer transformaciones, después ecuaciones y finalmente funciones.

Un enfoque semántico podría caracterizarse por el alumno desempeñando el rol de un “solucionador” de problemas acudiendo a significados provenientes del contexto que lo rodea y llevando ese conocimiento al ámbito del lenguaje algebraico” (Cedillo, 1996). Este tipo de acercamiento confía en sustentar la introducción de la sintaxis algebraica por medio de proveer a los alumnos los ‘significados’ del sistema simbólico. El maestro es la persona más activa en el salón y es el modelo a seguir por sus estudiantes. El maestro trata de ofrecer todas las posibles soluciones para resolver los problemas, tratando de ayudar a los alumnos a inducir propiedades generales o reglas partiendo de un número limitado de ejemplos.

Cedillo (1996) propone que un acercamiento pragmático debería permitir a los alumnos empezar con álgebra *usando* su código, este principio marca la diferencia principal con los otros acercamientos. A pesar de que esto parece paradójico, proponer empezar por usar un lenguaje simbólico formal antes de conocer por lo menos algunas definiciones de éste, hay un buen ejemplo al que podemos acudir: los niños aprenden su lengua materna sin ningún conocimiento previo de reglas gramaticales o definiciones. Si asumimos esta premisa, el trabajo de Bruner acerca de la adquisición del lenguaje puede ser retomado para aprovechar ciertas facilidades tecnológicas ofrecidas por las calculadoras gráficas y en el marco de una entrada pragmática al aprendizaje del álgebra (en el sentido de Bruner, 1983). A continuación se discute esto con mayor amplitud.

En principio, tanto el lenguaje natural como el álgebra escolar tienen que ver con aprender a utilizar un sistema de signos. Una de las diferencias más evidentes entre la adquisición de estos dos sistemas es que el lenguaje natural se aprende inmerso en el rico ambiente proporcionado por la interacción adulto-niño. Es decir, comprende un proceso de aprendizaje que, como se ha comentado, recibe una gran cantidad de ayuda de lo que Bruner llama un Sistema de Apoyo en la Adquisición del Lenguaje (LASS, por sus siglas en inglés). A este respecto, Cedillo propone que, de acuerdo con el concepto de LASS de Bruner, el contexto escolar puede ser organizado artificialmente para crear un Sistema de Apoyo en la Adquisición del Álgebra (AASS, por sus siglas en inglés). Un sistema en el que la habilidad del docente en el uso del código algebraico se refuerza al incorporar un componente tecnológico (la calculadora gráfica) que le permite lograr un medio en el que los niños perciben el código algebraico como un lenguaje-en-uso para expresar y negociar ideas matemáticas. En otras palabras, el uso de la calculadora se delimita de manera que permita a los niños usar el código algebraico como un "vehículo para hacer cosas con y a otros". En dicho medio, el código de la calculadora no sólo permite a los niños utilizar un sistema simbólico para describir las relaciones matemáticas, sino, además, el uso del código de la calculadora comunica acciones algebraicas, ya que dicho código se encuentra inserto dentro de un sistema de signos gobernado por reglas algebraicas. El papel asignado al lenguaje de la calculadora está en relación con la perspectiva de Bruner de que "si el niño no contara con un mecanismo que le ayudara a descifrar el código del lenguaje, el conocimiento del mundo externo le ayudaría poco, sin dicho descifrador de código, el niño estaría de nuevo en la vieja situación expuesta por los empiristas: operando simplemente por inducción".

Según Cedillo el establecimiento de dicho Sistema de Apoyo en la Adquisición del Álgebra se basa en tres supuestos teóricos de naturaleza pragmática. El primero tiene que ver con la provisión de un contexto que hace posible el discurso. Un contexto que ayuda a los niños a utilizar el "habla algebraica" para alcanzar objetivos matemáticos. La segunda asunción confía en la posibilidad de crear "formatos matemáticos" que permitan enmarcar tanto las interacciones alumno-profesor como alumno-calculadora. El tercero tiene que ver con el papel del profesor desde una perspectiva pragmática hacia la enseñanza del álgebra. Se supone que dicho sistema puede proporcionar un contexto que ayude a los alumnos a vincular significados al código simbólico de la calculadora para que puedan usar el nuevo código formal como una herramienta para afrontar la descripción de relaciones numéricas generales y negociar soluciones a problemas verbales de álgebra. Estos supuestos se discuten más detalladamente en los siguientes párrafos.

Un contexto para el discurso algebraico

Cedillo habla acerca de que el discurso es siempre dependiente del contexto, depende de un contexto compartido. Para lograr promover el "discurso algebraico", las actividades experimentales fueron diseñadas de manera que los niños puedan recurrir a su conocimiento aritmético previo para dar sentido y negociar respuestas posibles a las preguntas en cuestión. Es decir, el dominio de hechos aritméticos elementales por parte de los niños desempeña el papel de un conjunto compartido de convenciones que apoya la intención comunicativa del profesor y la adquisición del lenguaje por parte del alumno. La interacción emisor-receptor es doble: profesor-alumno y alumno-calculadora, que conlleva la traducción de un sistema simbólico de signos (el lenguaje natural) a otro sistema simbólico de signos (el código de la calculadora). El papel asignado a la aritmética como un sistema simbólico compartido intenta cumplir con la condición preparatoria para el discurso: establecer una base apropiada para la expresión en el proceso de traducir desde un sistema simbólico a otro. En suma, el contexto aritmético proporciona medios convencionales para establecer y recuperar presupuestos que ayudan a los niños a negociar significados para el código simbólico en uso. En este caso, se concibe al significado como "un fenómeno culturalmente mediado que depende de la existencia previa de un sistema simbólico en el que los símbolos dependen de la existencia de un 'lenguaje' que contiene un sistema de signos ordenado o gobernado por reglas" (Bruner, 1990: 69).

Formatos matemáticos

Cedillo habla de un segundo supuesto del que depende el Sistema de Apoyo en la Adquisición del Álgebra, que consiste en la viabilidad de crear *formatos matemáticos*. Al adaptar los conceptos de Bruner, concibe a los formatos matemáticos como un entorno rutinario y familiar que enmarca la interacción profesor-alumno y alumno-calculadora para hacer eficaz la comunicación. Dichos formatos deben permitir a los niños adentrarse en tareas matemáticas que funcionan de manera similar a los usos del lenguaje en el discurso (código algebraico), y dan forma a un microcosmos en el que las respuestas sucesivas del niño son medios para un fin y existe un orden en la secuencia que indica que se ha alcanzado el fin último.

Una característica importante que define la estructura de los formatos matemáticos es que su intención es incorporar el desarrollo de las dos funciones lingüísticas básicas de referencia y petición. Al estructurar los formatos matemáticos se ha procurado ayudar a los niños a desarrollar dichas funciones lingüísticas. La adaptación que realiza Cedillo de los conceptos de Bruner a los términos matemáticos consiste, respectivamente, en *usar* el código algebraico para (a) describir relaciones generales (referencia) y (b) negociar soluciones a problemas (petición). Así, cada formato se estructuró para que incluyera una sección que requiere que los niños describan una relación numérica general por medio del código de la calculadora (referencia) y otra sección en la que los niños tienen que contestar preguntas y negociar soluciones a problemas mediante el código de la calculadora (petición). Es decir, para "hacer que la calculadora entregue lo que se le ha solicitado". La "sección de referencia" tiene siempre la misma forma, mientras que la de "petición" varía en su contenido. Esta estructura permitió la creación de formatos matemáticos de orden superior a través de incorporar formatos de subrutinas, que, en teoría, proporcionan una base para los presupuestos compartidos en la interacción alumno-profesor (aquello que se incorpora se vuelve implícito o presupuesto).

El papel del profesor

Cedillo considera que el profesor cumple el papel de un usuario eficiente del lenguaje de la calculadora. Se asume que su dominio del lenguaje le permite guiar la manera en que es utilizado para ajustarlo al nivel actual de conocimiento de los niños. Entre las responsabilidades específicas implícitas en esta pesada tarea, el profesor debe darse cuenta de que la calculadora sólo proporciona un buen ambiente para que los niños produzcan y pongan a prueba expresiones algebraicas pero no proporciona a los niños "nuevas palabras" que permitan que su "discurso algebraico" sea fluido. Por tanto, el profesor debe asumir el crucial papel de ayudar a los niños a producir aquellas expresiones que van más allá de su iniciativa creativa.

Otra importante responsabilidad del profesor es manejar y responder apropiadamente a las expresiones ambiguas y poco ortodoxas que los niños puedan eventualmente producir. A este respecto, la intervención del profesor se encuentra guiada (en teoría) por el principio pragmático de que los niños adquieren el lenguaje con la intención de comunicarse. Es por el interés de realizar dichas intenciones comunicativas que el niño reconoce nuevos aspectos estructurales relacionados con el lenguaje. Una intención de este tipo utiliza cualquier recurso disponible. En este sentido, los únicos errores que el maestro debe atender, o a los que debe responder, debieran ser aquellos que sabe que el niño puede corregir si se le hacen notar.

La metodología pedagógica propuesta por Cedillo descansa de manera significativa en el concepto de *formato matemático*. El concepto de formato fue la pieza clave para diseñar las actividades. El AASS retomado en este estudio ha sido pensado como un enfoque pragmático para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en el sentido de que coloca la actividad matemática en un contexto en el que los niños pueden utilizar el lenguaje de la calculadora sin tener definiciones o reglas previas que gobiernan el uso de dicho código formal. Se supone que las definiciones y reglas se desarrollan por medio del uso del lenguaje de la calculadora. Esto es, el AASS que plantea Cedillo se basa en la hipótesis de que el *uso* del lenguaje es lo que *proporciona significados* y apoya la *adecuada producción* de expresiones lingüísticas, en oposición a la postura que sostiene que las definiciones y reglas son lo que determina los usos apropiados del lenguaje.

Cedillo cuestiona un principio teórico ampliamente ejemplificado en las prácticas de enseñanza: *“Los significados del lenguaje determina sus usos.”* El autor señala que en muchos libros de texto y en las formas de enseñanza de un buen número de profesores se observa que primero se presentan las reglas, definiciones y ejemplos (significados), y posteriormente se cierra el tema con una serie de problemas y ejercicios, donde deben aplicarse esos significados (usos) (Cedillo, 2000). Esta ha sido una manera de llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pero tanto las estadísticas, los reportes de investigación como la práctica cotidiana nos muestran que hay un gran problema de apropiación del lenguaje matemático por parte de los alumnos que no ha sido resuelto positivamente por el uso de esa estrategia de enseñanza orientada por el aprendizaje de reglas y procedimientos, en donde el conocimiento matemático se limita a saber operar correctamente (Cedillo, 2000).

En contraparte a este principio, Cedillo, buscando una alternativa, propone el siguiente principio: *“Los usos del lenguaje determinan sus significados”.*

Cedillo plantea que el aprendizaje del lenguaje algebraico debe darse a través del uso, de manera similar a la forma en que aprendemos la lengua materna. Los niños aprenden la lengua materna a partir de usarla como medio de comunicación, no conocen las reglas gramaticales, ni el significado de las palabras, simplemente necesitan comunicarse; posteriormente cuando ingresan a la escuela aprenden las reglas gramaticales, pero el aprendizaje básico de la lengua materna se dio a partir del uso de la misma.

Este principio propuesto por Cedillo tiene sus antecedentes principalmente en Brunner, pero también retoma puntos de otros autores:

- Papert (1980).- De quien retoma que a través de los ambientes Logo, el alumno desarrollo su conocimiento.
- Mason (1985).- De quien retoma el concepto de generalización, el cual es central en las matemáticas para poder llegar a los conceptos.
- Sutherland (l987).- Acerca del papel que tiene el maestro en el proceso enseñanza-aprendizaje en los ambientes Logo.

A partir del aporte de estos autores Cedillo da concreción a su presupuesto teórico aplicándolo a la enseñanza de las matemáticas. Para esto propone utilizar las calculadoras gráficas como una herramienta que permite abordar la enseñanza de contenidos aritméticos, geométricos y algebraicos. La calculadora gráfica requiere de un lenguaje (código) para ser utilizada funcionalmente y permite la creación de un ambiente de aprendizaje donde la máquina representa el papel de la comunidad que le exige al estudiante el uso de un lenguaje matemático para poder comunicarse con ella (Cedillo, 2000).

Es éste el marco conceptual que utilizamos para sustentar teóricamente la investigación que realizamos en esta tesis respecto al aprendizaje y a la estrategia de enseñanza.

### *Concepto de número*

Desde el punto de vista de la psicología orientada a una interpretación más socio psicológica el aprendizaje no sólo es una actividad intencional, se requiere que los niños aprendan de una manera significativa y por esto los propósitos de la enseñanza deben ser relevantes para su crecimiento y adaptación al mundo que les rodea (Nickson, 2000). Ha habido un cambio notable en los asuntos filosóficos relacionados con la educación matemática que se refleja en las percepciones de la naturaleza de las matemáticas, desde ser vistas como un cuerpo abstracto de conocimiento a ser asumidas como un conocimiento social en sus orígenes y en sus aplicaciones (Lerman 1990, Ernest 1991, Restivo 1991, Nickson 1992, Nickson y Lerman1992 citados por Nickson 2000). Desde esta perspectiva se reconoce que las matemáticas tienen su origen en la actividad humana y como cualquier disciplina mediante procesos de ensayo y error y por el intercambio y negociación de ideas.

Para Nickson y Lerman (1992) (citados por Nickson 2000) la conjetura, las hipótesis, la prueba de ideas, el ensayo y error, todos ellos llegan a ser parte de los aspectos de las matemáticas que se toman como algo natural. Se conserva el énfasis sobre el niño como aprendiz que nutre su experiencia en el contexto del mundo social antes de entrar al salón de clases, en una vivencia que es continua y contigua con su estancia en la escuela que afectará el qué y el cómo aprende en el salón de clases.

En este orden de ideas el manejo de los números se ve como “la habilidad para operar flexiblemente con los números al resolver problemas reales, especialmente al trabajar eficientemente con cálculos y estimaciones mentales o usando una calculadora” (Dickson et al. 1984:250). A este respecto Askew (1997:25), señala que “el manejo de los números se refiere a la habilidad para procesar, comunicar, e interpretar información numérica en una variedad de contextos”. Así mismo, Baker (1995) menciona que se puede ver al manejo de los números de una manera en que las matemáticas son el producto y la base para la ciencia, el comercio y la tecnología de una sociedad.

Hughes (1986), encontró que “las estrategias para contar que usan los niños con frecuencia no son enseñadas y que son intentos significativos de las formas de razonamiento del niño para resolver los problemas ellos confrontan” (citado por Nickson 2000).

Gray et al (1997) consideran que en el proceso del aprendizaje para contar, primero que nada los niños tienen que “estar seguros que así es”. Es en esta etapa de contar con seguridad que ocurre la separación proceptual. Los niños que proceden a pensar en forma proceptual tienen un conocimiento significativo de los hechos numéricos y pueden usar los procedimientos de conteo de una manera flexible. Los niños que usan procedimientos de conteo y hechos numéricos a los que les falta flexibilidad, parecen haber aprendido de una manera mecánica y no de una manera significativa. Esto tiene que ver con un aspecto más cualitativo del pensamiento de los niños; por un lado, el niño pone énfasis sobre objetos concretos y acciones sobre estos mismos objetos y, por otro lado, pone énfasis en la abstracción y flexibilidad intrínsecas dentro del objeto encapsulado (citado por Nickson 2000). Gray et al (l997), sugieren que los problemas que tienen los alumnos de bajo rendimiento no tienen que ver con un déficit en la memoria para trabajar, sino que su problema se asocia con el uso y no con la capacidad.

Otros autores van más allá y proponen esquemas que pueden ayudarnos a explicar los conceptos que generan los niños sobre los números. Fuson (1992) identifica los siguientes 5 puntos que los niños deben aprender para desarrollar su habilidad de contar:

1. Aprender la secuencia numérica de su propia cultura.
2. Aprender el acto indicativo de su propia cultura (generalmente acto de dirección, es decir leer una cantidad de derecha a izquierda).

3. Aprender a usar el acto de dirección para conectar una etiqueta numérica con una colección (hacer correspondencias locales).
4. Aprender métodos para recordar las colecciones ya contadas, a fin de que éstas no vuelvan a ser contadas (hacer una correspondencia global).
5. Aprender el significado cardinal del conteo.

La importancia de contar depende de un entendimiento del aspecto cardinal del número que Fuson (1992) menciona como el punto final del proceso de aprendizaje para contar. El aspecto ordinal del número, donde el conteo es el proceso de ordenar una secuencia (primero, segundo, tercero, etc.) aparece como un asunto simple, comparado con la comprensión de la cardinalidad, donde un número dado denota una cantidad. La ordinalidad responde a la pregunta "¿cuál?". La cardinalidad responde a la pregunta "¿cuántos?". Aunque puede parecer que sean preguntas sencillas, un punto repetidamente establecido en la investigación es la dificultad que tienen algunos niños para progresar de la comprensión de los números ordinales a los números cardinales, los cuales pueden ser un obstáculo considerable en su desarrollo matemático (citado por Nickson 2000)

Los niños tienen que trasladarse desde un nivel donde usen los números como nombres de palabras en una secuencia, hasta usarlos en una correspondencia 1 a 1 con un conjunto de objetos (no necesariamente dispuestos en una línea donde ellos cuenten de izquierda a derecha) y por último usar solamente una palabra que indica un número, para darle un nombre, hasta un conjunto que cuente con más de un objeto.

Gelman y Meck (l986), identifican 3 tipos de competencia que los niños deben tener, al aprender a contar:
1.- Lo conceptual.
2.- Lo relativo al procedimiento.
3.- La utilización.

Empiezan con la competencia conceptual, se siguen hasta llegar a la de procedimiento y eventualmente llegan a la competencia de utilización cuando ya han logrado un entendimiento de la cardinalidad (citados por Nickson, 2000).

Wright (l998), intentó encontrar qué estrategias usan los niños para identificar, reconocer y escribir numerales, así como las dificultades que tienen al querer adquirir esas habilidades (citado por Nickson 2000). Los tipos de dificultades que presentaron los niños incluyeron:

- Identificar los numerales cuando se presentaron en una secuencia, pero no cuando estuvieran fuera de esa secuencia.
- Decir la secuencia numeral del 1 al 10, pero al mismo tiempo poder identificar los numerales cuando se presentaron en un orden aleatorio.
- Usar los nombres de los dígitos para identificar numerales de 2 dígitos, por ejemplo 20 y 8 para 28 (un sistema que falla en números como el 12).
- Identificar un numeral de 2 dígitos en orden opuesto, por ejemplo 27 como si fuera 72.
- Dado cualquier numeral, identificarlo por medio del conteo hacia delante. Por ejemplo, para 8, decir 1, 2…. 8.
- Ser capaz de escribir un numeral sólo después de contar hacia adelante, por ejemplo, “1, 2, ., 7” para escribir el numeral 7.
- La dificultad para identificar oralmente numerales del 1 al 10 (incapaces de generar el sonido que correspondía con el numeral).

Como puede apreciarse, en las diferentes aportaciones que realizan los autores citados se reportan dificultades para la apropiación del concepto de número en los niños. Para que puedan acceder al conocimiento de los números racionales es importante que tengan claro el concepto de número. De ahí que Gelman y Meck (l986) identifiquen 3 tipos de competencias que los niños deben tener al aprender a contar, posteriormente Fuson (1992) plantea cinco puntos que los niños deben aprender para desarrollar su habilidad de contar: Al tener claridad en el concepto de número, los niños podrán acceder al conocimiento matemático.

***Los números racionales en el contexto de la investigación***

Kieren (l983), hace énfasis en los números racionales como un sistema sofisticado donde adquieren términos de su aprendizaje. El autor afirma que el conocimiento de los números racionales involucra cuatro subsistemas o subconstructos: medidas, cocientes, razones y operadores. Es decir, el conocimiento del número racional puede verse como un conjunto de modelos que se conectan, por ejemplo, el uso de los números racionales como expresión de una medida, como cociente de dos números naturales o como operadores. Kieren propone dos tipos de herramientas o mecanismos mentales: los constructivos y los de desarrollo. Estos últimos son los objetivos para la enseñanza.

Los mecanismos mentales relacionados con el desarrollo del número fraccionario o racional no han sido estudiados con la misma extensión con la que se han investigado los de los números enteros.  Los mecanismos de desarrollo están obviamente relacionados con la experiencia, con la conservación del todo (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) y el razonamiento proporcional (Noelting, 1978; Kurts y Karplus, 1979). Además, se puede pensar en la reversibilidad (para considerar dos inversos complementarios) y la comparación simultánea (para generar equivalencias fraccionarias no unitarias). El autor sugiere que los mecanismos de partición y de equivalencia son mecanismos constructivos usados en el desarrollo de los cinco subconstructos de número racional. La partición y la equivalencia se consideran dos mecanismos constructivos que permiten a un niño o a un joven construir ideas complejas.

Streenfland (l991) presenta la educación aritmética y matemática de Holanda a partir de dos corrientes de pensamiento. Una corriente sostiene el enfoque tradicional de la aritmética, orientada hacia el dominio del sistema numérico y sus operaciones, con o sin comprensión. Esta perspectiva consiste primordialmente en una práctica dentro del sistema numérico y relega su aplicación. La otra corriente se centra en una aproximación más realista a la aritmética y las matemáticas, en la cual las aplicaciones, llamadas "áreas de problemas realistas", están ubicadas en el corazón del curso de enseñanza. Una variante más, la del estructuralismo, la Matemática Moderna", se agrega a los muchos puntos de vista con los que es posible ver a las fracciones.

Streefland (1991) describe cinco enfoques para la enseñanza del concepto de fracción, con base en la identificación de principios generales que los caracterizan. Enfatiza que esos principios pueden ubicarse en una secuencia que corresponde al progreso en la matematización del número racional:

- La realidad sirve como fuente para la formación de conceptos y como el área de sus aplicaciones.
- Si los alumnos tienen la oportunidad de contribuir activamente a su propio proceso de aprendizaje pueden desempeñar el papel de constructores.
- El énfasis se pone en la producción de símbolos, diagramas y modelos (visuales).
- Las líneas de aprendizaje están interrelacionadas. Es decir interrelacionar las fracciones con la razón y la proporción. Este tipo de relación en el proceso de aprendizaje actúa como salvaguarda contra el inicio de la realidad pura e inalterada.
- Enseñanza altamente interactiva.

Streefland (1991) arguye que el concepto de fracción y sus operaciones son estudiados desde muy diferentes puntos de vista, en donde se consideran varios aspectos. Se exploran contextos y procesos divergentes, por ejemplo, situaciones de reparto o de medición que surgen al trabajar con las proporciones en mezclas, en combinar o en aplicar recetas, donde también se pone atención a las diversas características de las fracciones en estos contextos, la fracción como operador.

Freudenthal (l983) critica al movimiento de la "matemática moderna" por practicar lo que él llamó "inversión antididáctica", es decir comenzar por los conceptos en vez de las situaciones que tienen esa estructura. Plantea su análisis desde las perspectivas filosófica y didáctica. Desde la perspectiva filosófica hace un análisis fenomenológico de los objetos matemáticos como medios de organización de los fenómenos del mundo; realiza este análisis con intención didáctica o al servicio de la didáctica, en la medida en que es el análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular. Plantea la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Los objetos propiamente matemáticos de los que se habla son los números racionales.

En el mundo los números se usan en contextos de secuencia, recuento, cardinalidad, ordinalidad, medida, código, guarismo escrito y cálculo. Los usos de los números en cada uno de esos ámbitos siguen reglas distintas. Las fracciones se utilizan en un contexto ordinal en donde el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa. En este análisis fenomenológico el campo semántico de número está constituido por la totalidad de los usos de los números en todos los contextos.

Freudenthal (l983), considera que los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos, tanto del mundo real como de las matemáticas. Afirma que lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Según Freudenthal (l983), las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional –una fuente que nunca se seca. “Fracción” es la palabra con la que entra el número racional y en todas las lenguas está relacionada con romper, fracturar. .

Para Freudenthal (l983), los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Desde su punto de vista, este supuesto erróneo es por el que las fracciones presentan más dificultades que los números naturales y por eso es que mucha gente nunca aprende lo que se refiere a las fracciones.

***Las Fracciones***

Kieren ve en las fracciones un fundamento para las relaciones algebraicas posteriores y considera que la comprensión de los números racionales es básica para el desarrollo de las ideas matemáticas en la escuela.

Behr et al. (1992) reportan que muchos estudios realizados sobre fracciones concuerdan en que los conceptos relacionados con los números racionales permanecen como un obstáculo serio en el desarrollo matemático de los niños. Algo de esta dificultad puede deberse al hecho de que la idea de fracción es una de las más abstractas a las que los niños se tienen que enfrentar sin que dispongan de un contexto “natural” en el que ellos se apoyen (Booker, 1998, citado por Nickson, 2000).

Para Kieren (1983), la partición está definida como la división equitativa de una cantidad en un número dado de partes. La base para el lenguaje que se emplea al hablar de la relación parte-todo es una clase completa de fenómenos continuos o de colecciones de objetos. La acción de partición es central para la generación y la aplicación del conocimiento del número racional.

Kieren (l983) señala cuatro aspectos de la actividad de repartir:

- La partición es un tipo de clasificación o asignación basada en el criterio de “igualdad” o “suficiencia”. Esta clasificación particular tiene una génesis social, la acción de repartir.
- La acción de “partir” puede estar relacionada con fenómenos discretos o continuos y puede servir para generar actividades de partición sistemáticas, como el reparto.
- La partición se relaciona con el lenguaje que describe el acto y los resultados de la partición. Esto puede ejemplificarse con el lenguaje activo de niños pequeños al separar una cantidad en dos partes y decir “aquí esta la mitad”. Es interesante notar que dicho lenguaje de los pequeños contiene precursores de ambos aspectos del número racional: el cuantitativo y el relacional (“tengo cuatro y medio”; “toma la mitad”).
- La partición es la conexión de partes de un todo con la medida o el número. Por ejemplo, no importa cómo se subdivida una cantidad en tres partes, el tamaño de cada parte es el mismo.

Kieren (l983), señala que los comportamientos esperados de los niños con relación a la partición pueden ser descritos empleando cinco tipos de acción que detallaremos a continuación. Menciona que estas categorías representan una primera aproximación al desarrollo de la partición como un mecanismo constructivo:

a) Separación: Dividir el conjunto dado (o la cantidad), dividir en el número apropiado de conjuntos, clasificar atendiendo a otro criterio distinto del número; usar un criterio de división diferente al de la “igualdad”.
b) Igualdad: Separar una colección en subconjuntos iguales, reacomodo en función de un criterio de igualdad; partir en dos empleando apareamiento.
c) Partición algorítmica: “Reparto” de uno en uno; procedimientos “mixtos” de reparto.
d) La partición y el número: Vincular la “igualdad” con el número o el tamaño de las particiones resultantes; generalización del proceso y los resultados de una partición asociada a números grandes –por ejemplo, en cien partes.
e) La partición avanzada: partición repetida; dada una partición, transformarla añadiendo el número de particiones o bien reduciendo su número; dada una partición visualizar otra inmersa en la anterior (por ejemplo, dada una partición en cuartos visualizar que ya existe una partición en dos partes).

Hay cuatro ideas identificadas en conexión con los números racionales, referidas por Kieren (1988) y reportadas por Behr et al. (citados por Nickson, 2000):
1.- Medida.
2.- Cociente.
3.- Número que expresa una relación.
4.- Operador multiplicativo.

Behr et al. sugieren que las dificultades inherentes a la enseñanza de números racionales y de fracciones pueden surgir del hecho de que cuando se aplican a situaciones de la vida real y se ven desde un punto de vista de la enseñanza, las fracciones “empiezan a tener numerosas personalidades”, presumiblemente influenciadas por estas cuatro ideas que acabamos de mencionar. Examinan dos de las ideas de Kieren, la idea de la parte en un todo, y la de cociente, que se ajustan a un enfoque para la enseñanza de las fracciones en una de tres maneras:

- En la división de una magnitud continua en partes iguales (por ejemplo capacidad o longitud).

- En la división de un número de objetos en conjuntos iguales (por ejemplo 12 manzanas divididas entre 4 grupos).
- La división de la unidad en un número de partes iguales (por ejemplo una pizza en cuatro porciones iguales).

La idea de la relación parte-todo nos lleva a dos diferentes interpretaciones de las fracciones. Usaremos la fracción ¾ para ilustrar este punto. Tres cuartos (¾) pueden verse como partes de un todo, donde ¾ es tres porciones cada una igual a la cuarta parte de un todo; esto puede aplicarse tanto a cantidades discretas como a continuas, en donde la unidad es ¼. En forma alternativa, ¾ puede ser visto como la parte compuesta de un todo, donde representa una "unidad de ¾", y que está formada por cantidades discretas (como en el caso de una sola pieza que mide ¾ de un pastel de manzana).

Una consideración más sobre la enseñanza y del aprendizaje de las fracciones es ofrecida por Streefland (1991), quien concluye que hay dos fuertes problemas con las fracciones:

- Excesiva minusvaloración de la complejidad de esta área de aprendizaje para los niños.
- El acercamiento mecanicista, desligado de la realidad y centrado en rígidas aplicaciones de las reglas.

Streefland (1991) plantea cinco acercamientos para la enseñanza del concepto de fracción, que en cierto sentido establecen una ruta desde un enfoque completamente formal que se desarrolla a través de situaciones de la vida real.

1. El enfoque estructuralista, que ve a las matemáticas como una adquisición cognoscitiva, como un sistema ordenado, cerrado, y deductivo. En lo que a fracciones concierne, esto significa un énfasis sobre la equivalencia, las reglas, y las propiedades para la conversión de fracciones con diferentes denominadores, en fracciones equivalentes con el mismo denominador. La relación de equivalencia es una idea central en este acercamiento.

2. El enfoque mecanicista, que simplemente compromete a los alumnos en una secuencia de fases en el proceso del aprendizaje donde la meta es la ejecución de los algoritmos y se aborda escasamente la aplicación. A este respecto Streefland señala que bajo este enfoque los estudiantes dan la impresión de que están remando contra la corriente, trabajando con problemas vacíos de cualquier contexto relacionado con su vida social.

3. El estructuralismo pragmático es un acercamiento que asume que el progreso en el sistema matemático requiere en determinado momento de la aplicación de las fracciones en la medida en que son abordadas siguiendo una progresión vertical dentro de la materia. Habiendo cultivado el concepto de fracción, se pueden aplicar las reglas que gobiernan su uso en etapas más avanzadas, por ejemplo, en operaciones algebraicas.

4. El siguiente acercamiento es lo que Streefland (1991) llama *intermezzo*, un término que encapsula una combinación del acercamiento estructural, con un intento de hacer a las fracciones más significativas por medio de la materialización del concepto en varios formatos. “Materialización” significa aquí el uso de materiales estructurados en la enseñanza de fracciones. Esto es aprovechado en el servicio de la matematización vertical, pero esta materialización adquiere de ese modo una cualidad artificial y arbitraria, debido a la presencia a priori de las metas propuestas. Arguye que esto presume un conocimiento profundo de parte del alumno, que esencialmente debería ser la meta o propósito del aprendizaje. Por ejemplo, un disco dividido en 4 partes iguales para representar cuartos, presume que un niño sabe que, porque es una de cuatro partes iguales, el número que representa esta relación es ¼. En sí mismo, esto no le ayuda al niño a comprender cabalmente el significado de ¼.

5. Streefland resume la influencia estructuralista señalando que ignora a la realidad como una fuente de aprendizaje. El enfoque estructuralista enfatiza la reproducción comprensiva del sistema, mientras que el enfoque realista permite la construcción comprensiva del sistema. Destaca que la realidad debe servir como una fuente de ideas matemáticas que han de producirse. Es el enfoque realista donde encuadra su postura teórica y propone los siguientes principios:

- Que la realidad debe servir como una fuente para las matemáticas que han de producirse. Esto es, que las matemáticas a las cuales se aspira encuentran sus orígenes en áreas de problemas reales.
- Comenzar con situaciones problemáticas abiertas de una fuerte naturaleza generativa. Esto significa que los estudiantes al utilizar este material, se convertirán por ellos mismos en constructores-productores de sus propias matemáticas. Consiste en delinear el sendero de aprender mediante una reconstrucción racional del proceso histórico de aprendizaje.
- El proceso de aprendizaje debe ser altamente interactivo. Para esto es necesario respetar las contribuciones propias de los estudiantes y su rol como constructores.
- Relacionar las fracciones con los conceptos de razón y proporción. Este tipo de relación en el proceso de aprendizaje actúa como salvaguarda contra un enfoque que se base en la realidad pura e inalterada.
- El quinto principio se refiere a la importancia de usar herramientas materiales y ayudas disponibles; es recomendable que las herramientas matemáticas – símbolos, esquemas y modelos (visuales), sean producidos y creados durante el proceso de aprendizaje.

Resumiendo, Streefland sugiere que la enseñanza de las fracciones se aborde desde una perspectiva realista. Las actividades que se empleen tendrán que producir una cierta cantidad de contenido matemático; esto obliga a tener cuidado de producir un lenguaje para referirse a las fracciones que contenga símbolos adecuados y que sea sustentado por el desarrollo de diagramas convenientes y modelos visuales adecuados. Desde el principio del proceso de aprendizaje deben relacionarse las nociones de fracción y de proporción. El resultado de una cosa y otra es que la comparación y preparación de todo tipo de situaciones (distribución, mezclas, recetas, problemas de tiempo/distancia) puede tener lugar de una forma cualitativa a lo largo del razonamiento proporcional.

Nickson (1997) encontró que la mayoría de los niños de un estudio fueron capaces de identificar exitosamente el cuarto de una pizza en un dibujo, unos cuantos pudieron identificar ¼ cuando la ilustración era de una pista de carreras de caballos representada por un rectángulo largo y delgado.

Newstead y Murria (1998) intentaron explorar el conocimiento sobre las fracciones y sus operaciones de 370 niños de cuarto y sexto grados. En la parte de la indagación correspondiente al orden de las fracciones los niños se confundieron, pensando que los denominadores más grandes daban fracciones más grandes.

A manera de síntesis, podemos plantear que la evidencia indica que las fracciones persisten como una de las áreas más difíciles de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. Se sugiere que esto es porque las fracciones no ocurren de una manera “natural” en la vida diaria de los niños. La noción de la “compartición igualitaria”, por ejemplo, es una de las muchas “personalidades” que las fracciones tienen, y en sí misma no parece ser adecuada para trasmitir el concepto de las fracciones a los niños de manera significativa (aunque es uno de los muchos caminos que pueden conducir a un entendimiento de las fracciones). Se sugiere que para que la enseñanza de las fracciones sea efectiva se usen las fracciones en situaciones realistas que exijan genuinamente compartición igualitaria, las cuestiones relacionadas con la medida y la proporcionalidad. De otra manera los niños parecen continuar viendo las fracciones como entidades que consisten en números enteros separados, por ejemplo, 3/5 es visto como 3 y como 5, pero no como un objeto o expresión que signifique algo llamado “3/5”. Éste es especialmente el caso cuando se llevan a cabo operaciones con fracciones, y se sugiere que la noción de una fracción como un objeto matemático (en sí mismo), necesita ser expresada a través de la enseñanza.

Respecto al uso de materiales manipulables, la evidencia obtenida de la investigación señala que si las características matemáticas que se quiere enseñar no están contenidas explícitamente en los materiales manipulativos, la esencia del significado matemático que supuestamente representan está pérdida. Por ejemplo, una pieza de cartón, cuadrada, rectangular o circular, dividida diestramente en mitades, tercios o cuartos, no les da la experiencia a los niños de lo que esa pieza es una mitad. Es posible que cuando los niños juntan 2 mitades no le puedan dar sentido a la unidad, por ejemplo, si a ellos se les pusieran juntas una mitad de un disco circular y una mitad de una tarjeta rectangular, y pensar que ellos tienen el “entero de algo”.

***La relación parte-todo***

La interpretación parte-todo se entiende como un “todo” o varios (continuos o discretos) dividido en partes; una fracción nos describe la relación entre las “partes” que se consideran y el número de partes en que se había dividido el todo.

Se considera que la relación parte-todo se encuentra en el origen de las demás interpretaciones del número racional. Esta interpretación está en el marco de lo que plantea Kieren (1988), en el sentido de adquirir el conocimiento en forma intuitiva; el problema que esto plantea es el uso de la relación parte-todo en la resolución de problemas la convierta en generadora de lenguaje y símbolos, que van a construir la base y origen del trabajo con las demás interpretaciones. En un primer momento de la secuencia de enseñanza, el objetivo primordial es desarrollar la comprensión del concepto que viene vinculado a una “representación” que el niño pueda hacer de la noción parte-todo.

En esta tesis proponemos que una forma de comenzar a desarrollar el “lenguaje de las fracciones” es integrar el conocimiento que de forma fragmentada e informal llevan los niños en relación a la noción de fracción (en su interpretación como relación parte-todo). Nos proponemos hacer esto aprovechando las facilidades de visualización geométrica que ofrece la calculadora gráfica, en particular, usando la capacidad de esa máquina para producir gráficas de funciones lineales a partir de relaciones cuantitativas que los niños de 7-8 años de edad pueden regular acudiendo al significado de los números naturales que previamente han generado y a sus intuiciones de ubicación espacial.

Freudenthal (1983) habla de la fracción como “fracturador” cuando discute cómo se dividen las magnitudes, con o sin resto. En esta perspectiva las fracciones se presentan en el contexto de un todo que ha sido, o está siendo, cortado, rebanado, roto o coloreado, en partes iguales. El todo puede ser discreto o continuo. La atención puede estar dirigida a una parte, un número de partes o a todas las partes. Las partes pueden estar conectadas o desconectadas. El modo de dividir puede ser estructurado o no estructurado. Al relacionar las partes y el todo mediante fracciones, las partes y el todo se comparan numéricamente según medidas que pueden variar enormemente. La cuestión de cuántas veces una parte cabe en un todo es significativa sólo si uno ha acordado bajo qué condición se consideran las partes como equivalentes. El criterio puede ser numérico o un valor de cierta magnitud. Las fracciones no se agotan con romper un todo en partes, también sirven para comparar objetos que se separan uno de otro o que se experimenta o imagina como si se separaran.

A partir de lo que señala Freudenthal (1983), la fracción se puede interpretar de dos maneras diferentes:

- Como un **fracturador,** donde un todo se tiene que subdividir de acuerdo a cierto número especificado por la situación (parte–todo y cociente).
- Como un **comparador,** donde se tienen dos “todos” diferentes, representados por cantidades o valores de magnitudes y se quiere hacer una comparación cuantitativa entre ellos (medida, operador y razón).

Estos dos grandes grupos se subdividen cada uno en situaciones diferentes estableciendo la siguiente clasificación:

A) Parte-todo.- Un todo, ya sea continuo o discreto, es subdividido en partes equivalentes señalando como resultado un número determinado.
B) Cociente.- La fracción (n/d) se interpreta como un cociente partitivo (n-d): el numerador representa la cantidad que se va a repartir, el denominador el número de partes en las cuales se va a subdividir esta cantidad que cada una de las partes recibe. La fracción en cociente puede ser mayor que 1.
C) Medida.- Se tiene una cantidad medible y una unidad de la cual se quiere determinar cuántas veces cabe en la cantidad que se va a medir.
D) Operador.- La fracción desempeña el papel de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro “similar”. Se puede pensar esta transformación como una ampliación o una reducción de los valores de un conjunto. La fracción como

operador es una transformación que tiene ya implícita una proporcionalidad entre conjuntos.

E) Razón.- Es una comparación entre dos cantidades. La razón es una relación entre cantidades constantes o variables. Ejemplo: Mezclar un bote de pintura roja por cada tres de blanca, la razón sería de “1 a 3” o en su forma fraccionaria de “un tercio, 1/3”. Una razón necesita una condición sobre la variación de las dos cantidades para hacerlas proporcionales. Para entender las ideas básicas de las fracciones, se requiere de la aplicación de un razonamiento proporcional bien definido.

Esta clasificación es señalada por Llinares (1997) retomando autores como Freudenthal y Streefland. Para Llinares es importante que los niños se apropien del primer significado, la relación parte-todo, para que posteriormente puedan acceder a los demás significados de la fracción. Coincidimos con el autor en este señalamiento de la importancia que tiene el dominio del primer significado ya que es el origen de las demás interpretaciones del número racional. Esta interpretación es la más intuitiva en el niño, por lo tanto el problema se plantea en que su uso la convierta en generadora de lenguaje y símbolos, que van a construir la base y origen del trabajo con las demás interpretaciones. Es esta parte intuitiva del niño que nosotros rescatamos al realizar las actividades con la calculadora gráfica.

En un primer momento de la secuencia de actividades, el objetivo primordial es redesarrollar la comprensión del concepto de fracción que viene vinculado a la capacidad de “representación” que el niño pueda hacer de la noción parte-todo. Una forma de comenzar a desarrollar el “lenguaje de fracciones” es dar importancia al conocimiento que de forma fragmentada e informal llevan los niños en relación a la noción de fracción (parte-todo) al trabajar estas ideas, puede ser a través de la calculadora gráfica como estamos proponiendo.

Desde nuestro punto de vista usando la calculadora gráfica los niños pueden llegar a asociar una imagen visual con expresiones simbólicas. Tanto las relaciones lineales como las que no lo son, pueden conceptualizarse mejor cuando existe la capacidad de generar gráficas de estas fracciones con unos cuantos golpecitos sobre la calculadora, esto lo señala Shumway (1992).

### *La calculadora gráfica: un recurso didáctico*

La presencia de la tecnología está transformando notablemente la forma de hacer matemáticas, se ha convertido paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática gracias a su potencial para permitir el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de objetos matemáticos, creando espacios en los que el estudiante puede construir un conocimiento matemático más amplio, más complejo, más profundo y potente. La tecnología ofrece un medio para que el estudiante explore, conjeture, analice, verifique ideas y desarrolle habilidades y estrategias que serán importantes para la resolución de problemas y en otros contextos (De Faria, 2001).

El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar las técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. La visualización y el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación y comprensión de conceptos (De Faria, 2001).

Gálvez (l994) reporta que el uso de la calculadora de bolsillo hace su aparición hacia la década de los setentas, se presenta como satisfacer una necesidad, como un recurso “para hacer cuentas”. Es un instrumento que con el paso del tiempo ha disminuido su costo y actualmente se encuentra al alcance de la mayoría de la población. La disponibilidad de la calculadora inicia una revolución tecnológica que va a permear la mayoría de los hogares y puede transformar muchas necesidades de la educación.

En 1984 se analizaron las investigaciones realizadas sobre los efectos del uso de la calculadora en las matemáticas preuniversitarias, encontrando grandes beneficios potenciales de los instrumentos y poco impacto en el currículo. Hembree and Dessart (l992) revisaron 79 estudios sobre los efectos del uso de la calculadora en los exámenes. Reportan que se mejoraron los resultados en los estudiantes de bajo y de regular aprovechamiento con efectos que parecían pasar de moderados a grandes (de 3 a 8 puntos en una escala de 100). Los resultados de los estudiantes en resolución de problemas mostraron un mejoramiento moderado debido al uso de la calculadora. También se encontró que los estudiantes que usaban las calculadoras mostraron una mejor actitud hacia las matemáticas que la de los estudiantes que no tenían contacto formal con los instrumentos mencionados. El único hallazgo negativo que encontraron Hembree y Dessart (1992) sirve para recordarnos que aunque el uso de las calculadoras en general parece benéfico, es posible que no sea apropiado en todas las ocasiones, en todos los lugares y para todas las materias.

Hembree y Dessart (1992) analizaron nueve estudios adicionales en los que se investigaron los efectos sobre el uso de la calculadora en las matemáticas preuniversitarias (Bartos, 1986; Bitter y Hatfielf n.d.; Colefiel, 1986; Frick, 1989; Heath, l987; Hersberger; 1983: Magee; 1986; Mellon, l985; Szetela and Super, l987). Usaron los resultados de estos estudios para enriquecer los datos que habían obtenido en anteriores investigaciones. Los nuevos datos mostraron que las calculadoras:

- Ofrecen ventajas para comprender y ejecutar las operaciones aritméticas.
- Ofrecen ventajas en la solución de problemas.
- Sirvieron para promover una mejor actitud hacia las matemáticas y una autoestima más alta ligado a esta materia.

Los resultados reportados por Hembree y Dessart influyeron para que en los Estados Unidos la mitad de las escuelas declararan una política formal recomendando el uso de las calculadoras y que en doce estados se propusiera que las calculadoras podían usarse en los exámenes (Jaji, 1986, citado por Hembree, 1992). Según Kansky (citado por Hembree, 1992) para 1987 21 estados habían producido directrices o materiales curriculares para apoyar la incorporación de las calculadoras dentro de la instrucción de las matemáticas.

Con base en esos resultados, en 1980 el NTCM emitió una instrucción para que en todos los grados escolares se aprovechara el uso de las calculadoras. La voluntad de los maestros para enseñar matemáticas con calculadoras ha aumentado en todos lo grados, en un estudio que se hizo en 1980 los porcentajes de maestros que usaban las calculadoras para enseñar matemáticas fueron como sigue: 14% en los grados de primaria, 23% en los grados intermedios, 42% en la secundaria y 62% en la preparatoria (Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt, 1980). Scott (1983) y Jaji (1986), observaron patrones parecidos o similares. En 1989 se encontró que el 55% de los maestros del 5º grado usaban calculadoras por lo menos en forma ocasional (Ford, l989, citado por Hembree). Maury (1988) reporta que el 75% de las secundarias usaban calculadoras por lo menos una vez a la semana.

A partir de la revisión de los estudios antes mencionados Hembree y Dessart (l992) plantean las siguientes observaciones:

- La evidencia proporcionada por la investigación respalda el hecho de que el uso de la calculadora en la enseñanza y los exámenes mejora el aprendizaje y la puesta en práctica de los conceptos y habilidades aritméticas, de la capacidad para resolver problemas y mejora las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. Por esto debe continuarse la investigación para implementar e integrar a la calculadora en el currículo de matemáticas.
- En algunas de las investigaciones las calculadoras se usaron para la enseñanza y su uso no fue aceptado para los exámenes. El no aceptar el uso de las calculadoras tanto para la enseñanza como para los exámenes es una política que debería cambiarse.
- El uso de las calculadoras en los primeros grados sirve con frecuencia para familiarizarse con la máquina, para revisar el trabajo y para la solución de problemas, la preparatoria parece enfatizar el uso de las calculadoras como instrumentos para hacer cálculos y como referencia. No ha habido estudios empíricos sobre cómo integrar  la calculadora directamente en el proceso de aprendizaje. Las conclusiones favorables de la ciudad de Salt Lake sobre el uso de las calculadoras gráficas es una buena promesa para su futuro en álgebra, pero se ha hecho muy poca investigación sobre las calculadoras gráficas.
- Las actitudes de los estudiantes que usan calculadoras son favorables, pero aparentemente algunos estudiantes todavía sienten que el uso de una calculadora

es igual a hacer trampa. Esto último es una actitud no muy afortunada que desarrollan los alumnos.

- La mayoría de las escuelas que poseen calculadoras tienden a tener un solo juego de estos instrumentos en el salón de clases. Parece claro que para un uso más eficiente una calculadora debería estar disponible para cada alumno.
- La década de los ochenta vio el inicio de la incorporación de las calculadoras en las escuelas del nivel básico. Parece evidente que esta tendencia aumentará considerablemente durante los años noventa.

Las calculadoras están ganando cada vez más aceptación en el terreno de los maestros, los resultados de la investigación probablemente han acelerado esa aceptación. Posteriores investigaciones deberían aterrizar en los usos de las calculadoras para el desarrollo de entendimientos conceptuales, del sentido numérico, del sentido gráfico y del cálculo. Asimismo, es necesario atender lo correspondiente a la integración de la calculadora al currículo de la educación básica, donde puede desempeñar un papel central en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado se afirma que las calculadoras tienen el potencial de transformar las matemáticas escolares a través de procedimientos que permitan abordar la identificación de patrones y relaciones. Esto puede pasar cuando se comprenda de mejor manera lo que significa estudiar las matemáticas con la calculadora como herramienta (Reys et al. 1990, citado por Wheatley).

Wheatley y Shumway (1992) proponen que no debiera enseñarse con procedimientos de papel y lápiz la suma y la resta de números de tres dígitos en los grados de segundo y tercero, el algoritmo de la división larga en los grados de cuarto, quinto y sexto, ni la suma o la resta de fracciones en los grados del quinto al octavo. Sería mucho más importante que los estudiantes supieran restar de manera eficiente en vez de usar los complejos algoritmos convencionales. Las matemáticas se debieran estudiar por medio de la exploración de patrones y relaciones en vez de procedimientos fijos para ser bien manejados (Steen, l990, citado por Wheatley). Con el uso de las calculadoras enfocaríamos nuestra atención en el significado y las matemáticas se convertirían en una actividad mucho más atractiva para los alumnos.

Con el uso de la calculadora Wheatley y Shumway (1992), consideran que la estimación y la aritmética mentales se convertirían en los principales componentes del currículo de las matemáticas elementales. A los estudiantes se les motivaría para que crearan sus propios algoritmos por medio de operaciones simples, para lograr esto es necesario motivarlos a usar las calculadoras siempre que tenga sentido para ellos.

Para Wheatley y Shumway (1992), los argumentos de que el aprendizaje de los algoritmos de la aritmética escolar contribuye al conocimiento matemático suenan huecos. Por el contrario los efectos de practicar los procedimientos entendidos de manera muy pobre es posible que dificulten el aprendizaje para actuar matemáticamente. No está nada claro que el llegar a perfeccionarse dominando los procedimientos operacionales sea muy importante para adquirir pensamiento matemático o en el desarrollo de habilidades para resolver problemas. El hecho de que muchos currículo de matemáticas escolares incluyan la práctica de los algoritmos de división con números grandes puede fomentar la creencia de que el entendimiento del procedimiento es entender matemáticas (Wheatley, 1980). El sólo hecho de recordar una serie de pasos al hacer las operaciones es responder a la construcción de relaciones numéricas.  De hecho es más probable el que las actividades para mejorar el uso de la calculadora se diseñaron para facilitar la construcción de las relaciones matemáticas serían más apropiadas y efectivas.

La calculadora puede desempeñar un papel importante en el desarrollo de los números en los niños.  De hecho el usar una calculadora para ejecutar una resta de muchos dígitos tiene muchas ventajas sobre los complejos algoritmos con papel y lápiz. Los niños del tercer grado tienen gran dificultad al restar con números de tres dígitos. Cobb y Wheatley (l988) reportan que las dificultades más frecuentes se encuentran al construir diez y cien como unidades abstractas y al coordinar las unidades de tres rangos diferentes (1, l0, l00); a menos de que los niños hayan hecho estas operaciones, es poco factible que puedan ejecutar restas de tres dígitos de manera exitosa usando el algoritmo estándar. En el reconocimiento de la dificultad cognoscitiva de esta tarea los autores de los libros de texto han proporcionado un método para obtener respuestas sin que se les requiera una comprensión relacional (Skemp, l978).  Aunque se ha hecho un intento por ayudar a los alumnos para que entiendan el procedimiento, esto no es suficiente para llevar a cabo las operaciones cognoscitivas necesarias para darles significado a las matemáticas. Las operaciones con calculadora pueden facilitar la comprensión de las relaciones matemáticas y favorecer el aprendizaje de nociones más complejas que van más allá de simplemente entrenar a los alumnos para que usen un procedimiento en una edad en la que muchos posiblemente no le puedan encontrar sentido a lo que están haciendo.

Los alumnos pueden construir algoritmos no convencionales, esto puede favorecer que deje de existir la distinción entre conocimiento conceptual y procedimental, debido a que ven las matemáticas como algo muy constructivo (Hiebert, l986).

El sentido numérico requiere de una serie de esquemas y operaciones conceptuales que se interrelacionan, es importante que los alumnos le den un buen significado a las ideas matemáticas construyendo los conocimientos de su mundo matemático personal (Wheatley, l991). Por ejemplo, los niños que pueden determinar con seguridad que 73 es 7 veces 10 más 3, han construido un significado para el número 10 como una unidad iterable, operación que es esencial en la construcción del sentido numérico (Cobb y Wheatley, 1988).

Las calculadoras tienen un efecto benéfico muy particular cuando se usan en la solución de problemas matemáticos. En la investigación que realizaron Hembreé y Dessart se encontró que los resultados en la solución de los problemas son más altos cuando usan las calculadoras. Los estudiantes son más efectivos en la selección y uso de formas asociadas a procesos heurísticos para resolver problemas, además mostraron tener más confianza y entusiasmo cuando se les permite usar las calculadoras en la solución de problemas matemáticos (Hembree y Dessart, 1986; Reys y Reys, 1987; Szetela y Super, 1987; Wheatley y Wheatley, 1982). Estos resultados sugieren que las calculadoras son particularmente útiles cuando los alumnos estén haciendo matemáticas.

Estos autores reportan que las calculadoras pueden ser bastante útiles al decidir cómo resolver un problema. En el acto de crear un plan para la solución de problemas, los alumnos más exitosos mostraron que llevan a cabo una gran variedad de acercamientos exploratorios en el proceso de construir una comprensión del problema. A este respecto Lakatos (l976) propone que cuando un individuo usa una calculadora, de alguna manera ejecuta un experimento de pensamiento. El decidir cómo llevar cabo ciertas operaciones aritméticas consiste en la construcción anticipada de una secuencia de movimientos que ha elaborado mentalmente antes de teclear los números en la máquina. Tales experimentos de pensamiento le permiten a un individuo explorar y valorar la eficacia de usar una calculadora en comparación con otros métodos posibles.

El uso eficiente de la calculadora requiere de habilidades para estimar resultados que permitan al usuario controlar errores “de dedo” o de funcionamiento del instrumento. Al respecto Gálvez (1994:8) reporta que “actualmente, la calculadora es un objeto de la vida cotidiana al alcance de los niños, ellos la usan, pero generalmente no conocen todas sus potencialidades ni sus limitaciones y tienden a rodearla de una aureola de magia y de inhabilidad”.

Una objeción común es que el uso de la calculadora enfatiza la mecanización sin sentido de las operaciones aritméticas y no apoya el desarrollo de la capacidad para pensar; esta objeción se debe a que no se aprovechan sus cualidades didácticas que pueden potenciar el desarrollo de habilidades y estrategias intelectuales y preparar al estudiante para el uso de calculadoras programables y de computadoras como puerta de entrada al mundo de la informática. La capacidad de pensar del ser humano se enriquece al aprender a usar la calculadora y otros aparatos electrónicos (Gálvez, 1994).

Las calculadoras pueden ser utilizadas para fines específicamente pedagógicos, el propósito central del uso de este instrumento en la escuela es que sea un apoyo para el aprendizaje de las matemáticas; que su uso facilite la adquisición de conceptos matemáticos involucrados en relaciones numéricas, de propiedades de las operaciones aritméticas, de destrezas de cálculo y que favorezca el desarrollo de actitudes inherentes al aprendizaje de las matemáticas, como son las de formulación de conjeturas y búsqueda de respuestas:

Domínguez, (1985:1) ve la utilidad de este instrumento como un recurso más para “ayudar a desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos, al resolver un problema con ayuda de la calculadora, el alumno debe decidir la secuencia que seguirá para resolverlo y para introducir datos numéricos en la máquina. Para esto él debe reflexionar y pensar ordenada y metódicamente”.

Aprender a usar la calculadora no significa, en ningún caso, poner en discusión la necesidad de que los niños aprendan las maneras tradicionales de realizar los cálculos numéricos y tampoco libera al profesor de su enseñanza. Su uso debe ser controlado por el profesor; es él quien determina en qué momento, durante cuánto tiempo, cuál actividad y con qué propósito, sus alumnos trabajan con calculadora. Gálvez (1994:9) propone que “el propósito central es que los profesores la utilicen para hacer más accesibles los conceptos y destrezas matemáticas a todos los alumnos”. Agrega que un factor que contribuye al éxito en la solución de problemas es la persistencia. Los estudiantes trabajan con tareas de matemáticas durante largos períodos de tiempo hasta que alcanzan una solución o renuncian cuando se les presente el primer obstáculo.

Por supuesto, las cuestiones matemáticas más significativas requieren de reflexión. La creencia de que los problemas deberían ser rápidamente resueltos puede llegar a ser un factor debilitante en el desarrollo de habilidades por parte de los estudiantes; hay evidencias de que cuando los estudiantes están comprometidos en la solución de problemas usando la calculadora, ellos se muestran más persistentes y trabajan en sus tareas durante largos períodos. La calculadora parece jugar un papel significativo en este cambio (Hembree y Dessart, 1986; Wheatley y Wheatley, 1982).

***La calculadora y las fracciones comunes***

Las fracciones no son bien entendidas por muchos estudiantes. Este problema puede resultar del énfasis sobre los procedimientos para operar con números fraccionarios, lo cual puede tender a oscurecer la comprensión de los conceptos. El poder usar las fracciones y los decimales es una meta universalmente aceptada que no está siendo realizada. Existen en el mercado calculadoras de bajo costo que tienen la capacidad de ejecutar operaciones con números fraccionarios, mostrando la respuesta como fracción, simplificando las fracciones y convirtiéndolas a decimales. Los alumnos pueden darle importancia a las fracciones y a las relaciones matemáticas en vez de poner en práctica las reglas de las operaciones muy mal entendidas. Un uso adecuado de una calculadora que facilite el aprendizaje de las fracciones en vez de enseñar el método convencional para sumar y restar números con diferentes denominadores, puede ayudar a centrar la atención de los alumnos en las fracciones como objetos matemáticos que forman parte de un esquema más grande que incluye otros tipos de números. El uso de las calculadoras para la enseñanza de las fracciones hace factible el desarrollo conceptual de nuestros alumnos (Wheatley y Shumway, 1992).

Aunque las calculadoras gráficas se usan principalmente en el bachillerato, su empleo en grados menores también tiene gran potencial. Los estudiantes de escuelas primarias y secundarias le pueden dar importancia a las variables, a las relaciones funcionales y a las ecuaciones. Usando una calculadora gráfica los estudiantes pueden llegar a asociar una imagen visual con expresiones simbólicas. Tanto las relaciones lineales como las que no lo son, pueden conceptualizarse mejor cuando existe la capacidad de generar gráficas de estas fracciones con unos cuantos golpecitos sobre la calculadora (Shumway, 1992). Los estudiantes pueden llegar a pensar en forma dinámica sobre las ecuaciones matemáticas al observar que las curvas están apareciendo ante sus ojos y cuando fácilmente pueden repetir las gráficas tantas veces como sea necesario (Wheatley y Shumway, 1992).

Se ha desarrollado un juego de herramientas didácticas cuyas características y funcionalidad son ideales para los conceptos de matemáticas o ciencias y que están diseñadas para hacer el aprendizaje mas interesante y efectivo para grados desde primaria a nivel universitario (Texas, 1999). La calculadora gráfica TI-92 plus (la que usamos en nuestra investigación) cuenta con una pantalla amplia, que nos permite guardar las operaciones que vamos realizando, también tiene funciones más complejas como el editor de ecuaciones y de gráficas, que son los que ocupamos específicamente en esta tesis. La calculadora graficadora permite conectar múltiples registros de representaciones y tiene incorporado un potente sistema de cálculo simbólico (CAS). Una herramienta cognitiva de esta naturaleza abre la posibilidad de estudiar un problema matemático desde distintos puntos de vista y empleando representaciones de manera articulada, contribuyendo a establecer nuevas relaciones entre las representaciones en juego y a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos bajo estudio.

# CAPITULO III
# METODOLOGIA

**Método de Investigación**

En este capítulo se abordan los aspectos metodológicos que guiaron la realización de este trabajo, se detalla la información que da cuenta de todo el proceso, las estrategias diseñadas, las actividades experimentales utilizadas y la forma en que se incorpora la calculadora gráfica como herramienta para la construcción de la noción de fracción en niños de segundo año de primaria. Asimismo, se intenta hacer evidente la relación entre el método de investigación y la perspectiva teórica desarrollada en el capítulo II. El método se asume como el camino a seguir para lograr una finalidad determinada.

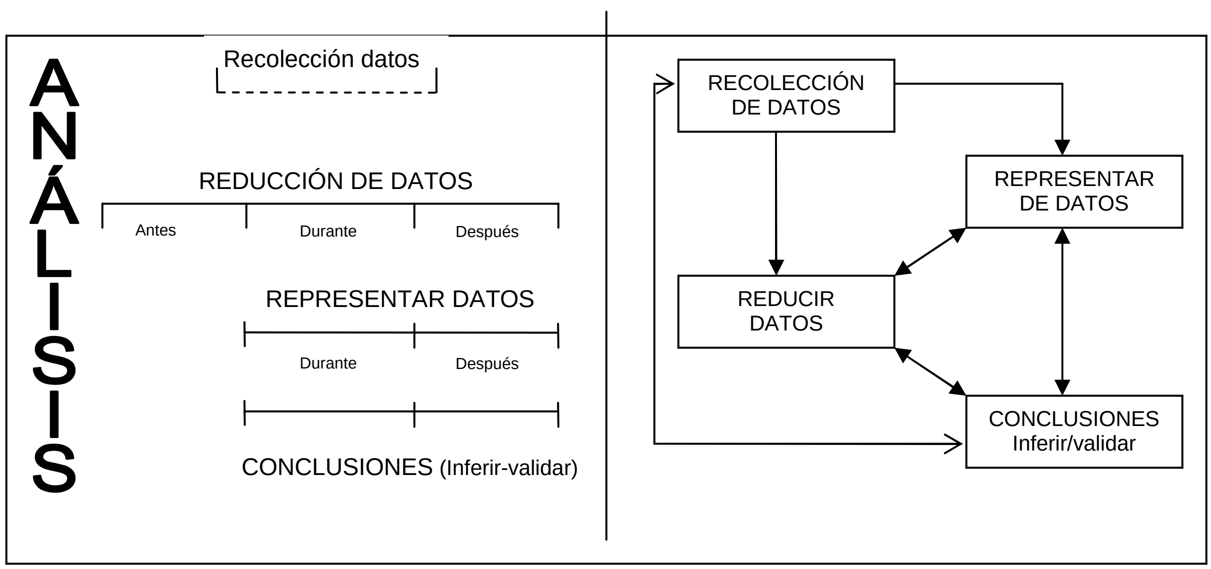
El método de análisis cualitativo se adopta como un recurso que permite ser reconstruido conforme el proceso de investigación avanza. En el presente estudio se utilizará el esquema de análisis cualitativo propuesto por Miles y Huberman (1984) y se emplea la técnica de estudio de casos. Elegimos el método de análisis cualitativo porque nos permite estudiar el objeto de estudio en el contexto del aula e interpretar los procesos cognitivos asociados a fenómenos de acuerdo con los significados establecidos por los niños.

Miles y Huberman (1984) destacan tres actividades esenciales que caracterizan al análisis cualitativo: el proceso de reducción de datos, la representación de los datos y el establecimiento de conclusiones. Los autores puntualizan que estas actividades de análisis, junto con la recopilación de datos forman un proceso interactivo y cíclico. De acuerdo con las necesidades del proceso de investigación, los procesos de reducción de datos, estructuración y análisis de los mismos, y la formulación de las conclusiones, se interrelacionan e influyen unos en otros. El análisis cualitativo es un sistema acumulativo-sintético, los datos así obtenidos son fuente de información y de procesos altamente interconectados que dan sentido al proceso indagatorio.

Marcelo (1995) afirma que cuando Miles y Huberman se refieren a *“dar sentido”* a los datos cualitativos están proponiendo *reducir* notas de campo, descripciones, explicaciones y justificaciones más o menos prolijas, hasta llegar a una cantidad de unidades significativas y manejables. Significa también estructurar y representar los contenidos, por último, extraer y confirmar conclusiones más comprensivas.

Durante la recopilación de datos se busca sistematizar las ideas generales que se encuentran inmersas en las actividades realizadas durante el proceso de investigación. Normalmente, estas ideas generales se registran a través de códigos (Marcelo, 1995). Los códigos son estructuras que permiten reducir las declaraciones individuales, pero además, representan un esfuerzo interpretativo y explicativo del investigador, buscando siempre la validez y la objetividad de los resultados. Por tanto los códigos se convierten en un auxiliar para transformar los datos primarios en unidades pertinentes y eficaces que permiten una mejor lectura de las características del contenido abordado.

En el siguiente cuadro se presenta un esquema del modelo de Miles y Huberman en el que se apoya esta investigación:




Componentes del Análisis de Datos. Modelo Interactivo de Miles y Huberman (1984).

Como se puede apreciar, este modelo puede resumirse en el "*análisis en tres momentos concurrentes en una actividad: reducción de datos, representación de datos y conclusiones inferir/verificar" (*Miles y Huberman, 1984: 21). En el momento de la reducción de los datos, los autores recomiendan una actividad anticipadora o inicial que permite perfeccionar las actividades que tendrán que ver con la representación de los datos o estudio principal. Para nuestro caso, esta etapa consistió en un estudio piloto que nos permitió rediseñar las actividades que formaron parte del estudio principal.

El tercer momento recomendado en este modelo consiste en localizar los componentes más significativos que dan sustento a la tarea de búsqueda y que tienen que ver con los propósitos prediseñados en el proyecto de investigación. Sin embargo, este momento no es aislado, ya que la *reducción de datos, su representación y formulación de conclusiones*, son tres momentos interactivos que siempre deben estar presente en el proceso de investigación que se lleve a cabo.

No obstante, se asume que la parte correspondiente a la representación de datos es una de las más importantes de este proceso, ya que es donde se recolectan y registran a través de la aplicación de actividades específicas; como es el caso de esta investigación (prácticas en el salón de clases).

Otro aspecto que debemos considerar es el proceso de codificación que se requiere. Como ya se mencionó, los *códigos* representan un recurso para clasificar la información, la cual se presenta en esta tesis a través de *categorías* para estudiar el fenómeno de manera que sea significativo en términos de la investigación que se realizó.

**Estudio de caso como estrategia de investigación.**

En esta tesis, deseamos investigar sobre el uso de la calculadora gráfica en la construcción de la noción de fracción en niños de 7-8 años. Para realizar esta indagación el estudio de casos se asume como el seguimiento de las formas personales de interiorizar una realidad en el contexto en el cual se desarrollan, como parte de un proceso dinámico y complejo, lo cual implica una relación muy estrecha y constante entre el individuo y la colectividad. La técnica de estudio de casos examina y analiza profundamente la interacción de los factores que producen cambio. Utiliza el enfoque longitudinal, estudiando el desarrollo durante un cierto tiempo (Goode,1980).

Podemos decir que se analizan historias individuales con respecto a la construcción de una noción que en cierta forma expresan la historia de la mayoría del grupo, entendiendo el testimonio de los individuos como las valoraciones contenidas en el conglomerado al cual pertenecen; lo que refleja sus actitudes, sus dudas, sus habilidades y en cierta medida sus creencias. A través del estudio de casos es posible acceder a las representaciones de esas historias personales, recuperando la parte, el sentido, la lógica de las actitudes, así como las auto percepciones que al colectivizarse forman la trama de conocimiento socialmente aceptado.

Nuestro trabajo se ubica en el territorio fronterizo de lo personal y lo social y trata de develar una historia global al interpretar los datos personales de cada uno de los sujetos involucrados en la investigación. Nos interesa la reconstrucción fidedigna de los hechos, así como las formas de apropiación de un conocimiento y las habilidades que se desarrollan al poner a consideración de los sujetos escolares, formas novedosas de trabajo.

**Fases de la investigación**

Las fases de investigación que realizamos, cubriendo las anteriormente señaladas, son las siguientes:

- El *estudio piloto* como un trabajo preliminar al *estudio principal*. Este estudio nos permitió ajustar las actividades experimentales, se pusieron a prueba los propósitos, las preguntas de investigación, la pertinencia del referente teórico, los instrumentos para la recolección de datos y el registro de observaciones y entrevistas, la manera de organizar las actividades en el aula, la elección de los sujetos participantes, la relación del investigador y los alumnos, los contenidos de enseñanza y la definición de las categorías de análisis en términos de su pertinencia respecto a los propósitos del proyecto. La puesta a prueba de cada uno de estos elementos nos permitió redactar la versión final de los propósitos, afinar las preguntas de investigación, rediseñar las actividades de enseñanza como instrumento de recolección de datos y vincular de mejor manera el marco teórico con el método de investigación.

- El *estudio principal* es la parte medular de la investigación. Se tomaron en cuenta las modificaciones y adecuaciones realizadas en el estudio piloto. Durante esta fase se realizaron las siguientes actividades:
    - Seis sesiones de noventa minutos cada una en el salón de clases.
    - Secuencias de actividades dirigidas por la investigadora.
    - Resolución de Hojas de Trabajo.
    - Entrevista al profesor responsable del grupo.

- El análisis de datos se realizó a partir de la información obtenida durante las sesiones de trabajo, las observaciones del investigador y las entrevistas. Aquí se describen e interpretan las secuencias de actividades realizadas durante el trabajo de campo, así como el análisis de resultados.

**Diseño del estudio principal**

El estudio principal consistió en la fase correspondiente al trabajo de campo, incluyó básicamente la toma de datos y un primer nivel de registro de éstos que permitiera un acercamiento inicial a la interpretación y análisis de los mismos.

La toma de datos se llevó a cabo durante el trabajo desarrollado por los alumnos para realizar actividades orientadas a la construcción de la noción de fracción. Para documentar los episodios en el aula nos auxiliamos de observaciones realizadas en las clases, todas las sesiones fueron video grabadas; asimismo acudimos a las hojas de trabajo resueltas por los alumnos; esto permitió obtener elementos para explicar de mejor manera las intervenciones de los alumnos.

El diseño de las actividades y los protocolos que orientaron las intervenciones del maestro-investigador se ubican en el marco de la psicología cultural (Bruner, 1983) y en el principio de que el individuo puede construir el conocimiento matemático en un ambiente de trabajo basado en el uso de la calculadora algebraica, en el que se simula la manera en que se enseña el lenguaje natural (Cedillo, 1996). Esto nos condujo a centrar la atención en el diseño y utilización de situaciones problemáticas. Estas nuevas visiones acerca del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de las matemáticas, se complementó con aportaciones de los alumnos y del investigador (como alguien capaz y deseoso de aprovechar apropiadamente una mayor libertad en el desarrollo del trabajo escolar).

El diseño de las actividades propuestas pretende promover que el conocimiento construido por el estudiante sea más coherente e integrado. El diseño de las actividades pretendió una presentación rica en sus aspectos procedímentales y conceptuales; asimismo se intentó que las actividades permitieran conexiones entre *distintos sistemas de representación,* buscando que un mismo concepto pudiera ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentren conectadas. Se buscó además que los alumnos percibieran que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única respuesta, ni una única estrategia de resolución; que vieran la utilidad práctica del conocimiento que construyen como un medio para modelar la realidad. También se intentó, mediante el diseño de las actividades, que el estudiante desarrollara su capacidad de comunicación y argumentación matemática; que desarrollara una actitud intelectual que favorezca su capacidad para enfrentarse a tareas que son diferentes de las que él ya conoce y, en general, que desarrolle su capacidad para resolver problemas.

Las últimas actividades fueron diseñadas como hojas de trabajo y cumplen una función muy importante en este proceso, ya que son una de las fuentes de datos más confiables que se usaron en esta investigación. Las actividades se diseñaron siguiendo el concepto de *formato* de Bruner (1982, 1983) y las aportaciones que en este campo ha realizado Cedillo (1996).

Se intentó que las intervenciones del profesor-investigador se basaran en proponer siempre nuevas preguntas y pistas que guiaran las acciones de los alumnos para trabajar con actividades en las que construyen y analizan la gráfica correspondiente a expresiones algebraicas lineales en el contexto de problemas de carácter aritmético (ver anexo). Con la realización de estas actividades se pretende pasar del lenguaje verbal al lenguaje simbólico de la calculadora y viceversa.

Como hemos señalado antes el concepto de *formato* (Bruner, 1984) fue el principal auxiliar para diseñar el modelo didáctico que se empleó. El modelo didáctico puede esquematizarse de la siguiente manera:

a) *Crear la necesidad del lenguaje como medio de comunicación social*: se trata de generar condiciones en el aula que promuevan que el aprendizaje de la noción de fracción se dé con base en una necesidad explícita de los alumnos, utilizando la calculadora como herramienta mediacional.
b) *Uso versus definiciones:* diseñar actividades que permitan abordar la enseñanza de contenidos matemáticos a partir de su uso y que de este uso se derive la formulación de reglas y definiciones como instrumentos para agilizar la comunicación.
c) *Relación adulto-infante:* la intervención del adulto se orienta de manera determinante a partir de acciones que el estudiante realiza. Esto se da siguiendo como principio que para entender lo que un niño pequeño dice hay que saber qué es lo que él está haciendo.
d) *Retroalimentación:* se promueve que el uso de la calculadora, en el contexto de las actividades propuestas, ofrezca retroalimentación oportuna y pertinente al niño en las exploraciones que éste realiza;
e) *Interacción uno a uno:* La actividad basada en la realización de hojas de trabajo libera al profesor como expositor al frente del grupo, favoreciendo que éste tenga oportunidad de atender individualmente, o en pequeños grupos a sus estudiantes, de manera similar a la forma en que las madres atienden a sus hijos durante el proceso de la adquisición de los rudimentos del lenguaje materno (Cedillo; 1999).

**Categorías de análisis**

Las observaciones realizadas durante el estudio piloto sugieren un conjunto de categorías de análisis para dar seguimiento a los logros de los alumnos y para retroalimentar las intervenciones de enseñanza. Durante esta fase del trabajo fuimos comprobando la pertinencia de cada una de esas categorías, esto permitió sostener o modificar las definiciones e introducir nuevas categorías que explicaran de mejor manera el proceso de indagación.

Las categorías que se emplearon en la fase principal de la investigación son las siguientes:

a) *Representación.*- Esta primera categoría hace referencia a la forma en que los estudiantes confrontan el manejo de las distintas representaciones que se involucran en esta investigación. Se forma por las representaciones gráficas, verbales y simbólicas.
b) *Traducción.*- Esta categoría se refiere a cómo el alumno transita entre una y otra representación, sus conexiones y los procesos de "ida" y "vuelta" en el trabajo realizado.
c) *Sintaxis.*- Se refiere a las formas de estructurar simbólicamente las distintas representaciones y el lenguaje utilizado para este caso.
d) *Significados.*- Se refiere a los significados que el alumno atribuye a cada una de las distintas representaciones matemáticas, y a la forma en que esos significados evolucionan a lo largo del trabajo de campo.
e) *Pragmática.*- Aquí se analiza la utilidad que el alumno atribuye a cada una de las representaciones matemáticas

**La escuela**

Las sesiones de trabajo se realizaron en la escuela primaria oficial "Manuel Alcalá Martín", turno matutino, en el aula de usos múltiples. La escuela está ubicada en la calle de Felipe Montero No. 3 Col. Paraje San Juan en la Delegación de Iztapalapa, D.F. Iztapalapa es una de las cuatro delegaciones más grandes del D.F. con una superficie de 124.46 kilómetros cuadrados. Esta delegación ocupa más de 7.5% del territorio total del D.F., lo cual influye para ampliar sus contactos con otras delegaciones o municipios del Estado de México. En iztapalapa, el 92% de los niños de 6-14 años sabe lee y escribir. El 94% de la población mayor de 15 años, esta alfabetizada. La proporción de mujeres analfabetas con relación a los hombres es de 3 a 1 (Anuario, l994).

La situación socioeconómica de la comunidad escolar es de escasos recursos, principalmente encontramos obreros, aunque también hay gente con oficios como: mecánico, domésticas, comerciantes, etc.

**Sujetos**

Los sujetos que participaron en el estudio principal fueron alumnos del segundo grado grupo “A”, sus edades fluctuaron entre los 7 y 8 años de edad. Fueron cuatro niños y seis niñas, ocho de ellos de siete años de edad y dos con ocho años: Ariel (7años), Oscar (7años), Karen (7 años), Mariana (7 años) Memo (7años), Gaby (8 años), Nayelli (8años), Ana (7años), Héctor (7años), Bety (7 años).

Se trabajó con un total de 20 alumnos, pero para observar de mejor manera los efectos que la calculadora gráfica producía en el aprendizaje de los alumnos escogimos solamente a diez de ellos (hombres y mujeres). Esto nos permitió observar los cambios que se produjeron durante la fase experimental retomando la metodología de estudio de casos. Los alumnos participantes fueron seleccionados y enviados por la profesora encargada del grupo. Ella nos comentó que había enviado alumnos con diferente tipo de aprovechamiento.

**Ambiente de trabajo**

Al inicio de cada sesión en el aula, se les entregó a cada uno de los alumnos una calculadora gráfica. Al principio los alumnos interactuaron con ella utilizando su lenguaje, posteriormente resolvieron algunos retos planteados por la investigadora. La responsabilidad de la investigadora consistió en plantear actividades que propiciaran la reflexión de los alumnos, así como orientarlos en la resolución de los retos planteados.

La ayuda que el alumno recibía consistía en las orientaciones que la investigadora le daba de manera individual sobre todo a aquellos alumnos que presentaban más problemas a la hora de abordar las actividades que se estaban realizando.

El maestro cumplía con el rol de “ayudante más experimentado” que empata con la propuesta de Bruner en el sentido de propiciar cambios en la apropiación del conocimiento a través del reconocimiento del error por parte del alumno auxiliado por el profesor.

**Recolección de Datos.**

La recolección de datos se llevó a cabo antes, durante y después de la realización del estudio de campo:

*Antes*.- A través de las actividades realizadas en el estudio piloto, así como la elaboración de la secuencia de actividades.

*Durante*.- Mediante las actividades llevadas a cabo en el estudio principal.

*Después*.- Al colectar y analizar la información obtenida a través de los videos, la reducción de la información y su codificación correspondiente.

**Relación de las actividades de enseñanza con los objetivos.**

Recordemos que los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

Objetivo General

Obtener evidencia empírica acerca del papel de los recursos visuales y de cálculo que ofrece una calculadora gráfica en el aprendizaje de las primeras nociones sobre las fracciones comunes con niños de 7-8 años de edad.

Objetivos particulares

Estudiar:

1) El papel que desempeña la calculadora como herramienta cognitiva en el aprendizaje de los niños.
2) El papel que desempeña la calculadora como herramienta de enseñanza.
3) Las dificultades que se superan, las que se mantienen y las que surgen, en el aprendizaje de las primeras nociones sobre el concepto de fracción común con alumnos de 7-8 años de edad cuando se trabaja en un ambiente basado en el uso de la calculadora gráfica.

El objetivo general se encuentra inmerso en cada una de las actividades realizadas a lo largo del trabajo de campo. Los objetivos particulares los vamos a relacionar con los propósitos de cada una de las sesiones a través del siguiente cuadro:

| Número de Sesión | Propósito de la Sesión de Trabajo | Relación con los Objetivos Particulares |
|---|---|---|
| Primera sesión | a. Conocer el funcionamiento de la calculadora gráfica.<br>b. Manejar las principales funciones de la misma.<br>c. Verificar resultados de operaciones básicas sencillas: suma y resta.<br>d. Establecer una comunicación con la calculadora a través del lenguaje matemático.<br>e. e) Establecer la relación entre una ecuación y su representación gráfica. | No. 1<br>No. 2<br>No. 1<br>No. 2<br>No. 3 |
| Segunda sesión | a. Dominar el conocimiento de la calculadora y sus funciones.<br>b. Consolidar la relación entre la ecuación y su representación gráfica.<br>c. Introducir la noción de la fracción ½ . | No.1<br>No.3<br>No.3 |
| Tercera sesión | a. Construir la noción de fracción a partir de "la mitad de uno" | No. 3 |
| Cuarta sesión | a. El uso de la fracción de ½ en la solución de algunos retos de forma escrita en equipos de dos alumnos. | No. 3 |
| Quinta sesión | a. Introducir una nueva fracción como "la mitad de la mitad" que es igual a un cuarto. | No. 3 |
| Sexta sesión | a. El uso de la fracción de ¼ y ½ ( ½ ) en la solución de retos escritos, de manera individual. | No. 3 |
| Séptima sesión | a. Recapitulación de las actividades anteriores como una forma de cierre del trabajo realizado. | No.1, 2 y 3. |

## Papel asignado a la calculadora

La calculadora desempeña una función importante en este estudio, es la herramienta principal en la transición hacia el lenguaje matemático por parte del niño. La calculadora gráfica es un medio de trabajo que ofrece un espacio fácilmente accesible para la verificación del trabajo matemático. La facilidad para la verificación de conjeturas que ofrece la calculadora es difícil de lograr en medios tradicionales como el del lápiz y uso de papel.

A partir de los resultados del estudio exploratorio antes descrito, asumimos la hipótesis de que el alumno vería de manera más natural el manejo del lenguaje matemático auxiliado por la calculadora gráfica, logrando conformar una comunicación eficiente entre él y la máquina, lo cual lo le motivaría para realizar el trabajo de aprendizaje. Esta idea está relacionada con el planteamiento de Bruner en el sentido de cómo el niño hace uso de la lengua materna como proceso natural de aprendizaje.

**Escenario del trabajo de campo**

Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo en el aula de usos múltiples de la escuela, está acondicionada con mesas de trabajo y sillas grandes, cortinas negras para evitar que entre la luz cuando se ve la televisión, cuenta con una TV y una video casetera colocadas en la parte alta del aula, dos pizarrones verdes ubicados en las dos paredes anchas del salón y un librero. En algunas sesiones se usó un salón que se ubica al costado derecho de la dirección de la escuela, está ocupado por el personal de USAER, se encuentra equipado con mesas trapezoides movibles y sillas pequeñas de madera, tiene un espacio lleno de juegos educativos que ocupa el personal para dar terapia y dos pizarrones verdes uno en cada pared. En ambos lugares la investigadora tuvo que llevar la televisión, porque la que se encuentra en la escuela no tenía las adaptaciones para conectar la interfase que permite proyectar la pantalla de la calculadora en la TV.

Los sujetos que participaron en el estudio principal fueron alumnos del segundo grado grupo “A”, sus edades fluctuaban entre los 7 y 8 años de edad.  Siendo cuatro niños y seis niñas, ocho de ellos de siete años de edad y dos más con ochos años: Ariel (7años), Oscar (7años), Karen (7 años), Mariana (7 años) Memo (7años), Gaby (8 años), Nayelli (8años), Ana (7años), Héctor (7años), Bety (7 años).  Los niños en general tenían disposición al trabajo e inquietud y curiosidad por aprender nuevos conocimientos de matemáticas como los que se les estaban presentando que era una herramienta nueva y un tema desconocido. Sus habilidades numéricas se encontraban en desarrollo pues todavía mostraban dificultades para realizar operaciones básicas de manera mental. Eran alumnos que nunca habían repetido año.

Se trabajo con un total de 20 alumnos, pero para observar de mejor manera los efectos que la calculadora gráfica produjo en el aprendizaje de los alumnos escogimos solamente a diez alumnos (hombres y mujeres).  Esto nos permitió  observar los cambios que se producían durante la fase experimental retomando la metodología de Estudio de Caso.  Los alumnos participantes fueron seleccionados y enviados por la profesora encargada del grupo. Ella nos comentó que había enviado alumnos con diferente tipo de aprovechamiento.

**Fuentes de datos**

Las principales fuentes de datos que se usaron son las siguientes:

- Video grabaciones de cada una de las sesiones de trabajo.
- Hojas de trabajo.
- Notas elaboradas por el investigador durante y al término de cada sesión en el aula.
- Entrevista realizada a la profesora regular del grupo.

La estructura de las hojas de trabajo se basó en “pistas” que proporcionan una orientación por parte del maestro hacia el alumno, estas actividades fueron abordadas por los alumnos usando la calculadora. Durante las sesiones en el aula la investigadora realizó preguntas orientadas a indagar de qué manera razonaban los niños para realizar las tareas propuestas. El trabajo en el aula se llevó a cabo una vez a la semana durante 90 minutos aproximadamente. Las actividades propuestas a los alumnos se organizaron de la siguiente manera:

- *Familiarización con la calculadora y el tipo de actividad*. En las primeras tres sesiones seguimos una secuencia de actividades (ver anexo), donde los alumnos manipulaban la calculadora y seguían las indicaciones del investigador resolviendo retos y reflexionando sobre los resultados de sus hallazgos.

- En las dos siguientes sesiones se les proporcionaron hojas de trabajo, que fueron resueltas por equipos de dos integrantes cada uno. La primera hoja de trabajo fue diseñada para inducir el concepto de “mitad” y la segunda a “la mitad de la mitad”. La investigadora interactuó con cada uno de los equipos orientándolos para que llegaran a la reflexión de sus hallazgos.

Las notas elaboradas por la investigadora al terminó de cada sesión consistían en registrar los acontecimientos relevantes para posteriormente complementarlos con la video grabación realizada.

La entrevista que se realizó a la profesora del grupo fue para conocer el criterio que utilizó para enviar a los niños solicitados para realizar el trabajo de campo, También se quería conocer las actitudes que los niños tenían cuando sabían que iban a trabajar con la investigadora, así como los comentarios que realizaban con ella del trabajo extraclase que realizábamos. Nos aporto su opinión sobre el trabajo realizado por la investigadora en relación al tema de las fracciones que trabajó la profesora en clase. La entrevista fue grabada con autorización de la profesora, la investigadora realizaba alguna anotación escrita cuando algo le parecía importante.

**Preguntas de investigación**

1. ¿Qué nociones desarrollan los niños de 7-8 años de edad cuando abordan actividades sobre fracciones empleando el ambiente gráfico de la calculadora?
2. ¿Qué estrategias emplean los niños de 7-8 años de edad cuando abordan la solución de problemas que involucran el concepto de fracciones empleando la calculadora?
3. ¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora gráfica en las formas de participación de los niños con el maestro?
4. ¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora en las formas en que los niños se relacionan con los contenidos matemáticos que se les proponen?

# CAPITULO IV

# RESULTADOS

**Descripción e interpretación de los datos**

En concordancia con el método de investigación y el referente teórico que se emplearon en este trabajo, reportamos los resultados del mismo insertos en el contexto de la descripción del resultado de las actividades que se llevaron a cabo en el aula. Otro factor que determinó que se desarrollara de esa manera el cuerpo de este capítulo fue la edad de los alumnos con los que se trabajó, su aún escasa capacidad de comunicación verbal y escrita hace necesario ubicar sus intervenciones en el contexto detallado de las actividades que realizaron, para poder exponer con mayor claridad las evidencias en que se sustenta el análisis e interpretación de sus respuestas.

**Sesiones de trabajo en el aula**

Se planeó realizar el trabajo de campo en seis sesiones de aproximadamente 90 minutos cada una. Consideramos importante iniciar este apartado describiendo de manera general cada una de las sesiones de trabajo en el aula y después de esto discutir las respuestas de los niños.

1. Durante la primera sesión se familiarizó al alumno con el uso de la calculadora gráfica a partir de conocer sus funciones, lograr una comunicación con la calculadora a través del lenguaje matemático, verificar resultados de operaciones básicas, establecer la relación entre una ecuación y su representación gráfica.
2. La segunda sesión fue el dominio de la calculadora gráfica y sus funciones, consolidar la relación entre ecuación y su representación gráfica, introducir la noción de fracción utilizando ½ (un medio).
3. La tercera sesión fue el construir la noción de fracción a partir de “la mitad de uno”.
4. La cuarta sesión fue el uso de la fracción de un medio (½) en la solución de algunos retos en forma escrita.
5. En la quinta sesión se introdujo un nuevo concepto “la mitad de la mitad”.

6. La sexta sesión fue el uso de la fracción de ¼ y de ½ (½) en la solución de retos escritos.
7. Recapitulación de las actividades realizadas.

Consideramos relevante señalar que dicha secuencia está relacionada con un objetivo que se presenta en el Plan y Programa de Matemáticas de Educación Primaria de la SEP en el eje de los números, sus relaciones y operaciones. Ese objetivo plantea que "los alumnos, a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela, comprendan más cabalmente el significado de los números y de los símbolos que los representan y puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas. Dichas situaciones se plantean con el fin de promover en los niños el desarrollo de una serie de actividades, reflexiones, estrategias y discusiones que les permitan la construcción de conocimientos nuevos en la búsqueda de la solución a partir de los conocimientos que ya poseen" (SEP, 1993:50-51).

Las dificultades que se han reportado en la adquisición de la noción de fracción sugieren que se requiere la construcción de un significado que le permita al niño apropiarse de esa noción, así como de los símbolos que representan a las fracciones. A partir de una apreciación general de los resultados obtenidos en esta tesis, podemos afirmar que los datos obtenidos durante el trabajo de campo sugieren que la calculadora gráfica es un poderoso instrumento didáctico que facilita la comprensión del significado de los números en general y de los fraccionarios en particular. Esta afirmación se sustenta en evidencias que se discuten con mayor detalle en la descripción de los resultados de las sesiones de trabajo en el aula que se presenta más adelante.

**Secuencia de actividades en cada sesión**

A continuación se describen las siete sesiones de trabajo, esta descripción incluye con mayor detalle el tipo de actividad que se pidió a los niños que realizaran.

***Primera sesión***

Tuvo como propósito principal familiarizar al alumno con el uso de la calculadora a través de:

a) Conocer el funcionamiento de la calculadora.

b) Manejar las principales funciones de la misma.
c) Verificar resultados de operaciones básicas sencillas: suma y resta.
d) Establecer una comunicación con la calculadora a través del lenguaje matemático.
e) Establecer la relación entre una ecuación y su representación gráfica.

Para poder familiarizar al alumno con el uso de la calculadora se elaboraron con anticipación una serie de actividades relacionadas con una noción intuitiva de fracción. Las nociones matemáticas que menciona el plan y programa de matemáticas de la SEP, pone énfasis "en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas" (SEP, 1993:15). De acuerdo con las habilidades que señala el programa oficial consideramos que en esta sesión particularmente se intentaría propiciar el desarrollo de:

a) La capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.
b) La capacidad de anticipar y verificar resultados.
c) La capacidad de comunicar e interpretar información matemática.
d) El pensamiento abstracto a través de distintas formas de razonamiento, entre otros, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

Tomando en cuenta el principal propósito de la sesión elaboramos la siguiente secuencia de actividades, donde también describiremos lo sucedido en la sesión de trabajo.

*Secuencia de actividades en la primera sesión*

1. La investigadora se presentó con los alumnos manifestando su entusiasmo en la realización de actividades con ellos. Posteriormente los alumnos se presentaron mencionando su nombre y su edad.

2. Se proporcionó una calculadora a cada uno de los diez alumnos participantes.

3. La investigadora condujo una exploración de la máquina por parte de los alumnos que consistió en lo siguiente:
    - Les pidió que buscaran cómo abrirla y encenderla.

- Les preguntó qué creían que era esa máquina (su apariencia no es la de una calculadora común).

Cuando les pidió que abrieran la máquina, Héctor preguntó: ¿cómo se abre? Sus compañeros lo intentaron sin tomar en cuenta lo que acababa de preguntar, Oscar fue el primero en abrirla. En general les costó trabajo abrirla, así que la investigadora les indicó cómo hacerlo y finalmente todos lo lograron. Cuando se les preguntó ¿qué creen que sea esta máquina? Los alumnos respondieron al unísono "una calculadora" de ahí que los alumnos estaban familiarizados con la tecnología.

4. La investigadora condujo una discusión sobre las siguientes características de la calculadora:
   - Operaciones que se pueden hacer.
   - Lugar de la pantalla donde aparece lo que se teclea: Línea de Edición.
   - Cómo obtener una respuesta de la calculadora: la tecla ENTER.
   - Discusión de la necesidad de conocer el lenguaje de la calculadora para comunicarse con ella.

   A pesar de que los alumnos identificaron la máquina como una calculadora manifestaron que es diferente a las calculadoras que ellos conocen. También saben que una calculadora sirve para realizar operaciones como sumar, restar, multiplicar y dividir. La investigadora describió la diferencia entre la calculadora común y la calculadora gráfica señalando las características antes mencionadas.

5. El tipo de actividad que se describe a continuación permitió que los alumnos empezaran a apreciar el papel de la calculadora como un recurso para verificar sus respuestas, esto fue evidente en los casos en que hubo discrepancia entre los resultados que obtenían al hacer operaciones mediante cálculo mental. La investigadora inició las actividades partiendo de operaciones conocidas por los alumnos. Por ejemplo: "sin usar la calculadora ¿cuánto es 5+4?" Enseguida les pidió comprobar su respuesta en la calculadora y que ellos propusieran algunas actividades similares como 8+4, 3+7, 9-2. Los alumnos verificaron los resultados de esas operaciones usando la calculadora y empezaron a discutir las discrepancias

que observaron. Por ejemplo, al sumar 8+7 Memo dijo que el resultado es 15 y Ariel 16; no hubo seguridad entre los alumnos sobre el resultado y buscaron la intervención de la investigadora para dilucidar el conflicto. La intervención de la investigadora se limitó a pedirles que hicieran esa operación en la máquina y el resultado que aceptaron fue 15 porque “todas las calculadoras dieron 15”. Después de realizar estas operaciones de suma, se pasó a realizar algunas restas sencillas.

De ahí que a partir del uso de la calculadora los alumnos fueron conociendo las funciones que se necesitaban para obtener los resultados que se requieren, por ejemplo, que el resultado de una operación se obtiene al oprimir la tecla “ENTER”. Posteriormente los alumnos mostraron que habían comprendido para qué sirve la tecla “ENTER”. Además descubrieron que los resultados se van almacenando en la pantalla de la calculadora


Se constató que los niños tuvieran en la pantalla de su calculadora lo mismo que en la del televisor para así poder continuar juntos con la siguiente actividad y verificar que iban entendiendo lo que estaban haciendo.

Nayelli, Ana y Héctor necesitaron asistencia individual por parte de la investigadora para el buen funcionamiento de la calculadora. Al plantear otra resta 15-8, algunos alumnos utilizaron la calculadora sin tomar en cuenta que debían resolverlo antes mentalmente, es el caso de Karen.

6. Se informó a los alumnos para qué sirve la tecla de navegación (“la tecla gorda”) que sube y baja el cursor hacia donde necesitamos. Esta actividad surgió en la revisión de los resultados y permitió que los alumnos observaran las facilidades que ofrece esa tecla.

7. Se realizaron actividades similares a las dadas por la investigadora y otras propuestas por los alumnos. Los alumnos plantearon algunas restas, por ejemplo, Oscar propuso 8-4, a sus compañeros se les hizo muy fácil y pidieron que se aumentara el grado de dificultad, entonces Mariana propuso 10-9, pero resultó igual de fácil, levantó la mano Ana y planteó 11-9, a lo que algunos respondieron “es 1” y otros “es 2”. A iniciativa de los alumnos esas respuestas fueron verificadas en la calculadora.

8. Se indicó a los alumnos cómo se puede limpiar la pantalla de la máquina al ejecutar la tecla F1, ubicar el cursor sobre la opción 8 y oprimir dos veces ENTER. También se pueden borrar algunas de las operaciones realizadas con la tecla CLEAR y el cursor. El procedimiento les resultó sencillo, la mayoría de los alumnos lo hizo correctamente, sólo Gaby pidió a la investigadora que la auxiliara.

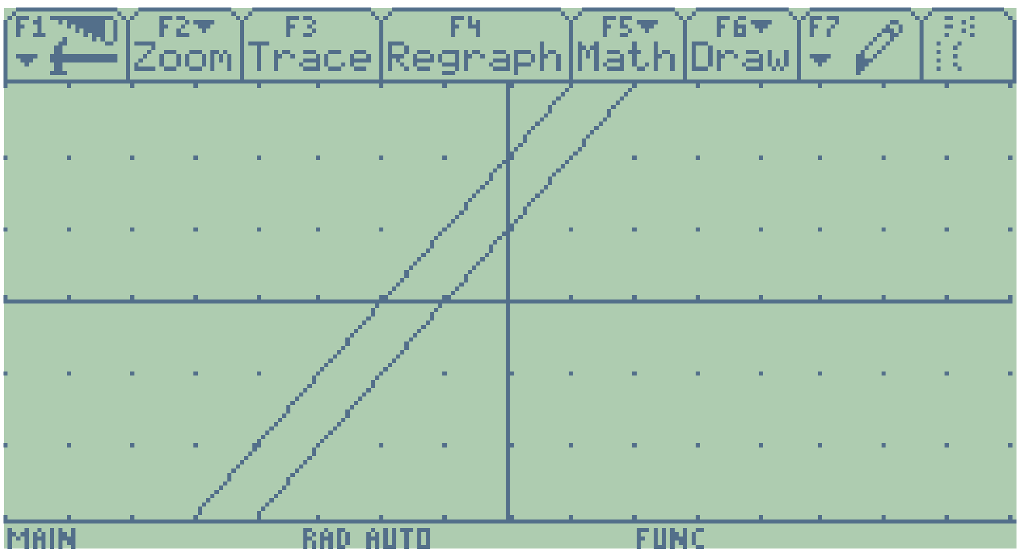
9. La investigadora condujo una reflexión sobre las actividades que se realizaron con la calculadora y las operaciones básicas. Los alumnos dijeron que no sólo se pueden realizar sumas y restas, sino que también se pueden hacer multiplicaciones y divisiones.

10. Se les instruyó para qué sirve la tecla que tiene un rombo verde (selector) y la de la letra “W” para trabajar con el editor de ecuaciones. La investigadora revisó que todos los alumnos tuvieran sus calculadoras con la pantalla en el editor de ecuaciones activada, para poder proseguir con la siguiente actividad de manera conjunta.

11. Se les pidió escribir la ecuación x+2, oprimir la tecla “ENTER” y observar qué pasa al teclear “rombo verde” y la letra “R”. El propósito de esta actividad es que los niños observaran detenidamente lo que sucede cuando teclean la ecuación x+2,

que al oprimir "ENTER" la ecuación aparece en el primer renglón del editor de ecuaciones con una "palomita" a la izquierda de la ecuación. Después, como se muestra en la figura de abajo, aparece una línea recta al activar el editor de gráficas (la gráfica de y=x+2). Ariel, Oscar y Mariana requirieron de la asistencia de la investigadora para realizar la actividad.

12. Se les pidió que teclearan las ecuaciones x+3 y x+4, y que observaran qué relación existe entre éstas y su representación gráfica. Teclearon las ecuaciones sin dificultad. Oscar entendió rápidamente el procedimiento, pasó al frente, tecleó la ecuación x+4 y exhibió su gráfica.

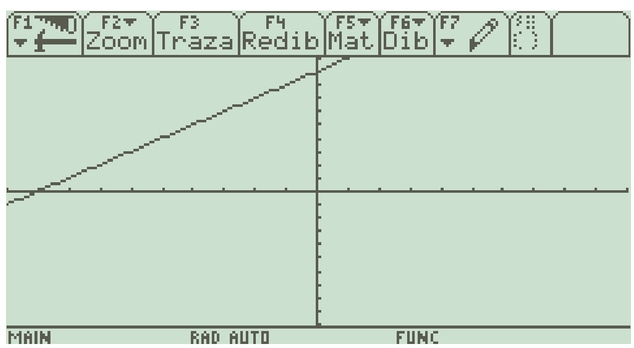



13. Se les preguntó cómo sería la gráfica de y=x+5 respecto a las de y=x+3 y y=x+4 antes de hacerlo con la calculadora. Varios niños presentaron sus respuestas y después las pusieron a prueba usando la calculadora.

14. Se les propuso teclear la ecuación x+6 y después de esto que construyeran la de y=x+5. Esta actividad la denominamos "saltarse un número". Los alumnos teclearon la ecuación x+6 y construyen solos la otra gráfica. Gaby y Nayelli, necesitaron la asistencia de la investigadora para realizar esta actividad. Algunos niños no pidieron ayuda a la investigadora, discutieron entre ellos sus ideas en búsqueda de una respuesta. Éstos fueron los primeros indicios de que estaban em-

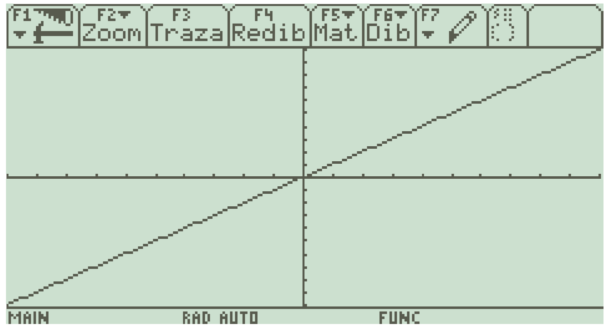
pezando a ganar autonomía, lo cual consideramos como un indicador de un fortalecimiento de su autoestima basada en la confianza que estaban logrando en el manejo de los nuevos conocimientos que enfrentaban.

15. La investigadora señaló el punto (0, 9) en la pantalla de la calculadora proyectada en el televisor y pidió a los alumnos que construyeran una ecuación tal que su gráfica pasará por ese punto. Como una manera de auxiliarlos se pidió a los alumnos que contaran el número de marcas correspondientes a una unidad de longitud en el eje Y hasta llegar al punto deseado. Después de algunos intentos de los alumnos para resolver el reto Gaby lo logró y pasó a resolverlo al frente. Explicó la relación existente entre las ecuaciones y las gráficas mediante su interpretación de la constante en la ecuación y=x+9: "el número de rayitas sobre la línea vertical (señaló con el dedo el eje Y) es lo que debes sumar a x para que la gráfica pase por allí… como son 9 rayitas escribí x+9". Posteriormente el investigador verificó de manera individual cómo se realizó esa actividad.



Gráfica de y=x+9

16. Se les pidió que teclearan una ecuación tal que la gráfica pase por el origen. La indicación textual fue que construyan una ecuación que pase por donde "se unen la línea vertical y la horizontal". Esta actividad les fue difícil, la investigadora tuvo que intervenir señalando la gráfica correspondiente a x+2 y preguntar que harían si queremos que baje a la siguiente rayita (x+1) y entonces ¿qué ecuación debemos escribir para que siga bajando? Gaby y Oscar propusieron x+0. Mariana se acercó a la investigadora para mostrarle lo que hizo y posteriormente a sus compañeros.



Gráfica de y=x+0

17. Se les pidió señalar el punto (0, -3) y construir una ecuación de manera que su gráfica pase por ese punto. Los alumnos plantearon hipótesis respecto a la construcción de la ecuación requerida, ensayan con x+3 y con x+5, Memo lo verificó y encontró que ninguna de ésas es la que se les estaba pidiendo. Esta actividad se les dificultó y varios niños necesitaron asistencia. Gaby se dio cuenta que pasa por arriba del origen porque se realiza una suma, aprovechando este descubrimiento, la investigadora les preguntó qué operación podían hacer para lograr lo que se les pedía… si sumamos aparece arriba. Mariana propuso “restar” y explicó cómo descubrió eso: “escribí en la calculadora x+3 y vi que la gráfica se ponía arriba… así que escribí x-3 para que apareciera abajo”. También Memo encontró la ecuación x-3.

18. Se les preguntó qué pasaría con la gráfica si teclearan la ecuación x–5, como respuesta señalaron con el dedo en la pantalla de la televisión por dónde creían que debería pasar esa gráfica. Bety fue la primera que resolvió ese reto acertadamente.

19. Se les preguntó a los alumnos qué que aprendieron en esa sesión. Sus respuestas fueron las siguientes:
    - Cómo usar la calculadora.
    - A comprobar resultados de suma y resta.
    - Las ecuaciones y las gráficas.

- La relación de la suma con gráficas que se producen “hacia arriba” y de la resta con gráficas que se producen “hacia abajo”.

**Resumen de los resultados de la primera sesión**

Las actitudes que mostraron los alumnos a esta sesión fueron de interés y compromiso con el trabajo. La solución de retos fue algo que les entusiasmó bastante. En el logro de esta motivación por parte de los alumnos fue fundamental el trabajo con la calculadora, conocer el funcionamiento de la máquina despertó interés en los niños. Otro factor que favoreció un buen ambiente de trabajo fue que la investigadora interactuó con paciencia y cordialidad con cada uno de los alumnos, ayudando de esta manera a establecer un ambiente de confianza y participación que propició que se involucraran con las actividades propuestas. Asimismo se observó que la interacción entre los alumnos les apoyó para resolver sus dudas y a mantener una buena disposición hacia la realización de las actividades.

Los alumnos no tuvieron dificultades mayores en cuanto al manejo de la calculadora, su trabajo con la máquina fue muy eficiente, probablemente influyó en esto el hecho de que ellos están en contacto con la tecnología de una manera u otra. Algunos tienen juegos como el Nintendo, otros tienen computadoras o calculadoras de cuatro operaciones.

La mayor dificultad que se observó consistió en que cuando se dan indicaciones sobre el funcionamiento de la máquina y no son entendidas hay que atender a los niños de manera individual y práctica. Por esto pensamos que se dificultaría el trabajo con grupos numerosos, ya que los alumnos cuando no entienden se aburren y se distraen. Quizás una manera de trabajar con un grupo normal (40 alumnos) sea a través de la organización de equipos de trabajo.

**Segunda sesión**

Los propósitos de la segunda sesión fueron los siguientes:

a) Revisar el conocimiento de los niños sobre la calculadora y sus funciones.

b) Continuar trabajando sobre la relación entre la ecuación y su representación gráfica.
c) Inducir la noción de la fracción ½.

Las nociones matemáticas que se abordaron en esta sesión son las mismas que las de la primera sesión. Las actividades que se llevaron a cabo fueron las siguientes:

1. La investigadora repartió las máquinas y los alumnos procedieron a abrirlas. Lo hicieron sin mayor dificultad y borraron de la pantalla todas las ecuaciones que realizaron. La investigadora pasó a revisar a cada uno de los alumnos y el que no había podido hacerlo fue auxiliado por el investigador.

2. Se revisó si los niños recordaban qué teclas deben oprimir para activar el editor de ecuaciones y el editor de gráficas. Procedieron a escribir una ecuación cuya gráfica pase por abajo del origen. Un alumno dice que hay que poner más cinco es decir x+5, al revisar su hipótesis descubre que no se suma sino que se resta. En esta actividad la mayoría de los niños requiere el apoyo individual. Revisan que la ecuación que hicieron efectivamente aparezca abajo, si ya habían realizado x+5, ahora hacen la operación contraria x-5.

3. Como recordatorio de la sesión anterior se pidió a los alumnos que construyeran una ecuación que pase por el punto que señalaba sobre la gráfica la investigadora (el punto (0,8)). Oscar construyó la ecuación x+10, pero ésta pasa arriba de la rayita que indicó el investigador, así que se retoma el reto. Los alumnos no atinan a hacerlo, se les dificulta, entonces Mariana propone x+6, pero al verificarlo con el investigador se dio cuenta que tampoco es la respuesta correcta. Bety fue la primera alumna que la construyó correctamente, posteriormente la mayoría del grupo también lo hizo.

4. La investigadora propuso a los alumnos que escribieran las ecuaciones x+2 y x+3 y señala que quiere que tecleen una ecuación tal que su gráfica pase entre esas dos líneas, “exactamente a la mitad de la distancia entre las dos gráficas”. Aunque hicieron varios intentos, los alumnos no lograron resolver este

reto. Una alumna propuso la ecuación x+1, pasó al frente se dio cuenta que no pasa por donde la investigadora indicó. Otro alumno intentó con x+4, al construir la gráfica con la calculadora se percataron que tampoco es correcta. Otro alumno propuso x+8, pero se dio cuenta que “se fue todavía más lejos”. Intentaron, pero no encontraron la manera de resolverlo.

5. Se les plantearon entonces nuevas preguntas: ¿ustedes creen que hay números entre el 2 y el 3? A lo que respondieron que no. Entonces la investigadora recurrió a un ejemplo de la vida cotidiana, si yo tengo una naranja, ¿la puedo repartir entre dos niños? Los alumnos contestan que sí, sin hacer ninguna referencia a la actividad que estaban abordando. El tiempo de la sesión se agotó, así que les dejó de tarea que pensaran como podrían construir una ecuación que pase entre las gráficas de x+2 y x+3. Se pidió que apagaran la calculadora, pero algunos alumnos querían seguir buscando una respuesta.

**Resumen de los resultados de la segunda sesión**

Además de la complejidad inherente al uso de la fracción ½, consideramos que las dificultades que observamos hicieron surgir la necesidad de trabajar nuevamente sobre el funcionamiento de la maquina en la construcción de las ecuaciones, lo cual motivó un desgaste en los niños que no habíamos considerado. Los niños se veían agotados en el momento en que abordamos las actividades que nos encaminaban a la noción de fracción.

Los logros que se obtuvieron en esta sesión fueron reafirmar el interés en las actividades con la calculadora, así como recordar cómo se tecleaban las ecuaciones y cómo se podían visualizar sus representaciones gráficas.

En cuanto a las actitudes de los niños, su trabajo ratificó que las actividades en la calculadora despiertan su interés. Al solucionar un reto los niños interactúan, se comunican, hay intercambio de conocimientos, ayuda, solidaridad, confianza, entusiasmo e interés.

**Tercera sesión**

El principal propósito de esta sesión fue abordar la noción de fracción a partir de la "mitad de uno". Las nociones matemáticas que se manejaron en esta sesión son las mismas que en las dos anteriores.

**Secuencia de actividades.**

1. Recapitulación de la sesión anterior. Se recordó la relación que existe entre la ecuación y la gráfica. El uso de la función F4 para limpiar la pantalla y volver a editar las gráficas. Se recordó brevemente el trabajo sobre ecuaciones que se había realizado y la solución del reto que había quedado pendiente: construir una gráfica que pase entre las de x+2 y x+3.

2. Se les pidió teclear en el editor las ecuaciones x+2 y x+3 y que observaran sus gráficas.

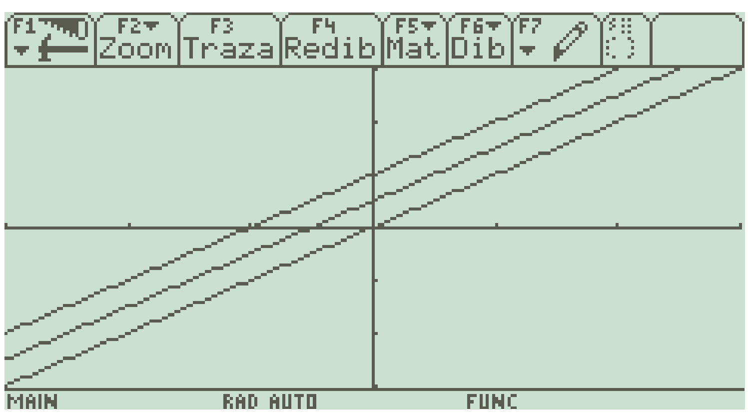
3. Se pidió a los alumnos que discutieran por equipos cómo dar respuesta al reto aún no resuelto. Los alumnos siguieron sin poder resolverlo, la investigadora tuvo que intervenir agregando nuevas preguntas. Entonces Gaby dice que "es la mitad", el investigador le pregunta ¿la mitad de qué? Ella contestó la mitad de tres, el investigador vuelve a preguntar ¿la mitad de tres o la mitad entre dos y tres? Ella afirma que "la mitad de 3 y a la mitad entre 2 y 3 es lo mismo". La investigadora retomó el ejemplo de la naranja que se había planteado la sesión anterior, dos niños dijeron que cada una de las partes en que se dividió la naranja "es la mitad de uno". La investigadora preguntó si se puede representar de manera numérica "la mitad de 1". Un niño dijo "si encontramos esto la calculadora podría entender lo que queremos hacer".

4. La investigadora mostró cómo se representa la "mitad de uno" en el lenguaje de la calculadora (en la línea de edición se teclea 1÷2, al oprimir la tecla "ENTER" se imprime en la pantalla la fracción ½).

5. Se pidió a los niños que tuvieran en cuenta esta fracción para volver a abordar el reto no resuelto. Después de varios intentos y de una intensa discusión entre los

alumnos, encontraron que “podían subir la gráfica de x+2 sumando ½ “o bajar la gráfica de x+3 restando ½”. Lo probaron con la calculadora y verificaron que efectivamente la línea pasa “a la mitad”, entre la gráfica de x+2 y x+3.

6. La investigadora les propuso actividades similares, donde pusieran en uso la fracción ½; por ejemplo, construir una ecuación que permita que “la línea pase en medio de las gráficas de x+7 y x+8”. Para esto la investigadora escribió en el pizarrón esas expresiones. Los alumnos discutieron intensamente y presentaron diferentes planteamientos. Por ejemplo, un alumno construyó la ecuación x+8/7, la investigadora le pidió que comprobara su respuesta usando la calculadora; el alumno dijo que “8/7 también es una fracción… pero que no resuelve el reto”. Una alumna propuso x+7+1, la tecleó en la calculadora y que la gráfica es igual a la de x+8. Entre sus intentos construyeron la gráfica de la ecuación x+½ y a partir de observar lo que pasaba con ese caso dijeron con júbilo a la investigadora que “se dieron cuenta que la ecuación correcta es x+7+½”, mostrando la ecuación y la gráfica que habían producido en sus calculadoras. En general les costó trabajo realizar la actividad de manera individual. Para indagar con más elementos por qué la ecuación x+½ les había dado la pauta para obtener x+7+½ les pidió “construir una ecuación cuya gráfica pase en medio de las de x+0 y x+1”. La construcción de esta ecuación les fue muy fácil y obtuvieron atinadamente x+½.




Gráficas de las ecuaciones y=x+0, y=x+½ y y=x+1.

**Resumen de los resultados de la tercera sesión.**

Los logros que se tuvieron en esta sesión tienen que ver con el interés por resolver el conflicto de la construcción de una gráfica que pase entre dos números naturales consecutivos (respecto a su ubicación en el eje Y). En cuanto a la construcción del concepto de “la mitad de uno”, los alumnos entendieron qué es “la mitad de uno”, pero desconocían su representación como número, lo cual les impedía proponer soluciones plausibles usando la calculadora. Ellos fueron capaces de señalar con el dedo la trayectoria y ubicación de la gráfica que estaban buscando para dar respuesta al reto que se les había planteado, pero no podían hacerlo con la calculadora porque no podían introducir la información que poseían usando el código de la máquina.

Las respuestas de los alumnos en esta sesión de trabajo nos permiten destacar tres aspectos que resultan importantes en cuanto al papel de la calculadora como herramienta de mediación en la construcción del conocimiento de los niños.

Por una parte está el apoyo que brinda la visualización de objetos (rectas) en el espacio, como esto se hace en el contexto de la métrica del plano coordenado, los alumnos se ubican en el ámbito del conteo que les induce a referirse a la ubicación de las rectas en el plano en términos numéricos para afinar sus expresiones cualitativas. Por ejemplo, expresiones como “la gráfica de x+2 aparece debajo de la de x+1” pueden afinarse indicando que la distancia entre esas gráficas es una unidad (con referencia a la graduación en el eje Y).

Por otra parte, la forma en que se producen las gráficas en la calculadora va más allá de hacer u observar un simple dibujo, la gráfica está asociada a valores numéricos, en el caso de este trabajo, a los puntos en que corta al eje Y y a la constante en funciones de la forma $f(x)=x+k$. Los niños pudieron observar que el valor específico de esa constante está asociado al valor de *y* en el punto de intersección de la gráfica con el eje Y. Además, la posibilidad de producir y visualizar las gráficas en la calculadora les permitió apreciar a través de la vista cuestiones relacionadas con el orden en los números naturales, por ejemplo, el hecho numérico “3 es mayor que 4” se ve confirmado por la ubicación de las gráficas de $y=x+3$ y $y=x+4$: “la gráfica de x+4 está arriba de la de x+3”.

También es importante señalar que la relación de orden en los números naturales es el punto de partida que estamos tomando en esta tesis para inducir la noción de fracción al presentar actividades que consisten en construir gráficas de funciones lineales que “pasen por arriba o por abajo” de una gráfica dada. De mayor interés resulta el pedirles que construyan gráficas que “pasen entre” dos gráficas dadas, especialmente cuando la distancia entre ellas es una unidad considerando los puntos en que cortan al eje Y.

De lo anterior se deriva que no habría sido una dificultad insalvable si los niños que participaron en este estudio no hubieran tenido idea de la relación de orden en los números naturales; con el apoyo que brinda la calculadora y mediante actividades adecuadas también podrían haber enfrentado con éxito los retos que aquí se les propusieron, basados únicamente en nociones básicas que ya poseen sobre ubicación en el espacio, como “estar arriba, abajo o entre”. Esta afirmación se sustenta en las respuestas que dieron a la actividad referente a construir una gráfica que “pasara en medio de las gráficas de x+2 y x+3”. Las respuestas de los niños proporcionaron evidencia de que desconocían que hubiera números entre 2 y 3, pero ellos sabían que “una naranja se puede repartir entre dos niños”, que a cada una de esas partes se le llama “mitad” y que existe un lugar en el espacio que corresponde a una recta que pasa entre las gráficas de y=x+2 y y=x+3, lo cual hizo evidente una niña al señalar con el dedo la trayectoria de la gráfica que se pedía. Por estas razones, consideramos que fue suficiente para ellos que la investigadora les dijera que la “mitad de 1 se representa con el número ½” y con esto pudieran dar una respuesta al reto. En otras palabras, el conflicto que tuvieron los niños para construir una expresión que produjera una gráfica entre las de y=x+1 y y=x+2 no era producido por un obstáculo conceptual, sino por no conocer cuestiones de orden sintáctico (que la “mitad de 1” se expresa matemáticamente como 1÷2 o como ½).

Consideramos relevante hacer énfasis en que los niños fueron capaces de relacionar un cambio de ubicación de las rectas en el plano con los números naturales, los fraccionarios y con sus operaciones. Esto fue evidenciado por sus respuestas cuando encontraron que al sumar “la mitad de uno (½)” a la ecuación y=x+2, o restar la mitad de uno en la ecuación y=x+3, la ecuación resultante (y=x+2+½) produciría una gráfica que pasa entre las de y=x+2 y y=x+3. Consideramos que su experiencia en este tipo de actividad, además de proporcionarles elementos para generar la noción de fracción, también les ayudará a dar un sentido más fino a las operaciones con esos números; hasta este punto de su avance sus respuestas sugieren que han atestiguado que la fracción

½ es un número, debido a que puede operarse con él de manera similar a lo que puede hacerse con los números naturales que incipientemente conocen.

También pudo observarse que al término de cada sesión de trabajo el manejo de la calculadora es mejor y que los alumnos entienden más el lenguaje matemático que se requiere para comunicarse con la máquina, como lo sugiere la expresión del niño que dijo "si encontramos cómo representar la mitad de uno con un número la calculadora podría entender lo que queremos hacer".

**Cuarta sesión**

El propósito de esta sesión fue el uso de la fracción de ½ en la solución de algunos retos de forma escrita por equipos de dos alumnos. Las nociones matemáticas son las mismas que las mencionadas anteriormente y las actividades se centraron en reafirmar la noción de fracción en esta sesión a través del uso de la noción de mitad en la construcción de ecuaciones que le permitan solucionar algunos retos.

**Secuencia de actividades.**

1. Recapitulación de la sesión anterior. Se recuerda que la fracción ½ es la mitad de uno, el uso que le dimos en la construcción de ecuaciones y algunos ejemplos de uso en la vida cotidiana.

2. Resolver por parejas cinco retos que se les presentaron por escrito. La investigadora invitó a cada una de las parejas para que lea alguno de los retos. Los cinco retos que se les plantearon fueron los siguientes:

    - ¿Qué representa ½?
    - ¿Crees que x+1 es igual a x+½+½? Si o No ¿por qué? Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.
    - Necesito una gráfica que pase en medio de las ecuaciones x+4 y x+5. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.

- Ahora quiero que mi gráfica pase en medio de x + 7 y x + 8. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.
- ¿Crees que x+1+½ es igual a x+½+½? ¿Si o no? ¿Por qué? compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

Se les recordó para qué sirve la tecla que tiene un rombo verde (selector) y la de la letra “W” para trabajar con el editor de ecuaciones. La investigadora revisó que todos los alumnos tuvieran sus calculadoras con la pantalla en el editor de ecuaciones activada, para poder proseguir con la siguiente actividad de manera conjunta.

3. Propiciar y facilitar la solución de los retos a partir de despejar la dudas de cada uno de los equipos por parte del investigador. Los alumnos entusiasmados intentaron resolver cada uno de los retos, cuando tuvieron alguna duda llamaron a la investigadora para que les ayudara a aclararlas. El equipo de Héctor y su compañero se rezagó y el investigador necesitó inducir la reflexión desde el primer reto, donde se plantea lo que representa ½.

4. Discutir con cada uno de los equipos cómo se solucionaron alguno de los retos planteados. Cuando terminaron su trabajo se les pidió que pasaran al frente y que cada equipo explicara la manera en que solucionaron los retos.

   El equipo de Héctor y compañero explica que el primer reto es “la mitad de uno” (½).

   El equipo de Beatriz y Nayelli manifestó que x+1 es igual a x+½+½, porque “es la mitad más la mitad… que es igual a uno”. Lo comprobaron en la calculadora escribiendo las dos ecuaciones y apareció sólo una gráfica.

   El equipo de Ana y Brenda construyeron la ecuación x+4+½ que corresponde a la línea que pasa en medio de las ecuaciones x+4 y x+5.

   El equipo de Mariana y compañera construyeron una ecuación diferente al resto del grupo: x +8 -½ que corresponde a la gráfica que pasa en medio de x+7 y x+8. La mayoría del grupo construyó la ecuación x+7+½.

   El equipo de Oscar y Memo dijeron que x+1+½ no es igual a x+½+½+½, sin embargo al comprobarlo en la calculadora descubrieron que sí es igual.

5. Realizar una reflexión sobre estas actividades. Se hizo notar que a través de la mitad de 1 podemos representar los números de diferente manera y que 1 es igual a dos mitades.

En cuanto a los logros que se pueden apreciar en esta sesión se encuentran la búsqueda de soluciones por parte de los alumnos a los retos planteados por la investigadora de manera escrita y el trabajo en equipo propicia la discusión e interacción del conocimiento.

Las dificultades que se presentaron en esta sesión tienen que ver con la comprensión de lo que se está pidiendo en la lectura de los retos. Para algunos alumnos fue difícil entender el reto que se les planteaba, así que recurrían a otro compañero para ver cómo lo había solucionado o requerían del apoyo de la investigadora para facilitar su comprensión y con ello la solución del mismo.

El manejo de la calculadora cada vez fue más comprensible para ellos, ya que a través del uso han podido comunicarse con ella y entender su lenguaje.

**<u>Quinta sesión</u>**

El propósito de esta sesión es la de introducir una nueva fracción como "la mitad de la mitad" que es igual a un cuarto.

Las nociones matemáticas que se abordan en esta sesión son las mismas que en la cuarta sesión, únicamente que aquí ya vamos a trabajar con el uso de una fracción más que es un ¼ (un cuarto) o "la mitad de la mitad".

**Secuencia de actividades**

1. Recapitulación de la sesión anterior. Recordar las actividades escritas que resolvieron el día anterior. La investigadora, escribe en el pizarrón algunas ecuaciones x+3, x+4, etc. y les recuerda que ½ representa un medio, que es una fracción que significa una parte de uno, por eso es la mitad de uno. Además re-

tomó el uso de la fracción ½ en la solución de retos y su relación con la vida cotidiana.

2. Realizar dos actividades en las que utilicen la fracción ½. Construir la ecuación que permita que la gráfica pase en medio de las siguientes ecuaciones: x+3 y x+4; x+1 y x+2. Los alumnos resolvieron el primer reto, la investigadora se acercó a las mesas de trabajo para identificar qué hacen los niños para resolver los retos. Ana pasó al frente para explicar cómo resolvió el primer reto: “primero escribió las ecuaciones de x+3 y x+4 y luego añadió x+3 más la mitad de uno” (½). Mariana en el segundo reto escribió primero x+1+½ y para estar segura que era la ecuación correcta escribió posteriormente las ecuaciones que se le habían proporcionado x+1 y x+2 y construyó las gráficas en la calculadora.

   Bety realizó la actividad con un orden diferente, primero escribió todas las ecuaciones que le proporcionó el investigador para posteriormente resolver cada uno de los retos, llegando a la misma solución que sus compañeros. Vanesa resolvió el primer reto igual que sus compañeros, en el segundo reto construyó una ecuación diferente a la de sus compañeros: escribió primero las ecuaciones x+1 y x+2 después construyó x+2+½ percatándose que la gráfica se produce arriba del dos, entonces decidió restar y construyó la ecuación x+2-½. La actividad fue realizada de manera satisfactoria por todo el grupo.

3. Introducir la “mitad de la mitad” y su relación con un cuarto. La investigadora introduce la mitad de la mitad tomando en cuenta la repartición de la naranja, partiendo ésta a la mitad y esa mitad en otra mitad. Aunque el investigador no les pidió que lo representaran en la calculadora, ellos lo hicieron y escribieron la ecuación x+½ -½, otro compañero propone x-½ -½, revisaron sus gráficas y dijeron que no corresponden a lo que se está proponiendo porque “la mitad de la mitad no puede ser cero” (se referían a x+0, que es la gráfica que obtuvieron con la ecuación x+½ -½).

4. Comprender el significado de “la mitad de la mitad” o un cuarto relacionándolo con su vida cotidiana. La investigadora puso el siguiente ejemplo: “yo soy la mamá y reparto una naranja, tomó la mitad de ella y la otra mitad se la reparto a

Héctor y a Vanesa ¿Qué parte le di a Héctor y a Vanesa?". Vanesa dijo que es un cuarto lo que le dio a cada quien, Bety dijo que es la "mitad de la mitad". El investigador les manifiesta que las dos están en lo correcto, que la mitad de la mitad es lo mismo que un cuarto y que les va a enseñar cómo se escribe en la calculadora la mitad de la mitad en una ecuación (x+½ (½)) y también cómo se escribe un cuarto en una ecuación (x+1÷4). Hizo énfasis en que un cuarto es la mitad de un medio. En el pizarrón, la investigadora, volvió a escribirlo.

5. Representar esta fracción en la calculadora: "la mitad de la mitad" ½ ( ½ ) y un cuarto ¼. Todos los alumnos escribieron las ecuaciones que el investigador anotó en el pizarrón.

6. Comprobar que estas dos representaciones tienen el mismo valor. Al escribir ambas representaciones, descubrieron que solamente se ve una gráfica porque "aunque hay dos gráficas están encimadas y salen así porque son iguales".

7. Escribir ecuaciones utilizando esta fracción. Esta actividad no se llevó a cabo por falta de tiempo.

8. Revisar lo aprendido el día de hoy.

Los logros en esta sesión nos permiten ver que hay mayor claridad en el significado de ½ o de la mitad de uno. Los niños entendieron la relación entre "la mitad de la mitad" y un cuarto. Entendieron que tanto la mitad (½) como un cuarto (¼) son parte de un entero y la relación entre estas fracciones.

Las dificultades que encontramos tienen que ver con la representación de "la mitad de la mitad" (½ (½)) es "muy larga para escribirla… es más fácil escribir un cuarto".

El manejo de la calculadora a estas alturas ya les es muy familiar.

## Sexta Sesión

El propósito de esta sesión fue el uso de la fracción de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$) en la solución de retos escritos, de manera individual.

Las nociones matemáticas que se propician son las mismas que en la sesión anterior.

**Secuencia de actividades**

1. Recapitulación de la sesión anterior. Recordar el significado de “la mitad de la mitad” y el de un cuarto.

2. Resolver de manera individual cuatro retos escritos. Los retos fueron los siguientes:

1. ¿Qué representa $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$)? Explícalo.
2. ¿Es igual $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$) que $\frac{1}{4}$? ¿Sí o no? ¿Por qué? Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
3. Escribe en la calculadora la ecuación $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ y construye su gráfica. ¿Por dónde pasó la gráfica? ¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? ¿Sí o no?, escríbela. Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
4. ¿Crees que la ecuación $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ es igual a $x+\frac{3}{4}$? ¿Sí o no? ¿Por qué? Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

3. Llevar de la mano a los alumnos en la solución de los dos primeros retos. Un alumno leyó el primer reto y todos lo resolvieron de manera individual. Ana leyó el segundo reto y lo resolvieron, para comprobarlo en la calculadora, por parejas, un alumno escribió $x+\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$) y otro alumno escribió $x+\frac{1}{4}$ y compararon las gráficas para ver si son iguales. Algunos alumnos pidieron el apoyo del investigador para entender lo que se les estaba pidiendo en los retos. A partir del tercer reto los alumnos empezaron a resolverlos según sus ritmos de trabajo. Comentaremos el reto ¿por dónde pasó la gráfica de $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$? La respuesta fue “por el número uno”; entonces se les pidió que construyeran otra ecuación diferente a la que se les dio y que pase por el mismo lugar, Brenda construyó la ecuación

$x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, y otra compañera escribe $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, que es una ecuación que ya se había trabajado, sin embargo la construcción de Brenda fue realizada por ella.

4. Terminar de solucionar los retos planteados, siendo auxiliados en sus dudas por el investigador. Como los tiempos de trabajo son diferentes terminaron en diferentes momentos y esto propició que se fueran retirando conforme iban terminando.

5. Realizar una reflexión de las actividades realizadas. Esta actividad no se llevó a cabo por falta de tiempo.

Los logros que se pudieron apreciar en esta sesión es que a pesar de que el trabajo era de manera individual se dio la interacción entre los alumnos. La comunicación fue fluida entre ellos y con el investigador.

Dentro de las dificultades encontramos que les costó trabajo comprender lo que se les pide por escrito. Los alumnos trabajan a diferentes ritmos y eso ocasiona que algunos terminen primero y otros al final. Los alumnos que se quedaron al final requirieron de mayor apoyo por parte del investigador.

Las actitudes que tuvieron los alumnos fueron de interés y búsqueda en la solución de los retos planteados.

**Resumen de las seis sesiones en el aula**

Los logros que se apreciaron en cada una de las sesiones nos dan la pauta para pensar que es importante trabajar la noción de fracción con niños del primer ciclo de educación primaria, para de esta manera sentar las bases que nos permitan consolidar el tema en los siguientes dos ciclos. Las respuestas de los niños a los retos que se les plantearon nos permiten afirmar que las principales dificultades que se presentaron a lo largo del trabajo son salvables. Para reducir los obstáculos que se presentarían trabajando con 30 alumnos podemos utilizar monitores en la organización del grupo, esto implica que primeramente podemos trabajar con algunos niños que nos van a servir de guía de sus compañeros en la realización de las actividades, lo cual facilitaría mucho el trabajo. Las deficiencias en comprensión lectora son también un obstáculo que se puede salvar si les explicamos a todo el grupo la hoja de trabajo a realizar y como tarea complementaria trabajar la lectura de comprensión dentro del grupo. La representación de los números fraccionarios con símbolos representa cierta dificultad en los niños, en la medida que se familiarizan con ellos la superan.

Nos pudimos dar cuenta que los alumnos están inmersos en la tecnología y que este tipo de calculadora los introduce de una manera muy natural al ámbito de la simbología e ideas matemáticas y les permite construir y validar nuevos conocimientos.

En el capítulo asignado a metodología describimos las categorías establecidas para el análisis del presente trabajo.

a) La Representación hace referencia a la forma en que los estudiantes confrontan el manejo de las distintas representaciones que se involucran en esta investigación. Se forma por las representaciones gráficas, verbales y simbólicas.

Esta categoría la podemos observar en algunas actividades de las diferentes sesiones como:

| **Sesión** | **Número de Actividad Referida** |
|---|---|
| Primera | 3, 4, 6, 8, 10, 19. |
| Segunda | 4, 5. |
| Tercera | 2, 3. |
| Cuarta | 1,2. |
| Quinta | 1,2. |

b) La Traducción se refiere a cómo el alumno transita entre una y otra representación, sus conexiones y los procesos de “ida” y “vuelta” en el trabajo realizado. Esta segunda categoría fue algo que pudimos observar en las respuestas que los alumnos proporcionaban a cada uno de los retos planteados. Podemos apreciar más claramente esta categoría en las siguientes actividades:

| Sesión | Número de Actividad Referida |
|---|---|
| Primera | 5, 7, 9. |
| Quinta | 4, 5, 6. |
| Sexta | 3 |

c) La Sintaxis se refiere a las formas de estructurar simbólicamente las distintas representaciones y el lenguaje utilizado para este caso. Esta categoría la podemos observar en las siguientes actividades:

| Sesión | Número de Actividad Referida |
|---|---|
| Primera | 11, 12. |
| Tercera | 4 |
| Quinta | 3 |

d) El significado se refiere a las interpretaciones que el alumno hace de cada una de las distintas representaciones matemáticas y a la forma en que éstas evolucionan a lo largo del trabajo de campo. Podemos apreciar esta categoría en las siguientes actividades:

| Sesión | Número de Actividad Referida |
|---|---|
| Primera | 13, 14, 15, 17, 18 |
| Segunda | 4 |
| Tercera | 5, 6 |

e) La pragmática analiza la utilidad que el alumno atribuye a cada una de las representaciones matemáticas. Esta categoría la podemos observar en las siguientes actividades:

| Sesión | Número de Actividad Referida |
|---|---|
| Primera | 16, 20, 24. |
| Tercera | 7, 8 |
| Cuarta | 2, 3, 4, 5. |
| Quinta | 2 |
| Sexta | 2 |

Se han relacionado cada una de las categorías de análisis con las actividades realizadas en el trabajo de campo, mismas que hemos detallado anteriormente y que nos permiten hacer las siguientes consideraciones:

- Los alumnos involucrados en el estudio piloto no tuvieron mayores dificultades para incorporar el lenguaje de la calculadora gráfica, por lo cual no es un obstáculo en el estudio principal.

- Las actividades presentadas, después de haber sido rediseñadas en algunos de sus contenidos y puestas en práctica las veces que se consideró necesario, mostraron resultados alentadores. Los estudiantes presentaron situaciones distintas a las que comúnmente se logran con una enseñanza tradicional, entre las más significativas estás las que tuvieron que ver con la apropiación de las distintas *representaciones* manejadas por los alumnos (*simbólica y gráfica)* así como la *traducción* de las mismas. Del mismo modo se evidenció un avance considerable con relación a la *sintaxis* o formas de construcción de esas representaciones, los *significados* que los alumnos otorgaron a las distintas representaciones manejadas también mostraron un avance considerable al constatar que cada representación cobraba sentido para una nueva construcción de significados. Por último, destacamos el hecho de que los alumnos construyeran sus propios problemas y los representaran de distinta forma, lo que tuvo que ver con la utilidad de lo aprendido (pragmática). Cabe señalar que a lo largo de las actividades realizadas en cada una de las sesiones pudimos observar las diferentes categorías, de esta manera podemos poner un ejemplo concreto con la actividad 17 de la primera sesión o en la actividad 3 de la tercera sesión donde los alumnos se apropian del conocimiento a partir de generarlo con sus propias construcciones.

# CONCLUSIONES

Las siguientes conclusiones tienen como eje de desarrollo las preguntas de investigación que orientaron el trabajo.

La investigación se realizó en sesiones de trabajo con solamente diez alumnos, lo que facilitó la interacción y coordinación, aunque un grupo normal tiene aproximadamente treinta alumnos lo cual hubiese dificultado el trabajo en el aula. Esta era una inquietud que teníamos, pero que pudimos tratar de solucionar al ponerla en práctica con otro grupo de segundo grado, al inicio del año escolar. Iniciamos las sesiones con todo el grupo, aunque llegó un momento de realizar adecuaciones para trabajar con equipos de cinco alumnos, además de utilizar monitores en cada uno para facilitar el trabajo; con los monitores se trabajó previamente.

Pregunta de investigación 1:
¿Qué nociones desarrollan los niños de 7-8 años de edad cuando abordan actividades sobre fracciones empleando el ambiente gráfico de la calculadora?

Los niños consolidan el concepto de unidad al realizar actividades en el ambiente gráfico de la calculadora, esto ocurre al observar que entre una gráfica y otra hay un espacio que representa la unidad; el ambiente gráfico de la calculadora les permite visualizar esto y darse cuenta que en ese espacio pueden existir otras partes. Esto los conduce a construir los conceptos de “la mitad de uno” o “la mitad de la mitad” que los induce a la búsqueda de una representación numérica de esos conceptos para comunicar sus ideas a la calculadora y puedan ser procesadas en una gráfica.

Es importante señalar que si el niño no domina el concepto de unidad como un todo no puede acceder a fracturarlo y por lo tanto este primer nivel de conceptualización de la fracción no es consolidado, lo que puede dificultar la comprensión de los otros significados, que cada vez requieren un nivel mayor de abstracción. Consideramos que al realizar las actividades en un ambiente de calculadora, los niños de 7-8 años de edad desarrollaron la noción de fracción como parte-todo, lo que debe seguirse trabajando en los siguientes grados de manera paulatina para permitirles entender con mayor profundidad otros significados.

Pregunta de investigación 2:
¿Qué estrategias emplean los niños de 7-8 años de edad cuando abordan la solución de problemas que involucran el concepto de fracciones empleando la calculadora?

El ambiente de la calculadora gráfica facilita a los niños la verificación de su trabajo matemático, así como la verificación por sí mismos de las conjeturas que formulan. Es decir, propicia que los alumnos identifiquen la relación cuantitativa entre la ecuación que construyen y la gráfica que la representa, así ellos verifican sus conjeturas y buscan solucionar los retos que se les ha planteado. Si la gráfica tiene que pasar por un punto determinado, deberán darse cuenta dónde se ubica, si el signo de la operación que emplean es positivo o negativo, y para ello tendrán que verificar sus conjeturas para poder llegar al resultado que esperan. Cabe señalar que para construir una gráfica arriba o abajo del punto origen (0) se necesita utilizar una suma o una resta en las ecuaciones. En alguna de las actividades realizadas, la alumna Gaby descubrió que la línea de una gráfica pasa por arriba del origen cuando realiza una suma, aprovechando este hallazgo, la investigadora les preguntó qué operación podían hacer para lograr lo que se les pedía "…si sumamos aparece arriba". Mariana propuso "restar" y explicó cómo descubrió eso: "escribí en la calculadora x+3 y ví que la gráfica se ponía arriba… así que escribí x-3 para que apareciera abajo". De esta manera los niños establecen una relación cuantitativa entre la ecuación y la gráfica en la ubicación en el plano, así como al operar con suma y resta en una ecuación.

La comunicación que se establece entre la máquina y el alumno se da de manera natural, lo que permite que fluya el lenguaje matemático. No necesitamos definir qué es una ecuación o qué es una fracción para poder trabajar, simplemente su uso va a ir determinando sus significados.

Pregunta de investigación 3:

¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora gráfica en las formas de participación de los niños con el maestro?

La calculadora gráfica es una herramienta que permite que el alumno busque e investigue la solución de los retos que se le presenten, con la confianza de que si se equivoca no pasa nada, simplemente tiene que oprimir una tecla para borrar y continuar con su búsqueda. Esto le da seguridad al alumno y además, si no lo entiende, la autoestima que ha ganado al verificar por sí mismo sus conjeturas le proporciona confianza para consultarlo con sus compañeros para investigar juntos la solución. Pudimos apreciar que cuando los alumnos trabajan con los recursos visuales que aporta la calculadora gráfica, se genera una actitud de buscar, investigar e interactuar con sus compañeros y con el maestro para resolver los problemas que se les presentan.

Este tipo de ambientes con recursos visuales genera confianza entre los alumnos y el coordinador del trabajo (maestro), lo que permite que haya una interacción favorable que facilita la tarea de guiar a los alumnos en la apropiación del conocimiento que están manejando; en particular, esto propicia la interacción del maestro con el alumno como orientador y facilitador en la apropiación del conocimiento de la noción de fracción. Esta apropiación del conocimiento se va generando al enfrentar al niño a retos como el de la construcción de una gráfica que pase entre las ecuaciones x+2 y x+3. Después de una serie de conjeturas sobre como hacerlo los niños llegaron a la conclusión de que en una unidad puede haber partes y que una de ellas es la “mitad de uno”. Esta noción de la fracción se puede representar de manera numérica en un código matemático que entiende la calculadora y que es la única forma de comunicarse con ella.

Pregunta de investigación 4:

¿Cómo influye el trabajo del ambiente con la calculadora en las formas en que los niños se relacionan con los contenidos matemáticos que se les propone?

La calculadora gráfica sirve de “puente” entre el alumno y el contenido al jugar un papel relevante entre el pensamiento del alumno y la búsqueda de soluciones a los retos planteados. Decimos que sirve de puente entre el alumno y el contenido porque cuando el niño interactúa con la máquina tiene que pensar cómo se va a comunicar con ella, esto lo hace a través de un código matemático, pues de esto dependen los resultados que obtenga. La calculadora le va a permitir comprender el lenguaje matemático a partir de utilizarlo en la solución de retos. Desde el inicio de las actividades los niños tuvieron que operar con sumas y restas, posteriormente realizaron ecuaciones algebraicas que los llevaron a entender (dentro de este contexto), a la unidad como un espacio entre un número y otro. Al pedirles que una línea pase entre una gráfica y otra se vieron en la necesidad de fracturar llegando a la noción intuitiva de la fracción.

*Reflexiones finales*

Consideramos que la noción de fracción puede ser abordada desde el primer ciclo de educación primaria como una noción que permita a futuro desarrollar el tema con mayor profundidad y entendimiento. Las investigaciones realizadas y señaladas a lo largo del trabajo nos confirman la necesidad de iniciar el conocimiento de la fracción a una edad temprana, tomando como punto de partida una noción intuitiva de la misma, donde el niño construya el concepto de unidad y de esta manera avanzar a la noción de fracción como la parte de un todo. La presente investigación se realizó con alumnos que estaban a la mitad del segundo grado, pero sería interesante iniciar la enseñanza de la noción de fracción en la última etapa del primer año, pues para entonces los alumnos ya saben leer, escribir y han sido iniciados en el trabajo con los números.

## REFERENCIAS


Anuario Estadístico del Distrito Federal (1994), Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Arceo, E. (1996). “El nuevo enfoque matemático en el aprendizaje de fracciones” en la revista: El Cuaderno de los maestros de Aguascalientes. Año IV Sep-Oct. México

Ávila A. et al (l989). “La fracción: Una expresión difícil de interpretar en la revista Pedagogía de la UPN. Enero-Marzo. Vol. 6, No. 17. México.

Balbuena, H. (l984). “Descubriendo fracciones” en: Laboratorio de Psicomatemática. No. 5 DIE-CINVESTAV-IPN México

Behr, M. et al (1992). Handbook of Research on mathematics teaching and learning.Edited by Douglas A. Grouws. A Proyect of the National Council of Teachers of Mathematics. E.U.A.

Block, D. (1986). Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria. Tesis de Maestría. DIE-CINVESTAV-IPN. México.

Block, D. (2001) “La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria, Un estudio didáctico”. Tesis Doctoral. DIE-CINVESTAV-IPN México.

Bruner, J. (l982) “The formats of language acquisition” in American Journal of Semiotics. Vol.1, núm.3.

Bruner, J. (l983) Childs talk. New York: Norton.

Bruner, J. (l995) “El habla del niño”. Ed. Paidos. España.

Cedillo, T. (1996). Algebra as a Language in-use. Tesis Doctoral, Instituto de Educación, Universidad de Londres, Inglaterra.

Cedillo, T. (1999). Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico: Un estudio con niños de 11-12 años (artículo de investigación). Educación Matemática, Vol. 11 No.2, Agosto. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cedillo, T. (2000). “La calculadora en la clase de matemáticas: implicaciones hacia la enseñanza”. Conferencia Internacional sobre el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Universidad Michoacana. Enero, México

Cedillo, T. (2001). Towards an Algebra Acquisition Support System: A study based on using graphic calculators in the classroom. Mathematics, Thinking and Learning, Vol.3 . Erlbaum Associates, USA.

Dávila, M. (1994). "Las fracciones: Un tema difícil de enseñar y difícil de aprender" (fragmentos) DIE-CINVESTAV-IPN. en: La matemática en la educación primaria (CAD) Capacitación y Actualización Docente Documento docente. Consejo Nacional de Fomento Educativo (PARE) México.

Freudenthal, H. (l983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrech Kluwer Academic Publishers.

Gálvez, G. (1994). Aprendiendo matemáticas con calculadora. Ministerio de Educación MECE. Ed. ARGE. Chile.

Goode, J. et al (1980). Métodos de investigación social. Ed. Trillas. México.

Hart, K, et al (l984) "Chelsea Diagnostic Mathematics Test Fractions 1 y 2 NFER-Nelson, Publishing Company. Gran Bretaña.

Hembree R. and Dessart D. (l992) "Research on calculators in mathematics education" in Calculators in Mathematics Education. National Council of Teachers of Mathematics Yearbook NCTM EUA.

Kieren, T. (l983) "Partitioning equivalence an the construction of rational number ideas" in Proceedings of the fourth international congress on mathematical educational Ed. Boston Birkhauser. Universidad de Alberta; Alberta, Cánada.

Kieren, T. (l988) "Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development" en Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Ed. Lawrence Erlbaum Associates NCTM.

Llinares, S et al (l997). Fracciones. La relación parte-todo. Ed. Síntesis S.A. Madrid, España.

Marcelo, C., (1995). "Desarrollo Profesional e Iniciación a la Enseñanza" Memoria de Investigación financiada por la Consejería y Ciencia de la Junta de Andalucía. Ed. PPU, S.A. España.

Miles M & Huberman (1984) Qualitative Data Análisis, a sourcebook of new methods. SAGE Publicaciones. London.

Nickson, M. (2000) "Teaching and Learning Mathematics" in A Teacher`s Guide to Recent Reasearch and its Application. Cassell, London New York.

Ornelas, C. (l995) El Sistema Educativo Mexicano. La Transición de Siglo. Fondo de Cultura Económica. México.

Saíz, I. (l985). "Uso de calculadoras en el aprendizaje matemático en la escuela imaria". Parte I en Informe final del proyecto: La computación en la escuela primaria. DIE-CINVESTAV-IPN. México.

Secretaría de Educación Pública (1993) Plan y programa de estudios Educación Básica.

Streefland, L. (1991) “Fractions en realistic Mathematics Education” en Mathematics Education Library Vol. 8 Ed. Board. Cambridge

Texas Instruments (1999) Innovaciones Educativas. Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias.

Valiente, S. et al (2001). La calculadora en la escuela primaria. Ed. Iberoamérica. México.

Wheatley G. and Shumway R. (l992) “The potencial for Calculators to Transform Elementary School Mathematics” in Calculators in Mathematics Education. National Council of Teachers of Mathematics Yearbook NCTM EUA

# ANEXO 1

**Secuencia de actividades**

**Primera sesión**

1. Presentación del investigador con los alumnos de segundo grado.
2. El investigador reparte las máquinas a cada uno de los alumnos.
3. Exploración de la máquina por parte de los alumnos.
4. Abrirla, encenderla.
5. Pensar, ¿Qué creen que sea?
6. Escuchar algunas de las respuestas de los niños a la pregunta planteada por el investigador e informar, por su parte, sobre las características de la calculadora gráfica:
7. Diversas funciones.
8. Lugar donde aparece lo que escribe.
9. Como obtener respuesta de la calculadora, al oprimir la tecla ENTER.
10. Necesidad de conocer su lenguaje para comunicarse con ella.
11. Realizar ejercicios como:
12. Sin usar la calculadora ¿Cuánto es 5+4?
13. Enseguida comprobar su respuesta en la calculadora.
14. Actividades similares: 8+4, 3+7, 9-2,.
15. Informar para que sirve la tecla de navegación (la tecla "gorda") que sube y baja el cursos hacia donde necesitamos que lo haga.
16. Indicar, por parte del investigador, cómo se puede limpiar la pantalla de la máquina al ejecutar la tecla F1 y el cursor hasta el No. 8 y oprimir dos veces ENTER. También se pueden borrar algunas de las operaciones realizadas con la tecla CLEAR y el cursor.
17. Reflexionar sobre las actividades que se realizaron con la calculadora, acerca de las operaciones básicas.
18. Hacer otros ejercicios similares dados por el investigador y otros inventados por ellos mismos.

19. Utilizar la tecla que tiene un rombo verde y la letra “W” para trabajar con el editor de ecuaciones observando que la pantalla de la calculadora sea igual a la que aparece en la televisión que tienen enfrente.
20. Escribir la ecuación que se indica x + 2 , oprimir la tecla ENTER y observar que pasa al teclear rombo verde y la letra “R” .
21. Realizar otras dos ecuaciones: x +3 y x + 4, estableciendo la relación existente entre estas y su representación gráfica.
22. Preguntar ¿qué va a pasar con x + 5?, realizar la actividad y verificarla en la gráfica.
23. Hacer la ecuación x + 7, saltándose al ecuación anterior, y revisando la gráfica que hace falta, para construir la ecuación.
24. Repetir la actividad de saltarse un número, indicando x + 9 y realizando el que falta.
25. Revisar la lista de ecuaciones para ver si corresponden a cada una de las líneas de la gráfica, así x + 1 corresponde a la primera línea y así sucesivamente.
26. Señalar que se ha podido observar que la línea vertical es un eje graduado con rayitas que corresponden a un número.
27. Indicar que se debe trazar una línea que cruce las líneas horizontal y vertical, buscar la ecuación que se debe construir para lograrlo (x + 0).
28. Explicar, por parte de algún alumno, la manera de solucionar el reto, en la calculadora del investigador.
29. Borrar todas las ecuaciones realizadas.
30. Señalar un punto (0, 8) y que los alumnos construyan la ecuación pertinente para que en la gráfica aparezca la línea que la representa.
31. Señalar un punto (0, -5) y construir la ecuación.
32. Realizar actividades similares: (0, -5).
33. Escribir la ecuación x – 9, y en la gráfica del investigador , señalar por donde creen que debe pasar la línea. Comprobar realizando la actividad.
34. Borrar todo lo realizado en la calculadora.
35. Realizar una reflexión sobre las actividades realizadas durante la sesión.

**Secuencia de actividades.**

**2ª. Sesión.**

1. Recapitulación de la sesión anterior.
2. Escribir en el editor de ecuaciones x + 2 y x + 3, revisando las gráficas.
3. Recordar la relación que existe entre la ecuación y la gráfica. Cuando se esta en el editor de gráficas, oprimir la función F4 para que se repitan las líneas de la gráfica.
4. Indicar que se necesita construir una línea que pase entre x + 2 y x + 3.
5. Propiciar que los alumnos lo discutan por equipos, el investigador debe intervenir si es necesario.
6. Permitir que los alumnos construyan sus propias hipótesis sobre cual debe ser la ecuación que resuelva el reto que estableció el investigador.
7. Analizar las ecuaciones, construidas por los alumnos, dentro del grupo, para verificar si se cumple con lo que se esta requiriendo, en caso de no ser así, el investigador abrirá la discusión en el grupo para tratar de resolver el reto.
8. Indicar como se representa la “mitad de uno” en el lenguaje de la calculadora ½.
9. Tomar en cuenta esta fracción para poder resolver el reto planteado, de tal manera que se utilice en la construcción de la ecuación x + 2 + ½ , que permite resolver el problema.
10. Realizar actividades similares, donde pongan en practica la fracción ½ , construir las ecuaciones que permitan que la línea pase en medio de: x + 8 y x + 9; x + 0 y x + 1.
11. Realizar la reflexión sobre estas actividades.

**Secuencia de actividades.**

**3ª. Sesión.**

1. Recapitulación de la sesión anterior.
2. Recordar la fracción vista, $\frac{1}{2}$ , y su utilidad en la construcción de ecuaciones, así como su vinculación de la misma en la vida cotidiana.
3. Resolver por parejas, cinco retos escritos. Los cinco retos que se les establecieron fueron los siguientes:
4. *¿Qué representa $\frac{1}{2}$ ?
5. * ¿Crees que $x + 1$ es igual a $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ? Si ó No ¿por qué?
   a. Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.
6. *Necesito una gráfica que pase por en medio de las ecuaciones $x + 4$ y $x + 5$. ¿Qué ecuación debo construir?. Compruébalo en la calculadora.
7. * Ahora quiero que mi gráfica pase por en medio de $x + 7$ y $x + 8$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.
8. ¿Crees que $x + 1+ \frac{1}{2}$ es igual a $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ? Si ó No. ¿por qué?
   a. Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.
9. Propiciar y facilitar la solución de los retos a partir de despejar la dudas de cada uno de los equipos por parte del investigador.
10. Explicar, cada uno de los equipos, al grupo como solucionó alguno de los retos planteados.
11. Realizar la reflexión sobre estas actividades

**Secuencia de actividades**

**4ª. Sesión.**

1. Recapitulación de la sesión anterior.
2. Recordar el uso de la fracción de ½ en la solución de retos y su relación con la vida cotidiana.
3. Realizar dos actividades en las que utilicen la fracción de ½ para resolverlas: Construir la ecuación que permita que la gráfica pase en medio de las siguientes ecuaciones: $x + 3$ y $x + 4$; $x + 1$ y $x + 2$.
4. Introducir la "mitad de la mitad" y su relación con un cuarto.
5. Representar esta fracción en la calculadora: "la mitad de la mitad" ½ ( ½ ) y un cuarto ¼ .
6. Comprobar que estas dos representaciones tienen el mismo valor.
7. Comprender el significado de "la mitad de la mitad" o un cuarto relacionándolo con su vida cotidiana.
8. Escribir ecuaciones utilizando esta fracción.
9. Realizar la reflexión de las actividades.

**Secuencia de actividades**

**5ª Sesión.**

1. Recapitulación de la sesión anterior.
2. Recordar el significado de “la mitad de la mitad” o un cuarto.
3. Resolver, de manera individual, cuatro retos escritos. Los retos fueron los siguientes:
   & ¿Qué representa ½ ( ½ ) ? Explícalo.
   & ¿Es igual ½ ( ½ ) que ¼ ? Si ó No y ¿por qué?
   a. Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
   & Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: x + ½ + ¼ + ½ ( ½ )
   b. ¿Por dónde paso la gráfica?
   c. ¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si ó No,
   d. escríbela.
   e. Compruébalo en la calculadora. Explica lo qué pasó.
   & ¿Crees que la ecuación x + ½ + ¼ es igual a x + ¾ ? Si ó No y por qué.
   f. Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
4. Llevar de la mano a los alumnos en la solución de los dos primeros retos.
5. Terminar de solucionar los retos planteados, siendo auxiliados en sus dudas por el investigador.
6. Realizar una reflexión de las actividades realizadas.

# ANEXO 2

# EVIDENCIAS

# TRABAJOS DE LOS ALUMNOS

13/02/02

# Resuelve los siguientes RETOS

1.- ¿Qué representa $1/2$? Explicalo.

la mitat de 1

2.- ¿Crees que $x+1$ es igual a $x+1/2+1/2$ Si ó No. ¿Por qué?

No sepue de

Compruebalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

que son iguales

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones $\boxed{x+4}$ y $\boxed{x+5}$ ¿Qué ecuación debo construir? Compruebalo en la calculadora.

$x+4+1/2$

Si se puede

4.- Ahora quiero que mi grafica pase por enmedio de $\boxed{x+7}$ y $\boxed{x+8}$ ¿Qué ecuación debo construir? Compruebalo en la calculadora.

Guillermo
Ariel

5.- ¿Crees que $x+1+\frac{1}{2}$ es igual a $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$? Si o No ¿Por qué?
NO

Compruebalo en la calculadora.
¿Qué pasó? Explica.
SI

Resolvió: Guillemo Cuebas Reyo
Ariel Belio sanchez

Resuelve los siguientes

RETOS

1.- ¿Qué representa $1/2$? Explícalo.

La mitad de una cosa

2.- ¿Crees que $\overline{x+1}$ es igual a $x+1/2+1/2$? Sí o No. ¿Por qué?

Si porque $X+2$

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

Es igual a lo mismo $X+1+1/2$

3.- Necesito una gráfica qué pase por enmedio de las ecuaciones $x+4$ y $x+5$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.

$X+4+1/2$

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de $x+7$ y $x+8$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.

$X+8-1/2$

5.- ¿Crees que $X+1+\frac{1}{2}$ es igual a $X+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$? Si ó No y ¿Por qué? Compruebalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

sí es lomismo porque lo hisimos en la calculadora y es lomismo

Resolvió:

Mariana Karen Calderon Ponce.

Ana Karen Alvarez Arredondo

Resuelve los siguientes

RETOS

1.- ¿Qué representa $\frac{1}{2}$? Explícalo.

La mitad de uno

2.- ¿Crees qué $\boxed{x+1}$ es igual a $\boxed{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$? Sí ó No. ¿Por qué?

No es igual

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

Se puso una raya en el número y sí es igual

3.- Necesito una gráfica qué pase por enmedio de las ecuaciones $\boxed{x+4}$ y $\boxed{x+5}$ ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.

$x+4+1/2$

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de $\boxed{x+7}$ y $\boxed{x+8}$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.

no pude hacerlo

$x+8-1/2$

5.- ¿Crees que $\boxed{x+1+1/2}$ es igual a $\boxed{x+1/2+1/2+1/2}$? Si ó No y ¿por qué? Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica. Complétalo

no es igual

Héctor

Resolvió: Héctor Enrique Pérez Bosórquez y Oscar Colva Rivera

# Resuelve los siguientes RETOS.

1.- ¿Qué representa $1/2$? Explicalo.

tengo 1 lápiz y de ~~la~~ lápiz sale un medio

2.- ¿Crees que $x+1$ es igual a $x+1/2+1/2$? Si ó No. ¿Por qué?

Si

Compruebalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica. Por que es un entero

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones $x+4$ y $x+5$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruebalo en la calculadora.

$x+4+1/2$

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de $x+7$ y $x+8$ ¿Qué ecuación debo construir? Compruebalo en la calculadora.

$x+7+1/2$

½

5.- ¿Crees que $x+1+½$ es igual a $x+½+½+½$ ? Si o No ¿Por qué?

si prov que un medio o ma un medio da uno y un medio da $x+1+½$

Compruebalo en la calculadora.

¿Qué pasó? Explica.

fueron igualeis las dos

Resolvio:

Beatriz Olguin Ceveriano

Nayeli Hernández Núñez

F

18/02/02

# Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explicalo.

un cuarto

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Sí ó No. y por qué.

Si es igual a lo mismo

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó. Si es sierto

3. Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica?

Por el numero 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No, escribela.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo qué pasó. x+1\4+1\4+1\4+1\4

Si

4. ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si o No y porqué.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó. Si x+1/2+1\4 = x+3\4

Resolvió: Ana [illegible]ahí Garcia Rueras

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Que representa $1/2$ $(1/2)$? Explicalo.

$1/30$

2.- ¿Es igual $1/2$ $(1/2)$ que $1/4$? Si ó No y porqué.

Si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

X+1/4 · X+1/2 (1/2) y salio igual

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x + 1/2 + 1/4 + 1/2 (1/2)$

número

¿Por dónde pasó la gráfica?

paso por 1 9 2

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No, escribela

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

X+1/4+1/4+1/4+1/4

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si o No. y porqué.

Si

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

salio igual por que pucimos diferentes operaciones y apareci igual

Resolvio: Nayeli Hernandez Nuñez

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explícalo.

Un cuarto.

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Sí ó No y porqué. ~~No~~ Sí es igual

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica?

Una

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí ó No, escríbela.

Sí $x+1$

Compruébalo en la calculadora. Explica.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Sí ó No y porqué.

Sí es igual

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

que si es igual.

Resolvio: Vanessa Jocelin Hernández Navarra

Resuelve las siguientes Retos.

1.- ¿Que representa $1/2\,(1/2)$? Explicalo.

Un cuarto

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Si ó No y porque. Si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

es cierto

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica?

Por el numero uno

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si ó No, escribela

$X+1$

Compruebalo en la calculadora. Explica.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Si o No y porqué.

Si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Resolvio: Oscar Calva Rivera

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$? Explícalo.
La mitad de la mitad

2.- ¿Es igual $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ que $\frac{1}{4}$? Sí ó No y porqué. Sí

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó. $x+1/4$, $x+1/2 \cdot 1/2$

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$
en el numero 10
¿Por dónde pasó la gráfica?
en el numero 1
¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí ó No, escríbela.
$x+2-1/2-1/2$.
Compruébalo en la calculadora. Explica lo qué pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ es igual a $x+\frac{3}{4}$? Sí o No y porqué. Sí

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó. es igual. Los dos pasan por el numero uno

Resolvió: Beatriz OLGuin Ceveriano

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\ (1/2)$? Explícalo.
la mitad de la mitad

2.- ¿Es igual $1/2\ (1/2)$ que $1/4$? Sí ó No y por qué. SI

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó. X+1/2-1/2
X+1/4

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2\ (1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica? 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí o No, escríbela.
X+2-2/2

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó. los dos son iguales

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Sí o No y por qué.
SI

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó. los dos son iguales

Resolvió: gabriela Joana Cabello Alvarez

Compruebalo en la calculadora
¿Qué pasó? Explica.
son iglales porque son lo mismo

Resolvió: Mariana Monserrat Villalobos Varela. Brenda Sarah Velazquez Olascoaga

21/02/02

Resuelve los siguientes RETOS.

1.- ¿Qué representa 1/2? Explícalo.

La mitad de uno

2.- ¿Crees que, X+1 es igual a X+1/2+1/2? Sí o ~~No~~ ¿Por qué?

porque creemos ~~que~~ ~~no~~ pasan por el mismo lado

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

pasan por el miso lado. porque son igüales

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones X+4 y X+5 ¿Qué ecuación debo construir?

X+5-1/2

Compruébalo en la calculadora.

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de X+7 y X+8 ¿Qué ecuación debo construir?

X+8-1/2

Compruébalo en la calculadora.

5.- ¿Crees que X+1+1/2 es igual a X+1/2+1/2+1/2? Sí ó No ¿Por qué?

SI

# Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explícalo.

Un cuarto

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Sí ó No. y porqué. Si es igual a lo mismo

Compruébalo en la calculadora. Explica lo qué pasó. Si es sierto

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:

$x + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica? Por el número 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí ó No, escríbela.

Si $x + 1/2 + 1/2$

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Sí o No y porqué.

Si $x + 1/2 + 1/4$ y si son iguales

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Resolvió: Ana Karen Alvarez Arredondo

Resuelve los siguientes
Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2$ $(1/2)$? Explicalo.
la mitad de 1 medio

2.- ¿Es igual $1/2$ $(1/2)$ que $1/4$? Si ó No. y por qué.
si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
se puso una raya en medio de X+31/X+2

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde pasó la gráfica? si por el nu
menos 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No, escribela.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
si se puede

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Si o No y porqué.
si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
si es igual

Resolvió: A[illegible]l Belio Sanchez

# Anexo 3

# EVIDENCIAS

# TRABAJOS DE ALUMNOS

# NO REGISTRADOS

Resuelve los siguientes
RETOS

1.- ¿Qué representa ½? Explícalo.
representa la mitad de uno.

2.- ¿Crees que $x+1$ es igual a $x+½+½$? Si o No. ¿Porqué?
si porque es el mismo medio.
Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.
si pasa por en medio,

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones $x+4$ y $x+5$ ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.
$x+4+1/2$ -

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de $x+7$ y $x+8$. ¿Qué ecuación debo construir? Compruébalo en la calculadora.
$x+7+1/2$

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explícalo.

UN CUARto

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Sí o No y por qué.

si es lo mismo

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Cuando salc 1 linea es lo mismo

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$.

¿Por dónde pasó la gráfica?

Por el uno

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí o No, escríbela.

Si $X+1$

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Sí o No y porque.

Si

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Si Salio pero ensimada

Resolvió: Madelein Monserrat de la Cruz Ramirez

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explicalo.

$1/4$ es la mitad de un $1/2$.

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Si ó No y porqué.

Si es igual.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

$x+1/4$ y $x+1/2 \cdot 1/2$ y salio igual

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$

¿Por dónde paso la gráfica?

paso por la 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si ó No, escribela.

$x + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$

Compruebalo en la calculadora. Explica.

porque las ecuaciones de ariba forman $2/2$ que es igual a 1 entero

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si ó No y porqué.

Si

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que paso.

salio igual porque. $x+1/2+1/4$ es lo mismo que $x+3/4$

Resolvio: Brenda Ortiz.

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Que representa $1/2$ $(1/2)$? Explicalo.

$1/30$

2.- ¿Es igual $1/2$ $(1/2)$ que $1/4$? Si ó No y porqué.

Si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

$X+1/4 \cdot X+1/2$ $(1/2)$ y salio igual

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2\ (1/2)$

numero

¿Por dónde pasó la gráfica?

paso por 192

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No, escribela.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

$X+1/4+1/4+1/4+1/4$

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Si o No. y porqué.

Si

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

salio igual por que pucimos diferentes operaciones y apareci igual

Resolvio: Nayeli Hernandez Nuñez

Resuelve los siguientes Retos.

1. ¿Qué representa $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$? Explícalo.

represente la mitad

2. ¿Es igual $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ que $\frac{1}{4}$? Sí o No. y por qué.

si es lomismo

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Porque son iguales

3. Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:

$x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})$.

¿Por dónde paso la gráfica?

Por el uno

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí ó No escríbela.

si $x+1+0$, $x+1$ $x+1/2+1/2$

$x+1/4+1/4+1/4+1/4$

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

todos aparecieron enel uno

4. ¿Crees que la ecuación $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ es igual a $x + \frac{3}{4}$?

Sí o No y por qué. si por son iguales

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

porque las dos pasamos por el mismo lugar

Resolvió: Paola Haydeé vacá Fav

Resuelva los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explícalo.
representa la mitad de la mitad.

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Si o No y porqué.
no

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
son iguales

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:
$x + 1/2 + 1/4 + 1/2(1/2)$
¿Por dónde paso la gráfica?
En la primer ralla
¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No escríbela.
si $x + 1$

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
si paso

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si o No y porqué.
no

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
si paso en el mismo lugar

Resolvió:
Jose Antonio Sanches romero

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explicalo.

representa la mitad de la la mitad.

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Si o No y porque.

no

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

son iguales

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:

$x + 1/2 + 1/4 + 1/2(1/2)$

¿Por dónde paso la gráfica?

en la primer ralla

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No escribela.

Si $X + 1$

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Si paso

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si o No y porqué.

no

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

si paso en el mismo lugar

Resolvió:

Jose Antonio Sanches romero

Resuelve los siguientes
RETOS. 21/02/02

1.- ¿Qué representa ½? Explícalo.

la mitad de uno.

2.- ¿Crees que $X+1$ es igual a $X+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$?
Sí o No ¿Por qué?

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

que si son iguales

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones $X+4$ y $X+5$ ¿Qué ecuación debo construir?

$x+5-\frac{1}{2}$

Compruébalo en la calculadora.

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de $X+7$ y $X+8$ ¿Qué ecuación debo construir?

$x+8-\frac{1}{2}$

Compruébalo en la calculadora.

5.- ¿Crees que $X+1+\frac{1}{2}$ es igual a $X+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$? Sí o No ¿Por qué?

Si

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $1/2 (1/2)$? Explicalo.

$1/4$ un cuarto

2.- ¿Es igual $1/2 (1/2)$ que $1/4$? Si o No y porqué.

Si es lo mismo

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Cuando sale una linea es lo mismo

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:

$x + 1/2 + 1/4 + 1/2 (1/2)$

¿Por dónde paso la gráfica?

Por el uno

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No. escribela.

No pero

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $x + 1/2 + 1/4$ es igual a $x + 3/4$? Si o No y porqué.

no

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Si paso en el mismo lugar

Resolvió: Brenda Itzel Bucio Sanabria

Resuelve los siguientes Retos:

1.- ¿Que representa $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$? Explicalo.

lamitad de la mitad

2.- ¿Es igual $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$ que $\frac{1}{4}$? Si o No y por que.

si es igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

se puso una raya En medio de x+3 yx+2

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$

número 1

¿Por donde pasó la gráfica?

numero 1

¿Podrias escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si ó No escribelo.

si se puede

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ es igual a $X + \frac{3}{4}$? Si o No. y porqué.

síes igual

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Resolvio: Héctor Enrique Pérez Bojorquez

Comprvebalo en la calculadora.
¿Qué pasó? Explica.
Si

Monica, Guadalupe rosales
Resolvió: este. Fani. ley. leon
avila

21/02/02

Resuelve los siguientes RETOS

1.- ¿Qué representa ½? Explícalo.

la mitad de uno.

2.- ¿Crees que X+1 es igual a X+½+½? Sí o No. ¿Por qué?

Sí

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

8 1/2 + H

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones X+4 y X+5 ¿Que ecuación debo construir?

X+1/2+H

Compruébalo en la calculadora.

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de X+7 y X+8 ¿Qué ecuación debo construir?

X+7+1/2

Compruébalo en la calculadora.

5.- ¿Crees que X+1+½ es igual a X+½+½+½? Sí ó No ¿Por qué?

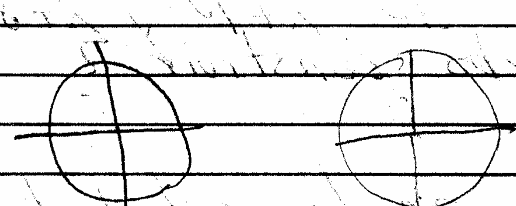
SI

Compruebalo en la calculadora ¿Qué pasó? Explica.

Resolvió: Gerardo Ayala Moreno

José Antonio Sanches Romero

Ayala



21/02/02

Resuelve los siguientes RETOS.

1.- ¿Qué representa ½? Explícalo.
la mitad de uno

2.- ¿Crees que X+1 es igual a X+½+½? Sí o No ¿Por qué?
Sí

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.
Sí

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones X+4 y X+5 ¿Qué ecuación debo construir?
x+4+1/2

Compruébalo en la calculadora.
lla lo comprobe y es x+4+1/2

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de X+7 y X+8 ¿Qué ecuación debo construir?
X+7+1/2

Compruébalo en la calculadora.
Ya la comprobe

5.- ¿Crees que $\boxed{X+1+½}$ es igual a $\boxed{X+½+½+½}$? Sí o No ¿Por qué?
~~Sí~~
no

Compruebalo en la calculadora.
¿Qué pasó? Explica.
si son iguales

Resolvió: Francisco Javier Cervantes Alonso

Jonatan Antonio Gonzales Hdez

21/02/02

Resuelve los siguientes RETOS.

1.- ¿Qué representa 1/2? Explícalo.

La mitad de uno

2.- ¿Crees que, X+1 es igual a X+1/2+1/2? Si o ~~No~~ ¿Por qué?

porque creemos ~~que~~ no pasan por el mismo lado

Compruébalo en la calculadora. ¿Qué pasó? Explica.

pasan por el miso lado. porque son igdales

3.- Necesito una gráfica que pase por enmedio de las ecuaciones X+4 y X+5 ¿Qué ecuación debo construir?

X+5-1/2

Compruébalo en la calculadora.

4.- Ahora quiero que mi gráfica pase por enmedio de X+7 y X+8 ¿Qué ecuación debo construir?

X+8-1/2

Compruébalo en la calculadora.

5.- ¿Crees que X+1+1/2 es igual a X+1/2+1/2+1/2? Si ó No ¿Porqué?

SI

26/02/02

Resuelva los siguientes Retos

1.- ¿Qué representa ½(½)? Explicalo.

lamitad dela mitadese conbie

2.- ¿Es igual ½(½) que ¼? Si ó No y porque.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
si son lo mismo

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:
$X + 1/2 + 1/4 + 1/2(1/2)$
¿Por dónde pasó la gráfica? por el 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No. escribela.
pos pa laotra valva y X + 1/2 + 1/2
X + 1
Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$?
Si o No y porqué. SI

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

si y lasiguiente ecuasion porlas des ecuasiones

Resolvió: Gerardo E Ayala Moreno

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa 1/2 (1/2)? Explícalo.

es un 1/4

2.- ¿Es igual 1/2 (1/2) que 1/4? Si o No y porque.

Si

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que paso

Si paso

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación.

$X + 1/2 + 1/4 + 1/2 (1/2)$

¿Por dónde paso la gráfica?

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No escribela.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$?
Si o No y porqué.

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Resolvió: Alan Rafael

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Que representa $1/2 (1/2)$? Explicalo.

1/4 un cuarto

2.- ¿Es igual $x+1/2 (1/2)$ que $x+1/4$? Si o No y porque.

Si es lo mismo es

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Cuando sale 1 linea es lo mismo

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $X + 1/2 + 1/4 + 1/2 (1/2)$ paso por el 1

¿Por dónde pasó la gráfica? paso por el 1

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No, escribela.

Si

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó. todos aparecieron + 1/2 + 1/2

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4$ es igual a $X + 3/4$? Si o No y porqué.

Si porque son iguales

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó. Porque las dos pasamos por el mismo lugar

Resolvió: Brenda Sarahi Velazquez

Resuelve los siguientes
Retos.

1.- ¿Qué representa ½(½)? Explícalo.

es un ¼

2.- ¿Es igual ½(½) que ¼? Sí ó No y porqué.

sí

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:

$X + ½ + ¼ + ½(½)$

¿Por dónde pasó la gráfica?

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí o No. escríbela.

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $X + ½ + ¼$ es igual a $X + ¾$? Sí ó No y porqué.

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Resolvio: Monica Guadalupe Rosales aKilo

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa 1/2 (1/2)? Explicalo.
un cuarto

2.- ¿Es igual 1/2 (1/2) que 1/4? Si o No y porque.
S1 Porque si sumo 2 más 2 me da y asi ember de pone dos veces 1/2 c 1/2 me da y abajo por eso
Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
Porqe cuando sumo 2 mas 2 me da y mire 1/4

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:
X + 1/2 + 1/4 + 1/2 (1/2).
¿Por dónde pasó la gráfica? 1

¿Podría escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No. escribela.
S1 x+1 = 1/2 + 1/2

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que paso.

4.- ¿Crees que la ecuación X + 1/2 + 1/4 es igual a X + 3/4? Si o No y porqué.
S1

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
las escribí y salieron encimadas

Resolvió: Jonatan Antoni Gonzales Hdez.

Resuelve los siguientes Retos.

1.- ¿Qué representa $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$? Explícalo.

UN CUARTo

2.- ¿Es igual $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ que $\frac{1}{4}$? Sí o No y por qué. si es lo mismo

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Cuando sale 1 linea es lo mismo

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación: $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})$.

¿Por dónde pasó la gráfica?

Por el uno

¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Sí o No, escríbela. Si X+1

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

4.- ¿Crees que la ecuación $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ es igual a $x + \frac{3}{4}$? Sí o No y porque. Si

Compruébalo en la calculadora. Explica lo que pasó.

Si Salio pero casimada

Resolvió: Madelein Monserrat de la Cruz Ramirez

Resuelve los siguientes
Retos

1.- ¿Qué representa $1/2\,(1/2)$? Explícalo.
repesetaolamitaal·de·lelamital

2.- ¿Es igual $1/2\,(1/2)$ que $1/4$? Si o No y porque.
son, igvales

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
enola·Cacuuladora.si

3.- Escribe en la calculadora la siguiente ecuación:
$X + 1/2 + 1/4 + 1/2\,(1/2)$
¿Por dónde pasó la gráfica?
en, la ·pilmer·ralla
¿Podrías escribir otra ecuación que pase por el mismo lugar? Si o No. escribela.
no

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
Soi son ygugles

4.- ¿Crees que la ecuación $X + 1/2 + 1/4 +$ e igual a $X + 3/4$? Si ó No. y porque.
no

Compruebalo en la calculadora. Explica lo que pasó.
Si·sovgvales

Resolvió: Estefani·Madona.ley.leon