



SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE POSGRADO
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

***Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la Geometría Tridimensional
en Sexto de Primaria: El Caso del Volumen de Prismas***

Tesis que para obtener el Grado de
Maestro en Desarrollo Educativo

Presenta

Mario Moctezuma Morales

Directora de Tesis:

Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

AGRADECIMIENTOS

Al Dios y a mis padres por la fortaleza que siempre he encontrado en ellos.

Al mi Hermano Eder Jesús Moctezuma Morales, joven de apenas 21 años con grandes aspiraciones a ser un buen profesional, quien fuera cruelmente asesinado en el 2012 a causa del crimen organizado que opera en el estado de Guerrero.

Al Conacyt por la beca que me otorgó durante los dos años que duró esta bonita experiencia.

Al la SEP por todas las facilidades que me dieron para poder cursar los cuatro semestres de esta maestría.

Al la Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres por haberme acompañado durante todo el tiempo de la elaboración de tesis.

Al la Dra. Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez por haberme apoyado en los grandes avances de la tesis que se lograron con mi estancia en la Universidad de Huelva España.

Al La Universidad de Huelva en España por haberme acogido durante mi estancia de intercambio estudiantil.

Al mis amigos y compañeros de la Maestría en desarrollo educativo: Erika Cecilia Ramírez Martínez, Evelin Valencia Mora, Miriam Milagros Garduño Carreño, Juan Manuel Robledo Rodríguez, Miguel Ángel Sánchez Álvarez, Nydia Caro Hernández Reséndiz, Tisbe Jaquelinne Solís Corona, Ana Belem Valencia Salazar y Zoraida Irene Trejo Uribe por haber aprendido muchas cosas de ellos.



Universidad
de Huelva



CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



Índice

	Pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	13
1.1. Antecedentes	16
1.1.1. Planes y programas 1993 y 2011: antecedentes curriculares	17
1.2. Estudios relacionados con la geometría tridimensional y con el volumen de prismas	27
1.3. Investigaciones sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, relacionadas con la enseñanza de la geometría en primaria	42
1.4. Pregunta y objetivos de investigación	43
2. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA Y LA GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL	45
2.1. Un breve recorrido histórico por el estudio de la geometría: algunas tensiones	45
2.2. Enseñanza de la geometría tridimensional en la Educación Primaria	49
2.2.1. El papel de la representación en la geometría y su incidencia en la resolución de problemas	50
2.2.2. Los cuerpos geométricos y sus elementos	52
2.2.3. Representaciones de los cuerpos geométricos: uso de proyecciones	53
2.3. Características-propiedades medibles y cuantificables de cuerpos geométricos	57
2.3.1. Los prismas, su área, su volumen y su tratamiento didáctico en	

el aula	59
2.4. Conocimiento matemático para la enseñanza	65
2.4.1. Subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza	67
3. METODOLOGÍA	72
3.1. Participantes en el estudio	73
3.2. Instrumentos para la recolección de datos	75
3.3. Análisis de los datos: descripción de categorías e indicadores	77
3.3.1.Cuál es la unidad de análisis, cómo se elige y selecciona	77
4. ANÁLISIS DE LA CLASE DE VOLUMEN DE PRISMAS DE TRES PROFESORAS DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	83
4.1. Análisis de la clase impartida por la profesora Consuelo sobre la enseñanza de volumen de prismas	88
4.1.1. Análisis de la clase impartida por la profesora Rosy sobre la enseñanza de volumen de prismas	100
4.1.2. Análisis de la clase de la profesora Laura sobre la enseñanza del volumen de prismas	122
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	165
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	179
ANEXOS	183

INTRODUCCIÓN

En el campo educativo la enseñanza de la geometría permea el currículo de toda la educación básica. En México, en educación primaria se pretende desarrollar conocimientos que permitan a los estudiantes ubicarse en relación con los objetos que le rodean, generar y comprender sistemas de referencia. De igual manera, desarrollar una forma de pensar en la que la argumentación sea el soporte de las propiedades que tienen algunos cuerpos geométricos. Los estudiantes en su entorno (escolar y cotidiano) identifican figuras planas y objetos tridimensionales, observan sus semejanzas y diferencias así como aquellas características susceptibles de ser medidas como por ejemplo, el área para figuras de dos dimensiones o el volumen para representaciones de tres dimensiones. Sin embargo, esta área de las matemáticas tiene poca relevancia dentro de la enseñanza pues se considera prioritario que los alumnos desarrollen más las habilidades numéricas que las espaciales y geométricas. ¿A qué se debe estas posturas? Esta es una de las inquietudes gestoras de esta tesis.

El conocimiento que tienen los profesores de educación primaria sobre la geometría tridimensional y que ponen en acción en sus clases, es una problemática que ha sido poco estudiada, como se mostrará en esta tesis. Ello es una muestra de la necesidad de contar con mayores evidencias empíricas que permitan identificar tanto conocimientos profesionales que se ponen en acción al momento de enseñar la geometría tridimensional como aquellos de los que frecuentemente carecen los profesores. Este es el foco de esta tesis.

El presente documento da cuenta del Conocimiento Matemático para la Enseñanza que tres profesoras de sexto grado ponen en juego durante una clase

de geometría tridimensional cuando enseñan a calcular el volumen de prismas a los estudiantes en dos escuelas del Distrito Federal. A continuación se describe brevemente la estructura de esta memoria:

El capítulo uno incluye una revisión de documentos curriculares e investigaciones vinculadas con el tema de esta tesis. El objetivo fue contextualizar la temática de esta investigación y así derivar las preguntas y objetivos abordados. La revisión curricular se enfocó en los libros de texto del plan 1993 y 2011 para identificar las lecciones que incluían la enseñanza de geometría tridimensional. En cuanto a las investigaciones se identificaron aquellas relacionadas con la geometría tridimensional así como con el Conocimiento Matemático para la enseñanza en la educación primaria, tanto a nivel nacional como internacional.

En el capítulo dos se clarifican aspectos conceptuales y teóricos. Se inicia con un breve recorrido histórico de la geometría tridimensional y sus implicaciones en su enseñanza. Posteriormente, se describen algunos aspectos que incluye la enseñanza de la geometría tridimensional en la educación primaria resaltando los aspectos vinculados con el volumen de prismas como son: el tratamiento tridimensional y unidimensional para calcular el volumen de prismas y diferentes representaciones de los prismas utilizadas en la resolución de problemas matemáticos que involucran el cálculo del volumen de prismas. En cuanto a lo teórico, se describe el marco que sirvió de análisis en esta tesis, esto es, el Conocimiento Matemático para la Enseñanza desde la propuesta de Ball et al (2008). Se ejemplificará cada uno de los subdominios que componen tanto al conocimiento del contenido como el conocimiento didáctico del contenido, con contenidos de geometría tridimensional.

El capítulo tres da cuenta de la metodología empleada en esta investigación. Aquí se describe a las participantes en este estudio (las profesoras Consuelo, Rosy y Laura); el proceso de recolección y el análisis de los datos. Se finaliza este capítulo con la presentación de las categorías de análisis y los indicadores específicos que se utilizaron para el análisis de las clases de las tres profesoras participantes.

En el capítulo cuatro se presenta un análisis detallado del Conocimiento Matemático para la Enseñanza identificado en cada una de las tres profesoras participantes. Los resultados revelan conocimientos que al parecer poseen las profesoras y sus carencias manifestados al momento de impartir las clases observadas. En el análisis se discuten dichas manifestaciones de conocimiento en cada uno de los subdominios propuestos por Ball y sus colaboradores.

Para finalizar este documento, se presentan los principales hallazgos de esta tesis vinculados con el Conocimiento Matemático para la Enseñanza identificado en las tres profesoras participantes. Como cierre del capítulo, se esbozan algunas recomendaciones para la formación docente y para próximas investigaciones.

1. PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Las matemáticas son una disciplina universal y su enseñanza se encuentra en los sistemas educativos de todos los países del mundo pues son parte del patrimonio cultural que todas las sociedades transmiten a sus generaciones jóvenes (Rico, 2001: 38).

La geometría ha formado parte importante en el desarrollo del razonamiento matemático. Varios autores como Cattaneo (2010), Serrano y Cañizares (2001) coinciden en ubicar el origen de esta área de las matemáticas un poco antes que la escritura, como resultado de resolver problemas relacionados con la medición y posteriormente, como una necesidad de sistematizar los conocimientos empíricos.

En el campo educativo la enseñanza de la geometría permea el currículo de toda la educación básica. En México, en educación primaria se pretende desarrollar conocimientos que permitan a los estudiantes ubicarse en relación con los objetos que le rodean, generar y comprender sistemas de referencia. De igual manera, desarrollar una forma de pensar en la que la argumentación sea el soporte de las propiedades que tienen algunos cuerpos geométricos. Los estudiantes en su entorno (escolar y cotidiano) identifican figuras planas y objetos tridimensionales, observan sus semejanzas y diferencias así como aquellas características susceptibles de ser medidas como por ejemplo, el área para figuras de dos dimensiones o el volumen para representaciones de tres dimensiones.

La geometría posibilita en los educandos el estudio de las figuras del espacio y sus relaciones, de esta manera, el espacio geométrico es construido a partir de la

exploración empírica que parte de un espacio real y éste a su vez es llevado hacia una abstracción geométrica (Cattaneo, et al, 2010). Es decir, construyen el concepto de figura geométrica a través del estudio de las formas en el cual reconocen sus características, sus propiedades y las reproducen para poderlas clasificar en:

- Figuras tridimensionales (figuras del espacio)
- Figuras bidimensionales (figuras del plano)
- Figuras unidimensionales (figuras de la recta)

En este proceso el profesor pone en acción diferentes conocimientos, entre ellos, lo que en la investigación se conoce como *conocimiento matemático para la enseñanza* y que es el foco de análisis de esta tesis, en particular, lo que corresponde a uno de los temas de la geometría tridimensional: el volumen de prismas.

En la actualidad, la educación básica propone que los niños y adolescentes “desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos” (SEP, 2011: 61). Dicho de otro modo, el alumno al egresar de la educación básica, podrá resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática y validar procedimientos y resultados. Los resultados en la prueba Enlace 2012 (véase http://enlace.sep.gob.mx/ba/informes_para_impresion), reflejan bajo desempeño de los estudiantes en contenidos relacionados con la geometría tridimensional respecto al caso del volumen de prismas. Cabe hacer la pregunta, ¿cómo se está enseñando este contenido?

Los profesores de educación primaria por su parte, tienen la responsabilidad de guiar a los estudiantes hacia los aprendizajes esperados señalados en el programa de estudios en vigor. Entonces, sería congruente suponer que los profesores, respondiendo a lo planteado en los planes y programas correspondientes a la reforma educativa actual (SEP, 2011), desarrollan su

enseñanza para lograr los aprendizajes esperados relacionados con el contenido “volumen de prismas” y evalúan los avances que los estudiantes van alcanzando a lo largo de cada ciclo escolar. Desafortunadamente, por la experiencia de quien suscribe esta tesis, los resultados obtenidos en las aulas (y en las evaluaciones nacionales) no necesariamente generan una reflexión sobre la propia práctica docente para identificar aspectos que requieren mejora, por ejemplo, cambios en estrategias de enseñanza, necesidades formativas para la profundización en el conocimiento del contenido que se enseña y su didáctica.

Sin embargo, si volteamos la mirada hacia la formación del maestro en educación primaria, hay evidencias que señalan ciertas carencias. Al revisar el programa de formación de Licenciatura en Educación Primaria de las Escuelas Normales se evidencia que la mayoría de los maestros de primaria tuvieron una formación inicial en didáctica de las matemáticas de sólo dos semestres. Las asignaturas que así lo revelan son: Matemáticas y su Enseñanza I y II contenidas en el Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales (SEP, 1997). El desarrollo de las asignaturas contempla prácticas en una escuela primaria. Este tipo de prácticas, según lo hasta ahora revisado para esta tesis, sólo la realizan aquellos profesores que fueron formados en las Escuelas Normales del país, a diferencia de los que estudiaron alguna otra licenciatura y hoy se desempeñan en la docencia. Cabe señalar que para ejercer como docente de educación primaria frente a grupo los requisitos son: aprobar el examen de oposición y tener una licenciatura afín en el área de la educación y no necesariamente haber obtenido el grado en una Escuela Normal. Por esta razón, hay una gran variedad de perfiles de formación inicial.

Otra parte de la formación de los docentes en didáctica de las matemáticas se ha dado cuando por interés propio el docente ingresa a los cursos de actualización docente respecto a las matemáticas que ofrecen los Centros de Maestros en horarios sabatinos o inter semanales. Por motivos de tiempo, además de que no es el interés de este proyecto, dicho análisis no se realizó.

Partiendo de lo antes mencionado y como se mostrará en el siguiente apartado, la problemática está relacionada precisamente con la falta de información sobre la realidad de las aulas que dé cuenta del conocimiento matemático para la enseñanza de profesores vinculado con la geometría tridimensional en primaria. Con esta información, se pueden identificar necesidades de formación reales de los propios profesores. Este será el aporte de esta tesis.

1.1. ANTECEDENTES

La enseñanza de la geometría del espacio o geometría tridimensional se plantea desde los programas de estudio de educación básica en el estándar curricular *Espacio, forma y medida* para ser abordada con el apoyo de los libros de texto. Ésta es una de las herramientas generales para trabajar los contenidos de enseñanza que contiene el programa de estudios.

Esta sección de la tesis se ha dividido en tres apartados:

1. Los elementos curriculares, donde se hace un breve análisis de los temas y contenidos que se abordan a lo largo de la educación primaria en la asignatura de Matemáticas tanto del Plan 1993 como del 2011. De manera específica se hace énfasis en el *eje temático* de la geometría del plan 93 que es un plan recientemente sustituido por el plan 2011. A la par, se analiza el estándar curricular *Espacio, forma y medida* que contiene los contenidos y temas de geometría del plan 2011 “Reforma integral para la educación básica” (RIEB). En este análisis se pretende ilustrar la estructura propuesta para la enseñanza de la geometría en general y del estudio de los objetos tridimensionales y sus características, en particular.
2. Algunos estudios relacionados con la geometría tridimensional a nivel nacional e internacional.
3. Algunas investigaciones sobre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza, relacionadas con la geometría en primaria.

1.1.1. Planes y programas 1993 y 2011: Antecedentes curriculares

Los profesores con al menos, 5 años de experiencia en dicho sistema, han tenido que pasar por esta transición de un plan y programas de educación 1993 que trabajaba por ejes temáticos y agrupaba una lista de contenidos de aprendizaje, a un programa de estudio 2011 que propone el trabajo por estándares curriculares con aprendizajes que se espera logren los estudiantes al término de cada nivel educativo. Dado que el conocimiento de estos documentos es necesario para la labor docente, en esta tesis se presenta una breve descripción de los mismos centrando la atención en el tema de la tesis: geometría tridimensional.

Descripción del Plan y programas de Matemáticas de la Reforma de 1993

Los materiales que conformaban el plan y programas 1993 de Educación Primaria contenían, por cada grado: un Avance programático, un fichero de actividades didácticas, un libro para el maestro y un libro de texto para el alumno. La mayoría de los contenidos matemáticos abordados en el libro de texto eran apoyados por una ficha didáctica. El avance programático, por su parte, marcaba de manera específica los contenidos a trabajar en cada uno de los bloques, mencionando la(s) página(s) del libro del alumno y la respectiva ficha didáctica con la cual reforzar el contenido de enseñanza. Del mismo modo, al inicio de cada bloque se mencionaban los propósitos de enseñanza para cada uno de los seis ejes en que estaba estructurada la asignatura de Matemáticas.

Los ejes temáticos en el plan y programas 1993 (SEP, 1993: 50) eran:

- Los números, sus relaciones y sus operaciones
- Medición
- Geometría
- Procesos de cambio
- Tratamiento de la información
- La predicción y el azar.

Los aspectos vinculados con la geometría tridimensional se incluía tanto en el eje de geometría con en medición, con los siguientes contenidos:

- ✓ Construcción y armado de patrones de cubos y prismas. (SEP, 1993: 64)
- ✓ Construcción y armado de patrones de prismas, cilindros y pirámides. (ibid).
- ✓ Cálculo del área total de prismas y pirámides. (ibid).
- ✓ Cálculo del volumen de prismas. (ibid).

Al revisar los planes y programas de todos los seis grados de primaria, se logró identificar la relación entre las lecciones de geometría y en particular, aquellas que abordan cuestiones de lo tridimensional (ver síntesis en el Anexo 1).¹

Para el caso del primer grado hay 128 lecciones, 31 lecciones trabajan con la geometría, de las cuales 2 están relacionadas con localización de puntos o lugares en el plano, 2 se dedican al trabajo de lateralidad y 2 se relacionan con objetos tridimensionales. En estas 6 lecciones, hay ausencia de manipulación de objetos tridimensionales, en cambio, sí se hace notar frecuentemente el trabajo de armado de rompecabezas, figuras bidimensionales y recortes de patrones para formar figuras planas, especialmente con las figuras del tangram.

En segundo grado, de las 117 lecciones que se trabajan, sólo 35 abordan la geometría en general, y de éstas, 2 lecciones trabajan la localización de puntos en el plano, 2 lecciones trabajan la lateralidad y 4 abordan el trabajo con objetos tridimensionales. En este grado sólo dos lecciones ponen de manifiesto la manipulación de objetos tridimensionales y una lección aborda el trabajo con patrones para construir prismas. En este grado, se observa más trabajo de armado de figuras planas con recortes de patrones y reproducción de figuras en retículas.

¹ Por la forma en que están estructurados en este plan de estudios los ejes temáticos de Matemáticas para toda la educación primaria, preciso en afirmar que solamente se tomó el eje de Geometría para hacer este análisis, debido a que la medida se trabaja en otro eje temático que el programa 1993 especifica como medición.

Para el tercer grado, de 89 lecciones que tiene el libro 19 están dedicadas a la geometría. De éstas 3 lecciones abordan el trabajo de localización de puntos en un plano, 1 lección trabaja la lateralidad y 2 lecciones abordan el trabajo con objetos tridimensionales. En este grado, se identifica el uso del cubo como unidad de medida haciendo uso del decímetro cúbico para medir capacidades de cubos y prismas y establece relaciones del litro y algunos submúltiplos como $\frac{1}{2}$ l y $\frac{1}{4}$ l. De las 13 lecciones restantes se trabaja la reproducción de figuras, identificación de los ejes de simetría en las figuras simétricas, trazo de algunos triángulos y cuadriláteros y perímetro de polígonos irregulares.

En cuarto grado se trabajan 91 lecciones de las cuales 25 corresponden al estudio de la geometría. De ellas, 5 lecciones están enfocadas al trabajo de localización de lugares en un plano y 5 están destinadas al trabajo con objetos tridimensionales. Como vemos, de 25 lecciones, sólo 10 están abordando la geometría tridimensional de entre las cuales 2 lecciones trabajan el armado de pirámides, prismas y cubos para manipular poliedros y hacer notar sus características. En las 15 lecciones restantes se trabajan figuras simétricas, trazo de figuras geométricas como triángulos y cuadriláteros, cálculo de perímetros y áreas de superficies triangulares y rectangulares.

El libro de quinto grado tiene 85 lecciones de las cuales 25 trabajan la geometría. De estas 25 lecciones, 2 trabajan la ubicación de puntos en el plano con coordenadas y 6 lecciones realizan trabajos con objetos tridimensionales como son cubos, prismas y pirámides; se inicia a los estudiantes en el cálculo de volumen del cubo, prismas y pirámides triangular y cuadrangular tomando como unidades de medida de volumen el cm^3 y el dm^3 . En las otras 15 lecciones se hacen cálculos de perímetro y área de figuras como el rombo, triángulos, polígonos regulares y polígonos irregulares, trazo de trapecios, transformación de un polígono regular a un trapecio y se identifican también las características del círculo.

En sexto grado se trabajan 87 lecciones, de las cuales 29 están destinadas a la geometría. 6 de las cuales abordan la ubicación de puntos en un plano y 6 el

trabajo con objetos tridimensionales como los prismas y pirámides triangular, cuadrangular, pentagonal y hexagonal. También se abordan características medibles de algunos objetos para el volumen usando el cubo, el cm^3 , dm^3 y el m^3 . Las otras 17 lecciones abordan el trabajo con polígonos regulares, polígonos irregulares, cuadriláteros y triángulos.

En esta descripción se puede notar que la enseñanza está centrada en tres grandes temas, notándose mayor énfasis en el segundo:

- Ubicación espacial
- Algunas figuras planas y sus características
- Algunos cuerpos geométricos y sus características

Se identifica que los temas se van desarrollando de manera independiente en las lecciones, pues en cada bloque de lecciones se abordan temas de los seis ejes en los que se subdividen los contenidos de matemáticas. Con lo anterior no se afirma que los diseñadores del currículo consideraron desarticulados todos los contenidos del grado o de los contenidos geométricos específicos, pero así se perciben desde los propios libros de texto.

Descripción del Plan y programas de Matemáticas de la Reforma Integral de Educación Básica de 2011

El programa de estudios 2011 se compone por tres niveles escolares. A la Educación Primaria le corresponden parte del primer nivel y el segundo nivel. Sus materiales son seis programas de estudio y seis guías para el maestro, una por grado respectivamente y un libro para el alumno por grado.

Cada programa de estudio contiene los estándares curriculares correspondientes a cada una de las asignaturas a trabajar en cada grado, un enfoque didáctico para cada una de las asignaturas, las competencias a desarrollar durante la Educación Básica y la organización de los aprendizajes esperados en cinco bloques para cada asignatura.

La guía para el maestro menciona los cuatro campos de formación para la Educación Básica y sus finalidades que son: Lenguaje y comunicación, Pensamiento matemático, Exploración y comprensión del mundo natural y social, Desarrollo personal y para la convivencia; en la guía se hace mención también de un enfoque de competencias para la vida y se dan orientaciones pedagógicas y didácticas para la Educación básica a saber: planificación de la práctica docente, ambientes de aprendizaje, modalidades de trabajo, trabajo colaborativo, uso de materiales y recursos educativos.

Mediante la revisión de los documentos mencionados en los apartados anteriores, se identificó incongruencia entre los aprendizajes esperados que marca el programa de estudio 2011 y las lecciones del libro de texto. Esta incoherencia, puede impedir al docente (desde mi propia reflexión y mi experiencia) llevar una secuencia en el trabajo realizado con sus alumnos al tratar de cumplir con lo establecido en el programa de estudios y lo planteado en el libro de texto.

En las seis guías para el maestro, dentro del apartado orientaciones pedagógicas y didácticas, se ejemplifica el trabajo de los aprendizajes esperados que tienen relación con dos de los estándares curriculares como se da a conocer en la siguiente tabla, en la que se recupera únicamente lo vinculado con el tema de esta tesis.

Grado	Estándar curricular	Tema	Competencias matemáticas
1°	Forma, espacio y medida	Objetos unidimensionales y bidimensionales y personas.	Resolver problemas basados en transformaciones geométricas básicas, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente.
2°		Figuras bidimensionales	Resolver problemas basados en transformaciones geométricas básicas, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente

Tabla 1.1. Descripción de temas ejemplificados de la asignatura de matemáticas en la guía para el maestro, según la RIEB

De la tabla anterior se puede identificar que sólo se mencionan dos temas relacionados con el estándar curricular *espacio forma y medida* (en los primeros grados, los demás se vinculan con otros ejes) pero ninguno se relaciona explícitamente con la geometría tridimensional.

El programa de estudios 2011 (SEP, 2011:63) menciona cuatro estándares curriculares que abarcan los aprendizajes que se espera los alumnos logren en su alfabetización matemática y se organizan de la siguiente manera:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
2. Forma, espacio y medida
3. Manejo de la información
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

En este programa se identifican temas vinculados con la geometría tridimensional. A continuación se mencionan brevemente en la tabla 1.2.

Grado	Cantidad de lecciones de Geometría	Temas abordados	Cantidad de lecciones de Geometría Tridimensional
Primero	3 de 23 13.04 %	Ubicación espacial: lateralidad, Figuras: identificación de patrones en teselaciones, orden de longitudes, medición de longitudes.	0
Segundo	11 De 47 23.40 %	Ubicación espacial: representación de puntos y desplazamiento en un plano; sistema de referencia, se ubica en relación con el entorno; ubica objetos o seres con respecto a su propio cuerpo. Figuras: orden de longitudes; medición de longitudes; cálculo de áreas con unidades cuadradas; características de los cuerpos que se desplazan o no cuando se colocan en un plano horizontal o inclinado; Cuerpos Geométricos: análisis de la relación peso – volumen; Representación e identificación de cuerpos por medio de la forma de sus caras o descripciones orales; descripción de las caras de	8.51 %

		una caja; Estimaciones de capacidad.	
--	--	--------------------------------------	--

Grado	Cantidad de lecciones de Geometría	Temas abordados	Cantidad de lecciones de Geometría Tridimensional
Tercero	16 de 52 30.76 %	<p>Ubicación Espacial: representación y descubrimiento de recorridos en lugares conocidos; reproducción de figuras en una cuadrícula; descripción e interpretación de la ubicación espacial de objetos relacionados entre sí o con otros; Identificación de puntos cardinales en un lugar conocido; ubicación de objetos en el espacio; ubicación de objetos sobre una cuadrícula.</p> <p>Figuras: Comparación y orden de longitudes; Estimación y verificación de longitudes con la regla; comparación de superficies con unidades de medida no usuales; áreas de superficies; perímetros de figuras; descripción e identificación de figuras planas; Identificación de propiedades y ejes de simetría de una figura; identificación de ángulos en cambios de dirección; trazo de segmentos congruentes a uno dado; relación entre unidades de medida de longitud no usuales; Características de los polígonos.</p> <p>Cuerpos geométricos: Construcción de cuerpos geométricos; clasificación de propiedades de cuerpos geométricos; Representación de cuerpos geométricos; Características de los cuerpos geométricos; Trazo de cuerpos geométricos; Distinción entre una figura geométrica y un cuerpo geométrico; Medidas de capacidad.</p>	4 7.69 %
Cuarto	15 De 51 29.41% lecciones	<p>Ubicación Espacial: ubicación de lugares en un plano.</p> <p>Figuras: trazo de ángulos obtuso, recto y agudo; características de polígonos regulares; triángulos equilátero, isósceles y escaleno; rectas paralelas, perpendiculares y secantes; perímetro y área de polígonos; área de superficies en m^2, dm^2 y m^2.</p> <p>Cuerpos geométricos: Características de los</p>	4 7.69 %

		cuerpos geométricos; formas de las caras de un prisma vistas en una plantilla.	
--	--	--	--

Grado	Cantidad de lecciones de Geometría	Temas abordados	Cantidad de lecciones de Geometría Tridimensional
Quinto	17 De 51 33.33% 18	<p>Ubicación Espacial: localización de lugares en un plano; ubicación de lugares en un mapa; ubicación de objetos en una cuadrícula haciendo uso de coordenadas de forma no convencional.</p> <p>Figuras: Cálculo de perímetros y áreas de una figura; construcción de teselados con diversas figuras; perímetro de polígonos; área del paralelogramo; área de figuras que resultan de la combinación de otras; área de una hectárea en diferentes representaciones; uso de triángulos equilátero, escaleno e isósceles; uso del trapecio isósceles, rectángulo y cuadrado; trazo de triángulos; composición y descomposición de figuras planas, analizando el perímetro de una figura; alturas de triángulos.</p> <p>Cuerpos Geométricos: construcción, armado y representación de cuerpos geométricos para analizar sus propiedades; clasificación de prismas y pirámides; identificación y comparación de volúmenes.</p>	3 5.88%
Sexto	12 de 46 26.08% 13	<p>Ubicación espacial: ubicación de puntos y descripción de rutas en un mapa; uso de coordenadas no convencionales en el primer cuadrante.</p> <p>Figuras: duplicación de áreas en rectángulos; clasificación de cuadriláteros; la circunferencia y sus elementos; tipos de rectas y ángulos; trazo de polígonos regulares inscritos en una circunferencia.</p> <p>Cuerpos geométricos: área de prismas y pirámides; construcción y características de prismas; cálculo de volumen de prismas rectos; deducción de equivalencias entre unidades de volumen y capacidad para líquidos.</p>	5 10.86%

Tabla 1.2. Relación de temas de geometría por grado escolar, según la RIEB, 2011

En la descripción anterior se puede notar que la enseñanza de la geometría sigue organizada en los tres grandes grupos, notándose nuevamente mayor énfasis en el segundo grupo:

- Ubicación espacial
- Algunas figuras planas y sus características
- Algunos cuerpos geométricos y sus características

En cuanto a la cantidad de lecciones se observa una diferencia de número pero no de porcentaje, debido a que en la reforma del plan 93 tan solo en la materia de matemáticas a lo largo de los seis grados se abarcaban 597 lecciones. De este total, 164 correspondían al eje de geometría el cual representaba el 27.47%. De las lecciones de geometría, 51 abordaban geometría tridimensional con lo que se abarcaba un 8.54% del total de lecciones para matemáticas durante los seis grados de educación primaria. En la reforma 2011 hay una reducción casi de la mitad en la cantidad de lecciones de matemáticas, son 270 lecciones, de las cuales 70 están destinadas al tratamiento de la geometría que corresponde al 27.40 % de total de las lecciones para la educación primaria. A su vez, 20 de estas 74 lecciones corresponden al trabajo de geometría tridimensional, constituyendo un 7.40 % del total de las lecciones que se trabajan en los seis grados de la primaria.

Con este somero análisis se puede decir que la cantidad de lecciones del plan 93 al plan 2011 disminuyó un 54.78 %, las lecciones de Geometría disminuyeron un 54.88 % y las lecciones de Geometría tridimensional disminuyeron el 60.79 %. Sin embargo, se sigue manteniendo la relación de lecciones de geometría tridimensional respecto a las de geometría en general.

En el plan 2011, en primer grado no se incluyen temas que correspondan al uso de cuerpos geométricos a diferencia del plan 93 que son objeto de estudio durante los seis grados. En cuanto al desarrollo de los temas de geometría

aparentemente, en su mayoría, es independiente de una lección a otra. Por ejemplo, en sexto grado, bloque 3, en la lección 41 se trabaja el tema volumen de prismas, en la lección 40 se trabaja el tema de ubicación espacial en croquis y planos, y en la lección 42 se trata de problemas de proporcionalidad con números enteros o fraccionarios. Esta falta de secuenciación en las temáticas, si bien al parecer resuelve el problema de que los temas de geometría no se aborden en la enseñanza, parece que los docentes desconocen cuál es el impacto para el aprendizaje cuando además dejan al final los temas de geometría tridimensional basándose en la creencia de que enseñar matemáticas, es aritmetizar a los estudiantes.

En esta reforma educativa, se identifican pequeñas agrupaciones para relacionar contenidos geométricos presentándose lecciones aglutinadas de manera consecutiva dentro del mismo bloque de temas. Por ejemplo para quinto grado, las lecciones 40, 41 y 42 abordan diferentes temas de geometría, mientras que la lección 42 trabaja el desarrollo plano de prismas, así como características de prismas y pirámides; la lección 41 aborda el tema de ubicación espacial con un ejercicio que emplea la localización de cuerpos geométricos en un plano y la lección 42 trabaja el tema de volumen de prismas. En sexto grado, sí se identifica esta organización secuenciada de temas, por ejemplo en la lección 15 se trabaja el tema de áreas de prismas y pirámides; la lección 16 trabaja el tema construcción de prismas y pirámides y la lección 17 el tema volumen de prismas.

La revisión de ambos planes de estudio (1993 y 2011), ha sido de suma importancia para esta investigación debido a que como profesor se requiere conocer el currículum de las materias que se enseñan, su organización y secuencia. Este conocimiento es necesario cada vez que se presenta una nueva reforma educativa, pues permite identificar los contenidos que permanecen sin cambios, aquéllos que fueron eliminados, los nuevos contenidos agregados así como las modificaciones realizadas a los contenidos. Este acercamiento a las nuevas propuestas, la comprensión de los libros de texto y las lecciones que allí

se proponen, permite hacer ajustes pertinentes para el contexto educativo en el que se desempeñe la docencia.

1.2. Estudios relacionados con la geometría tridimensional y con el volumen de prismas

Los estudios relacionados con la geometría tridimensional y en particular, con el volumen de prismas, que se han logrado identificar en la revisión de la literatura a la fecha han sido pocos. Algunos de ellos se centran en el análisis de los recursos que se utilizan para la enseñanza de este contenido, otros en su aprendizaje y la mayoría, en su enseñanza. A continuación se hará una breve descripción de cada uno de estos estudios.

En cuanto a los usos de recursos

En este rubro se encuentran varios estudios en los que se identifican el uso de libros de texto, de materiales didácticos y de recursos digitales.

En cuanto al análisis de libro de textos, se identifica el estudio de Carrizosa, (2007). Ella utilizó dos libros de texto diferentes para la enseñanza del concepto de medición del volumen. La autora se propuso constatar si había o no diferencias en el aprendizaje de los estudiantes al utilizar el libro gratuito de la SEP y el libro de la editorial privada Santillana en dos grupos de sexto grado de primaria.

El contenido elegido fue el de medición de volumen, según esta autora, por tres razones fundamentales:

1. Es un tema incluido en los libros de texto elegidos, y en cada libro se le dedican cinco lecciones.
2. Alumnos y maestros aseguran que las lecciones de medición del libro de sexto grado de primaria de la SEP son de difícil comprensión además de que los profesores las encuentran difíciles de enseñar (Santos et al., 2006 citado por Carrizosa).
3. Investigadores como Freudenthal (1993), Rico y Vergnaud (1983) reportan como un tema de difícil comprensión.

Carrizoza considera que analizar los libros de texto es relevante para la Educación Matemática y para ello retoma las palabras de Amit y Freíd (2002, citado por Carrizoza, 2007: 6) quienes “consideran a los libros de texto comunicadores de las reformas y propuestas educativas, así como del currículum oficial”. También retoma a Farrell y Heineman (1989) dado que considera que

...los textos tienen poco efecto si los maestros no son entrenados para usarlos. Indican que el uso del libro de texto es determinado en buena medida por el manejo que el profesor da al texto, tanto en el seguimiento que hace de su material como en la manera en la que cubre sus contenidos.

Al referirse a los libros de texto en México, la autora comenta que la importancia que tienen es que son gratuitos y obligatorios.

En cuanto al concepto del volumen la investigadora retoma a diferentes autores, como por ejemplo, Freudenthal (1993) en el sentido de

...el volumen está menos expuesto a un empobrecimiento fenomenológico que el área, y en parte lo atribuye al doble aspecto de capacidad y volumen. La relación entre capacidad y volumen es complicada y se puede mostrar a través del efecto de empaquetar y meter.

Al momento de hacer mediciones para calcular el volumen intervienen dos procesos: unidimensionales y tridimensionales. El primero implica medir volúmenes con centímetros cúbicos. El segundo proceso se basa en medir a través de información acerca de otras magnitudes como longitudes y áreas. (Carrizoza, 2007)

Este estudio se validó mediante dos evaluaciones: Una exploratoria inicial para diagnosticar el nivel de comprensión de los estudiantes con respecto al concepto de volumen y su medición. Y una prueba final para evaluar el impacto de las sesiones de enseñanza. En la toma de datos, Carrizoza trabajó de manera simultánea con dos grupos diferentes. En cada grupo se utilizó un libro de diferente editorial (SEP y Santillana) y abordó las cinco lecciones propuestas en cada uno de ellos.

Los resultados de esta investigación dan cuenta de que sí hubo diferencias en el aprendizaje y en ambos grupos hubo mejorías. En su análisis, Carrizosa destaca las diferencias en cuanto a la propuesta pedagógica de ambos textos. En particular, señala que el libro de Santillana pone énfasis en las habilidades para operar o calcular, aplicadas en la resolución de problemas. Mientras que la SEP se encuentra interesada en que los estudiantes discutan, argumenten y construyan sus herramientas matemáticas.

Otro aspecto identificado en la literatura revisada está vinculado con el uso de tecnología digital para la enseñanza de la geometría tridimensional en la escuela primaria. En esta línea está el trabajo de Andrade (2009). Quien realiza un taller distribuido en siete sesiones en el que vincula temas de geometría tridimensional con el programa educativo Enciclomedia y el software Cabri. Los participantes en este taller son 12 docentes de quinto y sexto grado de cuatro escuelas del Estado de México.

Sus conclusiones manifiestan que el programa educativo Enciclomedia es una herramienta útil para la enseñanza de la geometría tridimensional aunque insuficiente. Cabe señalar que en el estudio de Andrade no se logra identificar cómo usan los profesores los recursos de Enciclomedia y a cuáles se hace referencia, pues Enciclomedia no solamente es para enseñar matemáticas sino para todas las asignaturas de quinto y sexto de primaria. Este autor expresa la necesidad de complementar Enciclomedia con el uso de otras herramientas como el software CABRI, esto lo revela en el taller que implementó con los docentes. En su estudio, Andrade encontró que este software ayudó a los docentes a una mejor comprensión de conceptos como: caras, vértices, línea, segmento, etc. Además de que fue de gran ayuda en la comprensión empírica de cómo se construye un sólido geométrico, cosa que a decir de los docentes se encuentra más limitada en Enciclomedia.

Andrade (2009) señala un desconocimiento general del programa Enciclomedia por parte de los profesores pese a los cursos de capacitación impartidos por el gobierno del Estado de México y por parte de la SEP; pues al parecer los

docentes no estaban lo suficientemente preparados para su uso. Lo que resume en tres puntos fundamentales:

1. Debido a la falta de capacitación de los profesores en las nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza, el programa Enciclomedia se vuelve una herramienta limitada en sus posibilidades pedagógicas y didácticas con respecto a la enseñanza de la geometría tridimensional, así como la falta de una planeación previa a las clases de geometría.
2. Algunos profesores prefieren métodos más tradicionales de enseñanza.
3. Enciclomedia es utilizado sólo para proyectar el libro de texto en la pantalla por lo que no constituye una verdadera implementación novedosa en la escuela.

Otro estudio es el realizado por López (2009) quien analiza el proceso de imaginación espacial y su enseñanza para el caso de la construcción de cubos, en los que la utilización de material concreto es su foco de atención. El autor plantea la anticipación en el diseño de figuras y comprobación física de armado, utilizado para el desarrollo de la imaginación espacial en estudios de 6° grado de Primaria.

El trabajo se organizó de la siguiente manera:

1. Identificación de las planillas que formarían un cubo, las cuales se comprobaron a través del armado.
2. Reflexión sobre las condiciones necesarias para el armado de los cubos relacionandolas con el número de caras, aristas, vértices, número de caras que se unen en cada arista o vértice.
3. Diseño de planillas: comprobación de pertinencia y reflexión sobre condiciones de construcción exitosa.
4. Identificación de caras opuestas en diseños de planillas dadas.
5. Diseño del corte de una planilla determinada que proporcione un cubo sistematizando la estrategia del corte.

López encontró que la anticipación de los diseños exitosos, así como su comprobación mediante el armado y desarmado, permite organizar la información figural respecto a la posición relativa de caras, aristas y vértices en tercera dimensión y los lados y vértices en dos dimensiones, de manera que se perfilan las condiciones necesarias y suficientes para el armado y desarmado del cubo. De esta manera el estudiante logra relacionar los objetos geométricos del plano y del espacio a través de una relación funcional que es desarrollar la imaginación espacial en las matemáticas.

Algo que destaca López en su estudio, es que tradicionalmente las escuelas en México incluyen entre sus actividades de enseñanza el armado de figuras en tercera dimensión a partir de planillas en dos dimensiones, casi siempre elaboradas de antemano. La actividad suele restringirse, entonces, al armado sin que medie propiamente ninguna problemática que no sea la limpieza y exactitud.

De acuerdo con Gutiérrez (1998), al referirse a las representaciones planas de cuerpos geométricos,

la enseñanza específica aumenta la capacidad de los estudiantes para manejar las relaciones de los cuerpos espaciales y sus representaciones planas, obteniéndose mejores resultados cuando la enseñanza se basa en el uso de materiales manipulativos... por tanto, es importante prestar atención al desarrollo de las destrezas de realización e interpretación de representaciones planas de los estudiantes y potenciarlas desde los primeros cursos de primaria, sin olvidar ninguna de las dos direcciones de paso entre el plano y el espacio (Gutiérrez 1998:197).

Estudios centrados en los aprendices: Profesores o estudiantes

Tinoco (2010) se centra en cómo enseñar a calcular el volumen de prismas y cubos a estudiantes de quinto grado de primaria. El autor, presenta de manera descriptiva el diagnóstico, proceso y resultado obtenidos basado en la la forma de indagación Investigación-acción. Cabe señalar que aunque el tema está vinculado con geometría tridimensional, el énfasis está en una metodología de trabajo en el aula.

Por medio de la Investigación-acción Tinoco detecta hábitos que desfavorecen la enseñanza del docente y el aprendizaje de los alumnos durante la acción en el aula. Los resultados señalados por Tinoco, se centran en la necesidad de reflexionar sobre los cambios significativos de la práctica docente, dado que permiten comprender que el trabajo de enseñanza-aprendizaje es una labor de investigación por parte del profesor tanto de los contenidos y secuencias, como de la forma de poner a trabajar a los alumnos para que aprendan a aprender e indagar sus saberes. Una de sus sugerencias es invitar a los docentes para que se habitúen a reflexionar y analizar su práctica a fin de mejorar su acción de manera constante.

En cuanto a estudios con profesores se ubicaron cinco investigaciones. La primera de ellas es la de Dorantes (2008) quien realiza una exploración con profesores de nivel básico, acerca de algunos temas de geometría del espacio. El estudio fue realizado con diez maestros, entre ellos tres de primaria y siete de secundaria que están estudiando la licenciatura en Educación Matemática. Con este estudio, Dorantes buscaba constatar los conocimientos de los profesores sobre geometría del espacio a través de un cuestionario diagnóstico, para posteriormente elaborar una serie de actividades que les permitieran aclarar dichos temas.

Para este estudio, Dorantes diseñó nueve actividades a trabajar con los docentes, los cuales involucraron representaciones de poliedros y no poliedros, y trazos de diferentes poliedros dadas ciertas características como medida de sus caras, aristas, y relaciones entre algunas medidas. De igual manera, se incluyó actividades para recuperar las ideas de los profesores vinculadas con volumen y las fórmulas para calcularlo según el poliedro en cuestión.

Después de la aplicación de las actividades, Dorantes (2008) realizó unas entrevistas para posteriormente documentar si los profesores de nivel básico y medio identifican el lenguaje utilizado en cuerpos geométricos (vértices, aristas, caras, cubos, prismas rectos, pirámides, etc.) y cuáles de las fórmulas para el volumen recordaban. En sus conclusiones Dorantes señala:

- En cuanto a la concepción de los profesores acerca del número de elementos que componen los cuerpos geométricos, la mayoría de los profesores desconocen el número de elementos que tiene cada cuerpo geométrico o al menos no tienen bien identificadas sus partes. También señaló ciertas dificultades relacionadas con su conocimiento respecto al número de vértices, caras y aristas.
- Se requiere mayor ejercitación para desarrollar la visualización matemática.
- Los profesores clasifican incorrectamente los cuerpos geométricos y tienen poca experiencia en la exploración de éstos mediante la observación en diferentes perspectivas. Dorantes sugiere que la exploración sobre el cuerpo geométrico de forma física, en el plano y su desarrollo mediante una relación entre las dos representaciones podría ayudarle a superar estas dificultades.
- La mayoría de los profesores no comprenden en su totalidad la relación entre el cuerpo geométrico y su desarrollo (plantilla), es necesario que encuentren por qué la cantidad de los lados en las caras del cuerpo geométrico (físicamente) no coincide con la cantidad en el desarrollo (plantilla) y lo mismo tendría que ocurrir en cuanto a los vértices.
- La mayoría de los profesores no comprenden la relación entre el cuerpo geométrico y la fórmula para su volumen. Parece que una razón es que consideran al volumen como un simple cálculo matemático y no como el espacio delimitado por un cuerpo. Dorantes señala la necesidad de un sistema evaluador que permita ver si el profesor de primaria tiene conocimientos básicos necesarios para abordar el tema de geometría del espacio. Desafortunadamente, en términos de Dorantes, no existe tal instrumento.

Un estudio vinculado con los docentes y sus concepciones respecto a la enseñanza de la geometría tridimensional es el realizado por Miguel (2008). En su investigación, Miguel utiliza el estudio de casos con profesores del tercer ciclo de Educación primaria donde intenta recuperar sus concepciones y la concreción que éstas toman en su práctica docente.

Este autor enfatiza las acciones que el docente se supone debe promover, a partir del análisis de las lecciones del libro de texto, cuando aborda los contenidos de la geometría tridimensional. En particular se ocupa de los contenidos que se refieren a la percepción geométrica para identificar las figuras en configuraciones como el tangram en rompecabezas, teselados y retículas; la imaginación espacial al anticipar sólidos a partir de sus desarrollos; espacio proyectivo el cual incluye la representación de cuerpos geométricos y la medición del volumen de prismas. Temas, que según el autor, están integrados en los siguientes tres aspectos de la Geometría – a excepción del volumen que está incluido en el eje de la medición-

- **Ubicación espacial:** el alumno en relación con su entorno y con otros objetos, las expresiones derecha, izquierda, abajo, arriba, delante, atrás, puntos cardinales, ubicación de puntos en un plano, desplazamientos en un plano, diseño y lectura de croquis, ubicación de lugares en un mapa, lectura e interpretación de un mapa, uso de coordenadas en el primer cuadrante del plano cartesiano.
- **Características de los cuerpos geométricos:** representación de objetos del entorno, clasificación de objetos por algunas de sus características, la clasificación de los cuerpos geométricos de acuerdo con las características que comparten (forma de las caras, número de caras, número de vértices y número aristas), construcción de cuerpos geométricos, construcción y armado de patrones de cubos, prismas, cilindros y pirámides.
- **Figuras geométricas:** construcción del círculo, triángulo, algunos cuadriláteros, trazo de figuras simétricas, trazo de líneas perpendiculares y paralelas, trazo de polígonos regulares, medidas de ángulos, construcción de figuras a partir de otras, clasificación de figuras, construcción de figuras a escala y trazo de figuras con regla y compás.

Este autor utiliza entrevistas individuales a un grupo de 19 profesores (de quinto y sexto grado) para aproximarse a las ideas centrales que sustentan el sistema de creencias y concepciones de cada profesor. Para ello, Miguel (2009) retoma resultados de investigación vinculados con el pensamiento de los profesores. Para

la recolección de datos, también usa la observación de clase de dos grupos distintos con el objeto de analizar las concepciones que sostienen los docentes con relación a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría tridimensional.

Sus conclusiones más relevantes señalan que, los profesores participantes:

- En su mayoría relacionan a la geometría tridimensional con el eje de medición.
- Señalan que existen dificultades en los estudiantes para la comprensión “inmediata” cuando se usan materiales concretos, aunque a largo plazo aprenden mejor cuando los usan.
- Consideran que la geometría tridimensional constituye conocimientos base para desarrollarse con mayor profundidad en los niveles subsecuentes.
- Afirman que cuando los alumnos hacen trazos para el armado y desarmado de cuerpos, se favorece la conceptualización del volumen.
- Consideran que al concluir el sexto grado, los alumnos deben saber calcular el volumen, áreas y perímetros, trazos y líneas, figuras y cuerpos, diferencia entre longitud, superficie, áreas, perímetros y volumen, así como la obtención de volumen y manejo de fórmulas.

Al contrastar las entrevistas y las observaciones de clase, Miguel encuentra que los docentes aluden en su entrevista al uso de Enciclomedia para trabajar la geometría en tercera dimensión con sus alumnos, sin embargo en la práctica no se observa su uso.

Otro estudio vinculado con el conocimiento del profesor es el de Saiz (2002). Ella se enfoca en analizar el pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto de volumen y de su enseñanza. En su investigación aborda tanto las creencias como los conocimientos de los maestros. Ella observa a un grupo de maestros con el objetivo de describir los objetos mentales que ellos ponen en juego al enseñar el volumen.

Entre sus conclusiones más importantes se pueden destacar:

- Los docentes observados otorgan valor al trabajo de tipo cualitativo, particularmente con niños más pequeños. Sin embargo, la influencia de sus objetos mentales volumen, apegados a las ideas plasmadas en los modelos de enseñanza con los que fueron educados, los conduce a sentirse más seguros de estar enseñando volumen, cuando lo hacen a través de acercamientos cuantitativos.
- Para los docentes asistentes a los talleres, el desarrollo cognitivo de los niños es un factor importante para determinar la pertinencia de una actividad o secuencia didáctica, de acuerdo con el grado en el que trabajan. Además, ellos piensan en sí mismos como un parámetro de comparación: cuando una tarea es complicada para ellos, piensan que será difícil para los niños.

Son cinco las implicaciones que Saiz resalta para la enseñanza:

- Proponer a los maestros situaciones problemáticas incluidas en los materiales dirigidos a los niños pueden ayudar a los docentes a reflexionar sobre sus propias creencias.
- La posibilidad de tener acceso a material concreto, rico y variado durante las sesiones de trabajo con los aprendices de cualquier edad apoya y estimula su creatividad y modos de resolución.
- La resolución de problemas como eje de un modelo de enseñanza para los maestros trae consigo que el trabajo y la discusión en equipos y en grupos se dé de forma natural.
- Una manera convincente de mostrar a los maestros las ventajas del nuevo enfoque de enseñanza, es ponerlo en práctica cuando ellos fungen como alumnos.
- En los cursos de actualización y superación es conveniente no partir del supuesto de que los maestros dominan los contenidos a ser tratados.

De igual manera, ella propone un modelo de enseñanza para los niños:

- El trabajo con la ficha 68 de quinto grado (SEP, 1994) mostró que la medición del volumen con una escala lineal, se complicó cuando los maestros, apegados a sus concepciones cuantitativas, intentan transformar las unidades de la escala, a unidades de volumen del sistema métrico decimal. Por lo cual, no se recomienda intentar este proceso cuando se use para trabajar con los niños.
- Las dificultades para distinguir entre el concepto matemático de volumen y el concepto físico de volumen apuntan hacia las ventajas de integrar curricularmente el estudio de las ciencias y de las matemáticas.
- El uso de la inmersión para medir volúmenes representa problemas de tipo cognitivo. Su aplicación implica la obtención del volumen desplazado cuya conservación se pone de manifiesto después de los once años. También es una aplicación del principio de Arquímedes cuyo estudio y comprensión corresponde a niveles más avanzados de la enseñanza. Por tanto, al utilizar la inmersión en los cursos de primaria se recomienda un acercamiento cualitativo.

Finalmente, en su estudio, Saiz subraya que para lograr que los niños constituyan un objeto mental adecuado del volumen, es fundamental trabajar con volumen y capacidad, particularmente centrando la atención en cuerpos maleables que llenen los recipientes y relacionar el volumen de estos cuerpos con la capacidad de los recipientes.

En esta misma línea de trabajo con profesores, Olvera (2013) realizó un estudio acerca del aprendizaje de la geometría de los sólidos en una comunidad de profesores del estado de Nayarit. Su objeto de estudio fue la enseñanza de la geometría de los sólidos en la escuela primaria y el aprendizaje de profesores sobre esta temática como miembros de una comunidad de práctica. El trabajo de Olvera (2013) se ocupó de caracterizar el conocimiento geométrico de docentes de primaria en un proceso de comunicación entre pares, además de un trabajo en comunidad el cual consistió en la resolución de situaciones enmarcadas en la geometría de los sólidos, así como el análisis y la reflexión del uso de los propios conocimientos geométricos de los participantes.

Sus conclusiones las refiere en dos direcciones: una en relación con los procesos matemáticos y los objetos mentales de los profesores en el sentido de Freudenthal (1983 citado por Olvera, 2013) y otra, sobre la autorregulación del desarrollo profesional de los docentes constituidos en comunidad. Con relación a la primera, Olvera (2013: 262) constató que:

- La clasificación es un recurso que permite valorar el conocimiento geométrico de los participantes.
- La descripción es un elemento fundamental para ampliar los objetos mentales de los docentes.
- La identificación es un proceso inherente a la clasificación y la descripción.

Según los hallazgos de esta investigación, parece que la experiencia en la comunidad de práctica contribuyó para que los docentes fueran conscientes del papel que juega la geometría en el desarrollo del pensamiento matemático. Aunque esta temática y este enfoque no se abordarán en esta tesis, el análisis de los sólidos reafirma lo encontrado en otros autores como Guillén (2010) y Gutiérrez (1998) en términos de la relevancia de las representaciones utilizadas y el aprendizaje de algunos contenidos geométricos.

Otro estudio fue el realizado por Moreno et al (1998), centrado en la conceptualización del volumen y su medición. Este grupo de investigadores indaga esta temática con 40 estudiantes del grado noveno (tercero de secundaria). Este trabajo de investigación se basó en dos sesiones de trabajo. La primera sesión tenía como objetivo propiciar en los estudiantes la capacidad de identificar las propiedades de los cuerpos considerando al volumen como una de ellas. Las guías de trabajo proponían la observación detallada de los objetos presentados, la identificación de características propias de cada uno de éstos, la comparación de características, ejercicios de representación bidimensional de cuerpos tridimensionales y la representación gráfica de los cuerpos trabajados. La segunda sesión tenía como objetivo que los estudiantes encontraran el volumen de cuerpos por conteo de unidades cúbicas, promover la estimación del volumen en otros

cuerpos y facilitar una posible deducción del modelo matemático para calcular el volumen. Las guías de trabajo proponían describir los materiales de trabajo en términos de sus propiedades; construir objetos compuestos por dos, tres y cuatro cubos; observar formas y posiciones para comparar el volumen de los cuerpos contruidos; construir cuerpos sólidos con masa y plastilina; seleccionar el cuerpo de mayor volumen justificando la respuesta; crear cubos dado un número cualquiera de unidades cúbicas previamente elaboradas en distintos materiales; llenado de cajas con unidades cúbicas, identificando el número preciso de estas unidades utilizadas a lo largo, ancho, alto de las cajas y el total; estimar el volumen de varios paralelepípedos y finalmente que los estudiantes hicieran propuestas de modelos matemáticos para calcular el volumen.

Este equipo de investigadores-docentes identificó las siguientes dificultades en los estudiantes vinculadas con este concepto:

- Para expresar sus percepciones usando los términos apropiados porque faltaba conocimiento y comprensión de vocabulario geométrico; esto ocurrió en la primera sesión.
- Para encontrar entre las características del cubo las 3 dimensiones necesarias para calcular el volumen por medio del tratamiento tridimensional.
- Confundían el área total del cuerpo geométrico con el volumen y el perímetro con el área.

A lo largo de las sesiones, lograron algunos avances como:

- El uso del diccionario para buscar términos empleados en geometría ayudó a la comprensión y expresión de las características y propiedades de los cuerpos.
- Lograron comparar, establecer diferencias y equivalencias entre cubos de diferentes tamaños
- Con el llenado de cajas, los estudiantes identificaron las tres dimensiones que se emplean al obtener el volumen. Además de que el conteo de

unidades cúbicas les permitió medir el espacio ocupado por cada una de las cajas.

- La comparación del volumen entre cuerpos construidos con igual y con diferente número de unidades cúbicas, permitió a los estudiantes hacer comparaciones de volumen.
- Los estudiantes identificaron en los cuerpos trabajados características y propiedades que cumplen todos los cuerpos.

Sin embargo, estos autores también señalan que muy pocos estudiantes pudieron generalizar y expresar un modelo matemático para calcular el volumen.

Guillén (2005) por su parte, realiza una clasificación de los sólidos según el modelo de Van Hiele desde diferentes puntos de vista: desde los niveles iniciales, desde las matemáticas y desde la enseñanza de las matemáticas. Los sólidos estudiados en su investigación son poliedros regulares, poliedros arquimedianos y poliedros de Catalán; prismas rectos, oblicuos, cóncavos y convexos; prismas de bases regulares y prismas de bases irregulares; antiprismas, pirámides y bipirámides. La autora presenta resultados obtenidos al trabajar algunas de estas clasificaciones de sólidos con futuros profesores y con estudiantes de primaria.

Para Guillén, la clasificación desde los niveles iniciales permite ver los usos de los poliedros en distintos contextos cotidianos. La clasificación desde las matemáticas conlleva a varios tipos de clasificación: la *clasificación a priori* con la cual se descubren nuevos conceptos y la *clasificación a posteriori* con la que se hace la clasificación de los elementos de una familia. Guillén señala las clasificaciones ingenuas que comprenden a las clasificaciones dicotómicas y las clasificaciones en las que las particiones se solapan; clasificaciones con criterios cuantitativos; clasificaciones en las que hay implicados más que un criterio; clasificaciones establecidas con criterios que son normas de construcción; clasificaciones inclusivas o jerárquicas; clasificaciones particiones y clasificaciones por analogía.

La clasificación desde la enseñanza de las matemáticas corresponde a tres enfoques que agrupan las ideas de los estudiantes sobre la clasificación,

separándolo en clases disjuntas: a) Organiza un mundo conocido, este enfoque introduce la clasificación partición. b) Organiza y estructura un mundo ya conocido, esto permite hacer clasificaciones jerárquicas. c) Construye siguiendo normas de construcción o buscando los objetos que se parecen a otros. En esta clase, el enfoque está centrado en el cumplimiento de propiedades o en la verificación de su definición.

El resultado del análisis de Guillén señala que los niños a una edad muy temprana son capaces de comprender inclusiones de clases como “los gatos y los perros son animales” pero les resulta difícil hacer inclusiones con figuras geométricas porque definir atributos es más sutil y complejo. Se identificó también en los niños de mayor edad, dificultad respecto a la inclusión de clases vinculadas con el significado de la actividad lingüístico y funcional; lingüístico al momento de interpretar correctamente el lenguaje usado en la inclusión de clases y funcional al entender por qué la clasificación inclusiva es más útil que la clasificación partición. La clasificación inclusiva resultó ser la tarea más difícil con los estudiantes de magisterio aún cuando la habían usado con cuadriláteros y diferentes familias de prismas. Algunas de las tareas planteadas eran: enumerar ejemplos de subfamilias de prismas que cumplían ciertas condiciones, precisar el tipo de caras que pueden tener los ejemplos de estas familias, juzgar y justificar si la relación entre familias de prismas que se enuncian en un diagrama es correcta o incorrecta y establecer si entre dos familias de sólidos dadas hay relación de inclusión, de exclusión o tienen intersección pero no están incluidas una en otra.

Una dificultad que se presentó con los estudiantes de 12 años cuando realizaban una clasificación de prismas rectos y oblicuos al tratar de colocar en uno de los dos al cubo “chato” el cual no entraba en ninguna de las dos familias que se habían establecido, los llevó a la reflexión de que cuando se aumenta el universo a clasificar, también deben aumentar las familias clasificadoras.

Otra dificultad que se presentó tanto en estudiantes de magisterio como en estudiantes de 12 años fue con la altura del prisma oblicuo. Aunque algunos estudiantes expresaron con lenguaje no geométrico, que la altura del prisma era la

distancia que había entre la base superior del prisma y la superficie que lo soportaba, no la identificaron fuera del prisma.

Los estudios previamente revisados muestran las dificultades centradas con el tema del volumen: su conceptualización, sus diferentes aproximaciones, su medición tanto para alumnos como para profesores. Estos son elementos que se toman como referente para justificar la pertinencia de este estudio.

1.3. Investigaciones sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, relacionadas con la enseñanza de la geometría en primaria

Hasta el momento, se ha identificado una investigación en la que se utiliza el marco teórico del Conocimiento Matemático para la Enseñanza en el nivel de primaria. Este estudio es el realizado por Ribeiro (2010). Esta investigación se inclina hacia la mejora del proceso enseñanza aprendizaje y la formación de profesores en general. Para ello, Ribeiro optó por hacer un trabajo colaborativo entre dos profesoras del primer ciclo y el análisis de la práctica escolar intentando obtener una comprensión profunda del impacto de este tipo de intervención. La investigación se centra en el estudio del desarrollo profesional de dos profesoras del primer ciclo y se fundamenta en el análisis del conocimiento profesional, en las relaciones que se verifican entre los componentes del conocimiento y de la manera en que se alteran e influyen en la práctica a lo largo del tiempo.

Las conclusiones se enfocaron a la reflexión de la práctica docente, la promoción de una concienciación del propio conocimiento profesional y la readecuación de las acciones del profesor como producto de una práctica más consciente y enriquecida, minimizando las situaciones de improvisación de contenido. Así la modelación, discusión y reflexión, podrá llevar a los profesores a compartir saberes, construyéndolos y fortaleciéndolos, lo que conducirá también a una conciencia multidimensional del proceso de enseñanza en general y de la matemática y de su enseñanza, en particular (Ribeiro, 2010).

1.4. Pregunta y objetivos de investigación

Como se evidenció en las secciones 1.2 y 1.3., el estudio de la geometría tridimensional en los profesores es una problemática que ha sido poco estudiada. Ello es una muestra de la necesidad de contar con mayores evidencias empíricas que permitan identificar tanto conocimientos profesionales que se ponen en acción al momento de enseñar la geometría tridimensional como aquellos de los que frecuentemente carecen los profesores. En esta tesis, tales conocimientos giran en torno al Conocimiento Común del contenido, Conocimiento Especializado del contenido, Conocimiento del Currículum (CC), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCEs) y el Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (CCEn), los cuáles se detallarán en el capítulo 2. Por este motivo, en esta investigación se pretende responder a:

¿Cuáles subdominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* pone en acción un profesor cuando enseña temas relacionados con geometría tridimensional en sexto de primaria, en el caso del volumen de prismas?

Objetivo general

Describir y analizar los subdominios (CCC, CEC, CC, CCEs, CCEn) del *conocimiento matemático para la enseñanza* evidenciados en profesores de sexto de primaria en temas relacionados con geometría tridimensional en el caso del volumen de prismas.

Objetivos específicos

- Generar indicadores específicos para identificar los subdominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza respecto al tema del volumen de prismas que muestran en sus prácticas algunos profesores.
- Identificar el conocimiento que dichos profesores manifiestan al impartir sus clases respecto de los contenidos de geometría tridimensional relacionados con el volumen de prismas, planteados en el currículum mexicano a lo largo de los seis grados de Educación Primaria.

2. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA Y LA GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

En este capítulo se abordan tres aspectos. Se inicia con una breve descripción de la geometría tridimensional en el desarrollo propio de la geometría. En un segundo apartado, se describen cuestiones relevantes para la enseñanza de la geometría tridimensional en la educación primaria y se cierra este capítulo, con el referente teórico para el análisis de los datos, esto es, el Conocimiento Matemático para la Enseñanza y sus implicaciones en este estudio.

2.1. Un breve recorrido histórico por el estudio de la geometría: algunas tensiones

A lo largo de la historia, la geometría ha tenido sus implicaciones en la vida del ser humano. En esta evolución, se han identificado diversas tensiones dentro de las ideas conceptuales que aquí se manejan y que la propia investigación en Didáctica de la geometría ha vinculado con algunas de las dificultades documentadas.

A continuación se sintetizará brevemente esta evolución histórica con la finalidad de identificar estas tensiones. Para ello, se toma como referente a autores como Cattaneo, et al (2010); SEP (2001) y Camargo y Acosta (2004).

En Egipto los individuos se vieron en la necesidad de medir sus parcelas reiteradamente porque se encontraban a orillas del río Nilo, las cuales con frecuencia eran inundadas y tenían que ser delimitadas nuevamente cuando el río volvía a su cauce normal. Mediante una soga que tenía nudos equidistantes se trazaban nuevamente los terrenos. De esta manera la geometría surge entonces como medición de la tierra (Cattaneo, et al, 2010). Los registros antiguos que se

conocen acerca de la geometría datan aproximadamente de los años 3000 a. C. los cuales se muestran en unas tabletas de arcilla cocidas al sol descubiertas en Mesopotamia que contienen grabados de caracteres cuneiformes.

Hacia 1600 y 1800 a. C., los habitantes de Mesopotamia desarrollaron una geometría más ligada con la medición práctica, sobre todo con las reglas para calcular el área de rectángulos, triángulos rectángulos e isósceles, además de que podían obtener el volumen del paralelepípedo y algunos prismas (SEP, 2001: 212). Con el surgimiento de importantes civilizaciones como la china, india, egipcia, griega, maya y azteca, la geometría respondió principalmente a necesidades cotidianas de medición de longitudes, áreas y volúmenes o de trazo de linderos en la tierra. Con respecto a otros campos del conocimiento como la arquitectura, la geografía y la astronomía, la geometría también fue fundamental (Camargo y Acosta, 2004).

Lo hasta aquí descrito permite identificar una geometría empirista debido a su estrecha relación con las actividades humanas. Este vínculo permitió que la geometría desarrollara principalmente aspectos visuales, los cuales se dejan ver en reproducciones que hicieron nuestros antepasados de su realidad. Por ejemplo, el uso de dibujos y motivos geométricos simples e incluso simétricos con los que adornaban sus pertenencias. Al parecer, en el diseño de las primeras construcciones las formas geométricas estuvieron presentes.

Fueron los griegos, entre ellos Tales de Mileto y la escuela de Pitágoras, los que demostraron varios teoremas de geometría y le dieron un enfoque abstracto casi filosófico. Aproximadamente en el siglo VI a. C., Eudoxo entre el 391 y 338 desarrolló la teoría de las proporciones y el método de exhaustión con el cual hizo rigurosas determinaciones de áreas y volúmenes. Alrededor del 300 a. C., Euclides en su obra *Los elementos* hizo una primera recopilación de los conocimientos geométricos y organizó a la geometría en 13 libros sobre la base del pensamiento lógico. Estos libros de matemáticas, en particular de geometría, resumen el conocimiento que poseían los griegos en tiempos de Euclides. Este trabajo fue continuado por Apolonio, Arquímedes y Tolomeo quienes centraron su

interés en aspectos conceptuales de la geometría, la cual se comenzó a ver como un sistema axiomático deductivo.

Entre el 427 y 348 a. C., Platón distinguía entre la figura concreta y la forma abstracta, supuso que cada una tenía vida independiente. La figura concreta como la medida de una elipse en particular existía en la realidad, mientras que la forma abstracta se encontraba en el mundo de las ideas como si fuera el alma de la figura. En los años 384 – 322 a. C., Aristóteles, uno de los seguidores de Platón, distinguió entre el mundo real y el mundo de las ideas aludiendo a que las figuras concretas viven en el mundo real y las figuras abstractas viven en el mundo de las ideas. Durante los años 262 – 190 a. C. Apolonio desarrolló su trabajo de las secciones cónicas y la teoría de los epiciclos.

Otro avance relevante es el realizado por Johannes Kepler (1571 – 1630), quien describió matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del sol. Tanto Isaac Newton como J. Kepler se apoyaron en las secciones cónicas desarrolladas por Apolonio para realizar sus trabajos. Isaac Newton (1643 – 1727), desde su ley de la gravedad deduce la elipse como la forma para el movimiento planetario. Aborda así, el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica generando un enfoque geométrico y analítico de las derivadas matemáticas aplicadas sobre curvas definidas a través de ecuaciones.

La geometría proyectiva fue otro momento de evolución de la geometría, que se puso de manifiesto a través de un método artístico durante el renacimiento con artistas como Leonardo da Vinci en el siglo XV.

Por su parte, René Descartes (1596 – 1650) creó la geometría de coordenadas, conocida también como *geometría analítica* o *cartesiana*. Desarrolló la algebraización de las secciones cónicas mediante ecuaciones algebraicas de segundo grado en dos variables. Él criticaba los argumentos geométricos de Euclides y Apolonio porque les hacía falta un método general. En este mismo sentido, Pierre de Fermat (1601 – 1665) desarrolló una geometría de coordenadas

sólo que a diferencia de René Descartes, el pensamiento de Fermat de la geometría analítica era una extensión de las ideas de Euclides y Apolonio.

Otros matemáticos como Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793 – 1856) y Janos Bolyai (1802 – 1860) publicaron en 1832 que ellos podían construir geometrías que satisfacían todas las propiedades de la geometría euclidiana, excepto el postulado de las paralelas. Carl Fiedrich Gauss (1777 – 1855) había tenido resultados similares en 1816, pero los guardó porque se desviaban fuertemente del pensamiento filosófico de esa época y tuvo miedo de que fueran ridiculizados. Henri Poncairé (1854 – 1912) desarrolló un modelo concreto de geometría no euclidiana en dos dimensiones, el plano hiperbólico conocido como el disco de Poncairé en el que los puntos dentro de los límites de un disco circular son los puntos y las líneas son los arcos circulares que intersecan los límites del círculo ortogonalmente.

Leibniz (1646 – 1716) en 1679 propuso formular algunas propiedades de las formas geométricas usando símbolos especiales para representarlas y combinarlas para crear otras; a este estudio lo llamó *Análisis Situ* o *Geometría Situ*. Sin embargo, no impulsó ningún desarrollo con esta idea. En 1735 Euler publicó un artículo con el título *Solution of a problema from geometría Situ* con el cual más que una contribución al análisis situ era lo que hoy en día llamamos la primera propiedad en teoría de grafos. Y en 1750 Euler publicó una demostración del teorema de Euler sobre poliedros.

Del siglo XX a la fecha se han realizado varias investigaciones respecto al estudio de formas geométricas en el área denominada álgebra geométrica, la cual conlleva un alto grado de abstracción y ha servido como base para aplicaciones muy útiles como construcción de códigos indescifrables y códigos para corregir errores por sí mismos.

De acuerdo al breve recorrido de la geometría a través de su historia, se puede decir que las tensiones identificadas llevaron a la Geometría a un estancamiento de casi 2000 años en los que se le tuvo de manera axiomática (geometría

euclidiana), pero que también sirvió como punto de partida para el desarrollo de nuevas geometrías. En este desarrollo se identifica la geometría proyectiva desarrollada a partir del arte; la geometría analítica a través del uso de coordenadas; la topología que se vincula con el estudio de propiedades cualitativas de objetos geométricos; el álgebra geométrica con importantes y útiles aplicaciones con un alto grado de abstracción; hasta llegar a la aplicación de geometría dinámica utilizada en programas computacionales y softwares que apoyan a múltiples ramas del conocimiento científico, incluso a la enseñanza de la geometría misma. Las tensiones identificadas y aquí presentadas en la geometría a través de los años, no han obstruido el conocimiento matemático, sino que han permitido enriquecer a las matemáticas y desarrollar de una manera más amplia el conocimiento geométrico.

2.2. Enseñanza de la geometría tridimensional en la educación primaria

Enseñar geometría tridimensional en la escuela primaria puede ser emocionante e incluso divertido para quienes gustan de las matemáticas, sin embargo, no se podría decir lo mismo de quienes no muestran mucho interés por las matemáticas. La enseñanza de la “geometría es más compleja y a menudo menos exitosa que enseñar operaciones numéricas” (Duval, 1998: 37). Para este autor, en el aprendizaje de la geometría están inmersos tres procesos cognitivos que a continuación se describen:

- **Procesos de visualización** respecto a la representación espacial para ilustrar un enunciado. Dicho de otro modo, es la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual. Esta información visual dentro de las matemáticas puede tener estímulos tanto figurales como no figurales.
- **Procesos de construcción** con herramientas, se refiere al trazo de configuraciones que puede ser a partir de un modelo siempre y cuando los resultados representativos y observados se relacionen con los objetos matemáticos que se representan.

- **Razonamiento** es la manera en que se amplía, explica y demuestra el conocimiento en relación con procesos discursivos.

En estos procesos es importante decir que la visualización no depende de la construcción, aún en los casos en que la construcción conduzca a la visualización. La visualización a veces es una ayuda para encontrar una demostración, pero en ocasiones puede resultar desorientadora. El razonamiento puede desarrollarse de manera independiente, en muchos casos puede representar la manera de encontrar un orden para la construcción de una figura y, a su vez, puede representar maneras de describir un orden de construcción. Estos tres procesos cognitivos están íntimamente relacionados y se hacen necesarios para un buen desempeño en geometría, pero según Duval, en la enseñanza se deben desarrollar tareas específicas para cada proceso que permitan su desarrollo dada la posibilidad de desarrollarse de manera independiente.

2.2.1. El papel de la representación en la geometría y su incidencia en la resolución de problemas

El ser humano se forma una idea del mundo en el que vive a través de la exploración que hace del mismo por medio de sus sentidos, esto lo lleva a construir representaciones de los objetos que observa y manipula. La representación mental es apoyada por las representaciones visuales que se le presentan y por la visualización que él haga de los objetos que observa y manipula.

En el proceso de aprendizaje, los estudiantes deben desarrollar habilidades que les permitan resolver problemas que involucran objetos tridimensionales donde las representaciones gráficas utilizadas juegan un rol importante. En particular, porque las representaciones de los objetos tridimensionales son bidimensionales y requieren de diferentes habilidades para hacer una decodificación adecuada, como se verá en el apartado 2.2.3.

Por medio de la visión se perciben las figuras, pero no siempre las figuras dejan ver lo que representan. Una figura puede representarse en dos o tres

dimensiones, por lo tanto se requiere de la percepción visual la cual permite percibir y procesar esta información por medio de procesos sensoriales y mentales. La visión es la habilidad para ver e interpretar lo que incluye la percepción figura-fondo, la percepción de relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual (Duval, 1998).

La percepción visual apoya a la geometría tridimensional puesto que las representaciones visuales constituyen un medio esencial de anticipación. Los alumnos tienden a depender más de la información visual, según los resultados de investigaciones como las de Duval (1998) y Gal & Linchevski (2010). La atención inicial en geometría se centra más en los objetos que en los procesos debido a que el interés se enfoca en las propiedades figurales percibidas por medio de los sentidos e interpretadas por la reflexión mental con representación espacial. Sin embargo, toda representación particular aunque proporciona cierta información también oculta otra y puede ser difícil recuperarla para quien la está interpretando. Si bien la información visual permite construir representaciones, ello varía para cada individuo dependiendo de sus imágenes mentales y su uso cuando se hacen matemáticas (Gal & Linchevski, 2010). En el apartado 2.2.3 se precisará el tipo de representaciones usadas en la geometría tridimensional.

Para Del Olmo et al (1993:120) las dificultades que los niños tienen al momento de medir el volumen se pueden originar por el hecho de que son forzados a leer y visualizar información de objetos sólidos a partir de gráficos, sin haber manipulado previamente dichos objetos. No dominan la visualización espacial, lo cual quiere decir que carecen de la habilidad de manipular mentalmente figuras rígidas como son las de rotar o invertir un objeto representado en dos dimensiones. La capacidad de la visualización espacial se puede desarrollar mediante el entrenamiento, desarrollando actividades que impliquen la representación de objetos tridimensionales representados en dos dimensiones mediante gráficos, haciendo uso de objetos tridimensionales como es la manipulación de bloques superpuestos al construir un cuerpo geométrico.

A partir del conocimiento de los objetos a través de los sentidos, se da paso a la representación mental del espacio. Para fines didácticos se utilizan las representaciones de formas tridimensionales en representaciones bidimensionales, que pueden generar dificultades en el aprendizaje de las propiedades y características de los objetos tridimensionales al intentar estudiar por medio de representaciones bidimensionales (Cañizares, 2001). Esto podría ser un detonante para analizar el papel que juegan las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales en las lecciones de los libros de matemáticas en sexto grado y el uso didáctico que el profesor les da al momento en que desarrolla una clase de geometría tridimensional, además de identificar hasta qué punto el profesor se apoya en ellas para su enseñanza.

2.2.2 Los cuerpos geométricos y sus elementos

Los cuerpos geométricos “son figuras geométricas que ocupan un lugar en el espacio” y reciben el nombre de cuerpos sólidos. Al estudio de las propiedades de estos cuerpos sólidos se le llama geometría del espacio, geometría de tres dimensiones o geometría tridimensional (Thompson, 1996).

En nuestro contexto, ya sea como parte de la naturaleza o como propia creación del hombre, encontramos diferentes objetos en el espacio que posteriormente se idealizan y se transforman en representaciones abstractas sobre las que se estudian sus elementos, propiedades y relaciones desde diferentes enfoques según su forma, su medida o su estructura. A estas figuras se les llama cuerpos geométricos y encierran en su interior una porción de espacio.

A continuación se aclararán algunos términos usados en la geometría tridimensional y en las lecciones que se analizarán en esta tesis.

Los cuerpos poliédricos o simplemente poliedros se refieren a todo cuerpo limitado por polígonos planos. Cada uno de los polígonos se llama cara del poliedro y los lados de cada polígono son aristas del poliedro. Una diagonal del poliedro une a dos vértices que no están contenidos en la misma cara (Cañizares, 2001).

Poliedros regulares. Un poliedro regular es aquel que tiene las caras iguales en forma de polígono regular y en cada vértice concurren el mismo número de caras (Cañizares, 2001). En la escuela primaria se trabajan actividades que destacan algunas características de algunos poliedros regulares como el tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

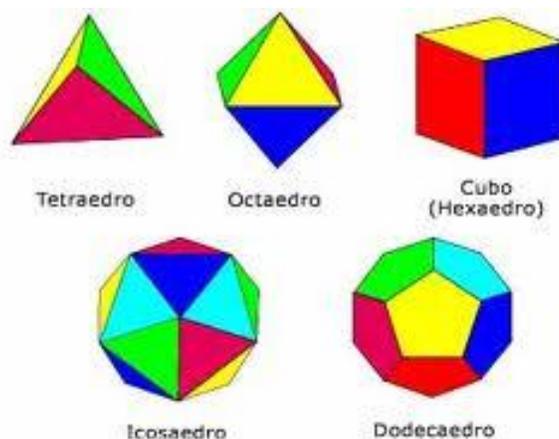


Imagen 2.1. Representaciones de algunos poliedros regulares
Fuente <https://www.google.com.mx/desdelquintopino.blogspot.com> (2013)

2.2.3 Representaciones de los cuerpos geométricos: Uso de proyecciones

Existen diferentes formas de representar los cuerpos geométricos para fines didácticos. Cada uno de ellos requiere el aprendizaje de convenciones para interpretarlas y el desarrollo de habilidades para reproducirlas, cuestiones que deben considerarse al momento de abordar el estudio de objetos tridimensionales en la educación primaria (Gutiérrez, 1998). A continuación se describen diferentes maneras de representar este tipo de objetos.

La proyección en perspectiva normalmente representa los cuerpos geométricos de modo que permite identificar las unidades cúbicas que lo conforman. En este tipo de representación, las aristas más distantes se ven más pequeñas y las líneas paralelas que se alejan se ven convergentes (Gutiérrez, 1998: 196).

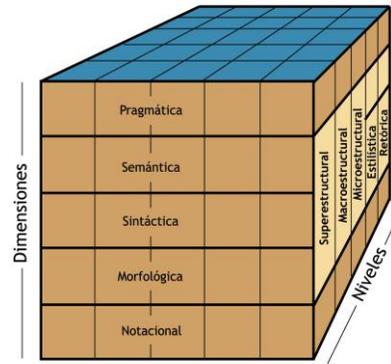


Imagen 2.2. Prismas en proyección perspectiva
 Fuente <https://www.google.com.mx/desdelquintopino.blogspot.com> (2013)

La proyección paralela es análoga a la perspectiva, con la excepción de que las líneas paralelas son siempre paralelas independientemente de su dirección, es decir, no hay líneas convergentes (Gutiérrez, 1998: 196).

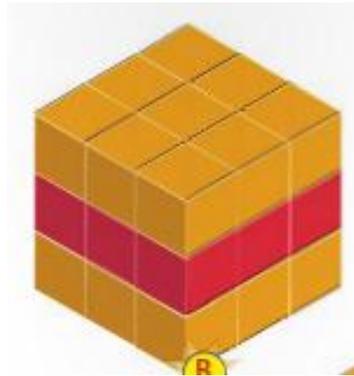


Imagen 2.3. Cubo en proyección paralela (SEP, 2013: 162)

Proyección isométrica: Es un caso particular de la proyección paralela en la que los cubos se sitúan de manera que las tres aristas que salen de determinado vértice se dibujan de la misma longitud y forman ángulos de 120° . (Gutiérrez, 1998: 196)

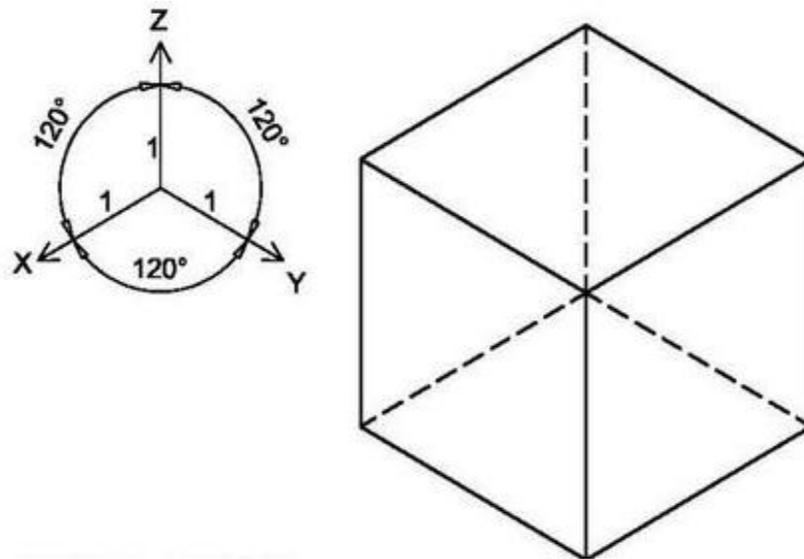


Imagen 2.4 Cubo en proyección isométrica

Fuente <https://www.google.com.mx> tecnoprojectodaniel.blogspot.com (2015)

Representación por niveles: Se dibujan niveles o capas de unidades cúbicas que contiene el cuerpo geométrico, vistas desde la superficie.

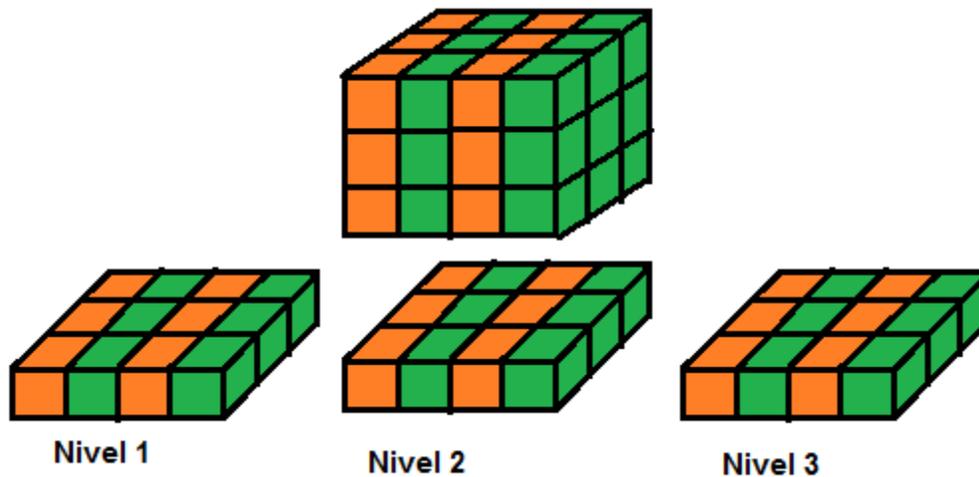


Imagen 2.5. Prisma rectangular representado por niveles

En la imagen 2.5 se observa la representación de un prisma rectangular cuyas dimensiones son 4 de largo por 3 de ancho y tres de altura.

Proyección Ortogonal: Está formada por tres proyecciones del sólidos sobre tres planos ortogonales (Gutiérrez, 1998: 196).

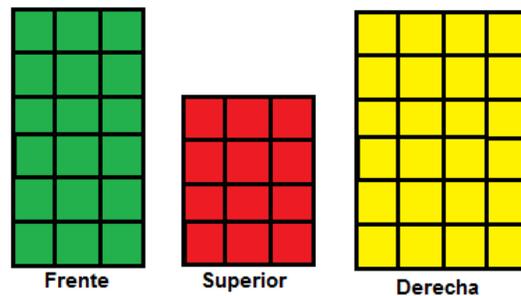


Imagen 2.6. Prisma rectangular representado en proyección ortogonal

Desarrollos planos: Otra forma de representar los cuerpos geométricos es mediante un desarrollo en el plano. El desarrollo en el plano sólo muestra las caras y las aristas del cuerpo geométrico a construir. De esta manera se obtienen modelos de cuerpos espaciales delimitados por la superficie que ocupan sus caras en dos dimensiones.

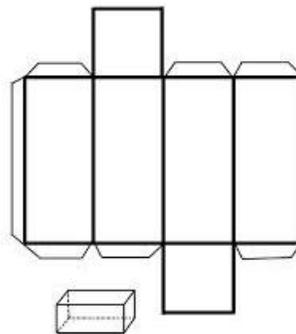


Imagen 2.7. Prisma cuadrangular, representado en el plano

Fuente WWW.dibujalia.com (2013)

Es importante mencionar que los tipos de representaciones que se utilizan en los libros de texto de quinto y sexto grado de primaria (tanto los de la reforma de 1993 como los de 2011) para proyectar cubos, prismas y pirámides con efectos

didácticos son las representaciones paralelas, isométricas y desarrollos en el plano.

2.3. Características-propiedades medibles y cuantificables de cuerpos geométricos

Entre las características-propiedades medibles y cuantificables de los cuerpos geométricos que se trabajan en geometría tridimensional para quinto y sexto grado se encuentran el área total de prismas, cubos y pirámides y el volumen de cubos y prismas. A continuación se precisan algunos de estos términos.

Área: En la escuela se desarrollan dos procedimientos para calcular el área; uno es el bidimensional y otro es el unidimensional.

El procedimiento unidimensional considera distintas formas de cubrir una figura con diversas copias de una figura fija sin solaparse ni dejar huecos y contar posteriormente cuántas han sido necesarias para rellenarla haciendo uso de estrategias propiamente aditivas. Moreno et al (2001) mencionan que este procedimiento es poco usual en la vida cotidiana.

El procedimiento bidimensional admite expresar el área como producto de dos longitudes ($A = L \times L$), lo cual fundamenta el que se utilicen las unidades de longitud propias del Sistema Internacional (m, cm, etc.). Estos autores señalan que este procedimiento es el que se suele utilizar más en la vida cotidiana al calcular o comparar áreas recurriendo a la medida de longitudes y la aplicación de algunas fórmulas mediante el desarrollo de estrategias multiplicativas. Para este procedimiento se toma en cuenta el significado del superíndice que se mantiene igual pero es afectado por el carácter bidimensional del proceso por ejemplo 10 mm^2 , 1 cm^2 , 10 m^2 , etc.

Área de un prisma: Es la superficie que ocupan todas las caras del cuerpo geométrico. Algunos libros como el de SEP (2011) hacen la distinción entre área lateral y área total para el caso de los prismas. El área lateral la refiere a las caras laterales de cualquier prisma, es decir, no incluye el área de la base superior e

inferior. El área total del prisma es el área de todas sus caras, en estas se incluye tanto el área de las caras laterales como el área de las bases. En otras palabras, el área total de un prisma es el área ocupada por su desarrollo plano.

Volumen: En cuanto a las concepciones de volumen, Saiz (2002:112-119) considera cuatro tipos de volumen. A continuación se describe cada uno de ellos:

- Volumen interno. La cantidad de materia que forma un cuerpo. Se considera con este tipo de volumen a los objetos sólidos u objetos huecos o recipientes. En los dos últimos casos para medir el volumen interno se toma en cuenta la cantidad de material con el que están hechos los objetos, sin tomar en cuenta el aire encerrado en el objeto hueco o en el interior del recipiente. La cáscara de una fruta es el volumen interno.
- Volumen ocupado. Es la cantidad de espacio ocupado por las unidades que conforman un cuerpo como un todo, en relación con otros objetos a su alrededor. (Dos prismas diferentes con el mismo número de cubos guardan el mismo volumen).
- Volumen complementario y volumen desplazado: es el volumen ocupado por el agua en un recipiente en el cual se ha colocado un objeto.
- Volumen encerrado. Es cuando el concepto volumen se asocia con el espacio encerrado dentro de las superficies frontera que limita una región espacial. Esto alude a las nociones euclidianas para las cuales el volumen de un cuerpo es el lugar que ocupa en el espacio, cuantificable a través de sus dimensiones lineales.

Los objetos volumen encerrado-medibles son objetos huecos y cerrados; no tiene sentido hablar de volumen encerrado en un objeto completamente sólido. (El espacio libre dentro de una esfera es el espacio encerrado). La suma del volumen interno y el espacio encerrado corresponde al volumen como espacio ocupado de la mencionada esfera.

Capacidad: es la propiedad que tienen los objetos que poseen un espacio vacío con la posibilidad de ser llenados, esta es entendida como espacio creado. La capacidad sugiere un recipiente para verter cosas o sustancias en él (continente). Un recipiente tiene capacidad, lo cual indica cuánto puede guardar (contenido). Continente y contenido son dos situaciones distintas de una misma cualidad de los cuerpos “ocupar un espacio” (Moreno et al 2001: 518-519).

Volumen y capacidad: El volumen es entendido como espacio ocupado mientras que la capacidad es un espacio vacío con posibilidad de ser llenado. Capacidad sugiere un recipiente para llenarlo de cosas, mientras que volumen sugiere un objeto que reclama espacio. Las medidas de volumen se utilizan en objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas, mientras que las medidas de capacidad se usan para hablar de la cantidad de líquido o grado que cabe en un recipiente (Moreno et al 2001: 518).

2.3.1 Los prismas: su área, su volumen y su tratamiento didáctico en el aula

Entre los objetos que nos rodean muchos tienen forma parecida a un prisma como por ejemplo una caja de zapatos, un libro, una goma. Existen cuatro tipos de prismas a saber, según Guillén (2005: 130):

- los *prismas rectos* cuyas aristas de las caras laterales son perpendiculares a las bases;
- los *prismas oblicuos* cuyas aristas de las caras laterales no son perpendiculares a las bases;
- los *prismas de bases regulares* como su nombre lo indica, tienen dos bases que tienen la forma de un polígono regular y
- los *prismas de bases irregulares* cuyas bases tienen la forma de un polígono irregular.

Para efectos de este estudio nos centramos en los prismas rectos y prismas de bases regulares, debido a que son los tipos de prismas que presentan los libros de texto en los que se desarrollan las clases de geometría tridimensional que se van a analizar.

Los prismas que se trabajan en la educación primaria tienen dos bases que son polígonos (regulares o irregulares). Según el número de lados que tienen los polígonos de las bases es el número de caras laterales de forma rectangular o cuadrangular que tienen los prismas. También tienen vértices que son los puntos en los que convergen las aristas de las caras.

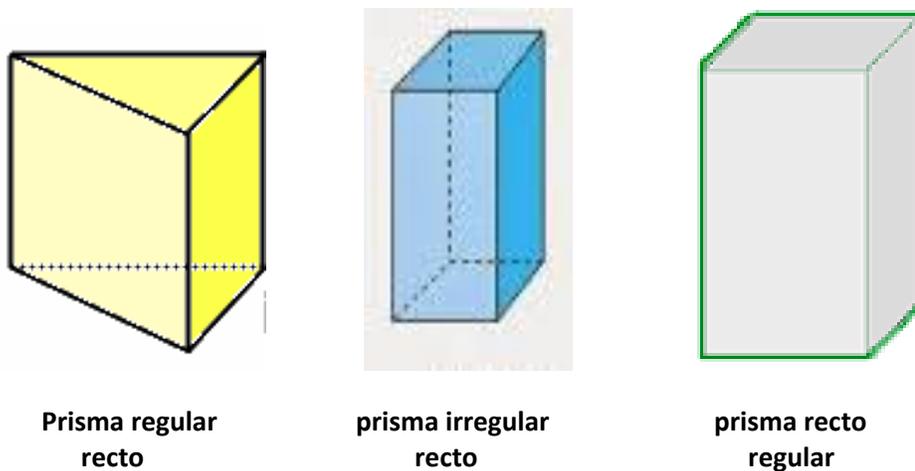


Imagen 2.7. Ejemplos de los prismas que se abordan en primaria

Fuente www.ceibal.edu.uy

Las caras laterales de los prismas siempre son paralelogramos, sin embargo, las bases pueden o no serlo. En caso de que las bases sean también paralelogramos se presenta un caso particular de prisma que se llama paralelepípedo (véase Figura 2.8). Son paralelepípedos el cubo o hexaedro regular (todas sus caras son cuadradas), el romboedro (sus bases son romboides) y el ortoedro (sus bases son rectangulares) (Cañizares, 2001).

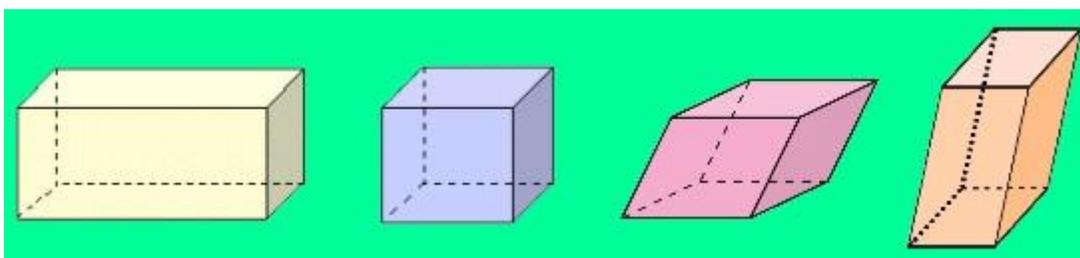


Figura 2.8. Ejemplos de paralelepípedos

Fuente www.ceibal.edu.uy

Estos objetos geométricos tienen diferentes características que son medibles y cuantificables como, por ejemplo, el área y su volumen, sin embargo, antes de pasar al tratamiento del área y del volumen de los prismas y pirámides en sexto grado de Educación primaria, es necesario abordar el tema de la magnitud, unidad de medida y medida.

Magnitud y medida

Considerando que las lecciones que abordan contenidos de geometría tridimensional a lo largo de la educación primaria en México, incluyen actividades que dejan ver de manera implícita el uso de magnitudes, unidad de medida y medida, es pertinente precisar estos términos. Además, es uno de los focos de atención para el análisis de las clases video-grabadas incluidas en esta investigación.

Mientras que Aristóteles presenta el concepto magnitud como una cantidad que puede medirse, para Descartes es toda cualidad que puede medirse (Frías, Gil y Moreno, 2001). De esta manera Fiol y Fortuny (1990 citado en Frías et al 2001:479) retoman diferentes definiciones de varios autores y precisan que magnitud es:

- Todo lo que es capaz de aumento o disminución.
- Las magnitudes son entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma.
- La cualidad común de un objeto de entes u objetos materiales que les hace igualables y sumables.
- Semimódulo ordenado sobre un semianillo de los números reales positivos.

A continuación se ejemplificará la magnitud aplicada a la longitud. La longitud es una cualidad de algunos objetos a esto se le llama magnitud de longitud, la longitud hace referencia a diferentes adjetivos opuestos como: largo, corto, ancho, estrecho, alto, bajo, grueso, delgado, profundo, superficial, etc.

La magnitud de longitud supone un conjunto de objetos homogéneos de los cuales se puede definir una suma o conteo de elementos para determinar una cantidad de magnitud. Esto quiere decir que a través de la comparación de una determinada cantidad de magnitud con otra fijada anteriormente como unidad de medida, se logra la identificación de una cantidad de magnitud con un número real positivo que expresa su medida (Frías et al 2001:483).

Si el mismo ejemplo lo trasladamos al tema del volumen de prismas, entonces diremos que el prisma es un objeto que tiene la cualidad del volumen, el cual puede ser medido. Los cm^3 que componen un prisma son los objetos homogéneos, éstos al ser sumados determinan una cantidad de magnitud en números reales o positivos.

Respecto al concepto de magnitud, Chamorro (2003: 225) afirma que está ausente de los currículos de la educación básica respecto a la comparación de magnitudes como superficie o volumen. La magnitud casi siempre responde a una característica física, a un atributo observable de los objetos como la longitud, masa, volumen, etc. Sin embargo, la definición de cualquier magnitud supone una abstracción que efectuamos al considerar como cantidad de magnitud un conjunto de objetos agrupados por una propiedad común que es ser iguales respecto a ese atributo (Chamorro y Belmonte, 1991:131). Tradicionalmente es considerado un tema difícil tanto para los niños como para los profesores, pues los profesores suelen limitarse sólo al cambio de unidades del sistema métrico-decimal utilizado de forma algorítmica para dominar de manera rápida las equivalencias entre unidades (Chamorro 2003).

En cuanto a la medida, ésta puede ser obtenida, dependiendo de la característica observable que se desee. Así por ejemplo, cuando se mide una longitud de un objeto se cuenta cuántas veces es necesario aplicar una unidad de longitud prefijada de antemano a ese objeto. Lo cual quiere decir que transportar la aplicación de esa unidad al objeto es una aplicación geométrica, mientras que contar cuántas veces esa unidad de longitud agota la longitud del objeto es un cálculo aritmético. En toda medición de cualquier magnitud longitud interviene alguna operación física propia de la magnitud y un cálculo aritmético efectuado en la comparación de la magnitud con una unidad fijada con anterioridad (Chamorro y Belmonte, 1991). Medir implica entonces hacer una elección de la unidad y obtener una síntesis de la partición generalizada a partir del uso de la unidad elegida (Chamorro y Belmonte 1991: 31).

Es importante retomar algunas consideraciones sobre la enseñanza de la medida, dado que esta tesis está vinculada con la medida de una magnitud, el volumen (Chamorro y Belmonte 1991:31-32).

La enseñanza de la medición debe iniciarse haciendo uso de algunas partes del cuerpo y objetos no graduados como unidades de medida no convencionales. La medida en una magnitud es un acto que los niños no pueden realizar de una forma fácil y espontánea y por ello es casi imposible la práctica de la medición hasta bien avanzada la enseñanza elemental [...] La medida no se adquiere de forma totalmente operatoria (es decir, sin ensayos) y con una comprensión inmediata. Una vez que el niño logra la medida operatoria, consigue identificar la unidad en unidades más pequeñas, descubriendo que tanto la unidad como los segmentos lineales en que la hemos dividido son múltiplos de alguna unidad más pequeña. En la mayoría de los casos se identifica el aprendizaje de las magnitudes y su medida con el conocimiento y dominio del sistema métrico decimal y se considera que han alcanzado los objetivos propuestos cuando el alumno efectúa conversiones con seguridad y rapidez. El problema de las conversiones es mucho más complejo ya que su comprensión se asienta sobre otros muchos conceptos que han tenido que ser adquiridos previamente.

El área es una propiedad o cualidad de una superficie que puede ser medible y que, por lo tanto, se puede asociar con un número que es el resultado de la medida (Moreno et al 2001: 503). Para el caso de un prisma, el área corresponde a la medida de la superficie que abarca cada una de sus caras y sus bases, expresada como área total del prisma. Esta puede ser expresada en unidades cuadradas según sea el contexto en el que se esté planteando el problema matemático. En el caso particular de los libros de matemáticas para quinto y sexto grado de primaria por lo regular se expresa en cm^2 y m^2 .

Medida del volumen y capacidad

Según Moreno et al (2001) en las matemáticas no se ha desarrollado algún modelo específicamente para medir la capacidad como tal, por lo que se recurre a su relación con el volumen para abordarla matemáticamente.

Según sean las características del volumen se puede diferenciar entre tratamiento unidimensional y tratamiento tridimensional. *El tratamiento unidimensional* mide el volumen utilizando como unidad una cantidad de volumen, por ejemplo el empaquetado o relleno de un prisma recto o paralelepípedo con unidades cúbicas, lo cual a su vez permite medir capacidades y llegar a deducir la fórmula de la capacidad de los recipientes en función de las dimensiones. Mientras que *el tratamiento tridimensional* mide el volumen de los cuerpos utilizando como unidad una cantidad de longitud y las tres dimensiones de los mismos. Al operar con estas dimensiones se obtiene el resultado con la letra que simboliza la unidad de longitud utilizada y el superíndice 3 que se deduce al conjugar las tres dimensiones (Moreno et al, 2001).

La manipulación y construcción de paralelepípedos con ayuda de policubos, según Chamorro (2003: 271), permite una mejor aprehensión de la fórmula manipulativa del volumen, gracias a la construcción de un modelo más rico. La enseñanza de un procedimiento unidimensional para calcular el volumen en educación primaria sería el más adecuado, dejando para la educación secundaria los aspectos de aritmetización que pone en juego el tratamiento multilineal o tridimensional. Esto da cuenta de no pretender el uso de fórmulas al calcular el volumen en el nivel que se tiene enfocado para este estudio.

En la educación básica mexicana y en particular, en los libros de texto gratuitos analizados para esta tesis, los contenidos que abordan los temas de geometría tridimensional en sexto grado de educación primaria son:

- Formas espaciales. Los cuerpos geométricos y sus elementos: vértices, aristas y caras.
- Cubo, prismas y pirámides.
- Relaciones entre cuerpos geométricos.

Los contenidos que implican el cálculo de áreas de prismas en los libros de texto tienen dos objetivos: uno es el de cuantificar áreas y otro es el de comparar áreas de superficies utilizadas en el armado y uso de prismas. El cálculo del volumen

sólo se aplica a los prismas y a los cubos presentados en las lecciones 17, 41 y 42 del libro de matemáticas de sexto grado y tiene un doble objetivo que es el de obtener y comparar el volumen de prismas y hexaedros regulares (o cubos). La lección 41 es la que se incluye en esta investigación.

2.4. Conocimiento Matemático para la enseñanza

El fin de la enseñanza es que los alumnos aprendan; sin embargo, no todo proceso de enseñanza produce aprendizaje (Flores, 2001). Es necesario que el profesor al momento de presentar su clase a los estudiantes tenga un conocimiento amplio del contenido, conozca el nivel de complejidad en el que será tratado el tema, pueda anticipar las dudas o preguntas que surgirán en los alumnos al momento de su clase, identifique las diferentes formas de aplicación del tema, distinga las diferentes formas de cómo los alumnos aprenden, y conozca en qué otros grados o lecciones es tratado el tema con diferente grado de complejidad.

El conocimiento para la enseñanza toma su caracterización desde los conocimientos del profesor que plantea Shulman (1986) quien contempla siete tipos de conocimiento. En este caso, sólo se retoman tres por considerarse de más relevancia para los subdominios del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT por sus siglas en inglés) de Ball, Thames & Phelps (2008).

Para Shulman (1986:11) los conocimientos del profesor deberían de enumerarse de la siguiente manera:

- conocimiento de la materia impartida;
- conocimientos pedagógicos generales, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente;
- conocimiento pedagógico de la materia: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- conocimiento de los educandos y de sus características;

- conocimiento de los contextos educacionales, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, o la gestión y el financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas;
- conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

A continuación se describen los tres tipos de conocimiento retomados de Shulman por Ball et al (2008), cabe decir que fueron tomados para diseñar un marco teórico² del conocimiento matemático para la enseñanza.

- *El conocimiento de la materia a impartir.* Con este conocimiento el profesor comprende por qué un tema en particular es central dentro de una asignatura, mientras que otro es auxiliar o complementario.
- *El conocimiento pedagógico de la materia.* Este conocimiento incluye los temas regularmente enseñados en una materia. Las maneras más útiles de representación de las ideas, las actividades más adecuadas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones; en una palabra, las maneras de representar y organizar la materia para hacerla comprensible a otros.
- *Conocimiento curricular.* El maestro conoce los materiales y los programas que sirven como herramientas para el quehacer del docente con un dominio eficiente para la enseñanza.

Estos tres tipos de conocimiento permiten al docente conocer qué matemáticas va a enseñar a los alumnos, tomando en cuenta que tiene un dominio de la misma y por lo tanto sabe identificar qué temas se pueden enseñar primero, cuáles van al intermedio y con cuáles puede culminar una enseñanza eficiente. También le permiten saber cómo enseñar pues no solo basta con tener el dominio del contenido matemático a enseñar sino que también se requiere de formas pedagógicas que le faciliten una enseñanza amena, entendible, clara y precisa de

² Este marco se ha construido a partir del análisis de las prácticas de profesores en la asignatura de matemáticas y se ha utilizado en programas de formación de docentes e investigaciones sobre prácticas en el aula.

la materia. Identifica así también el para qué enseñar sobre todo porque conoce el trayecto de la misma dentro de un programa educativo.

El conocimiento matemático para la enseñanza es un modelo multidimensional que permite analizar la práctica del profesor desde dos directrices: el conocimiento del contenido y el conocimiento de contenido pedagógico o conocimiento didáctico del contenido, es decir, permite analiza el conocimiento que posee el profesor de lo que enseña a partir del análisis de su práctica de enseñanza.

2.4.1 Subdominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Para efectos de análisis, Ball et al (2008) diferencian dos grandes apartados: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del contenido. A su vez, cada uno de estos, se subdivide en tres, a los cuales se les denomina subdominios como se ilustra en la siguiente figura.

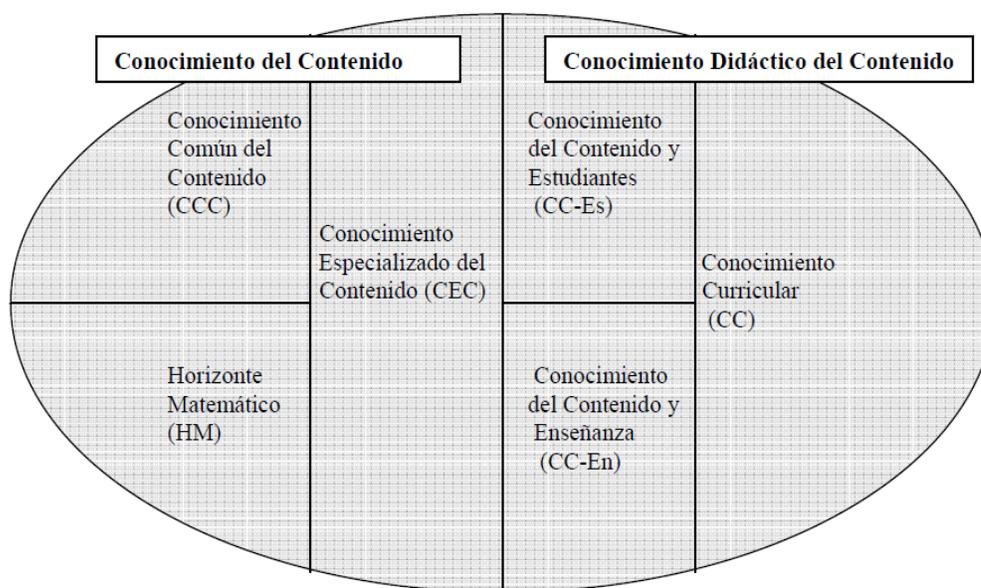


Figura 2.10 Dominios y subdominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball, et al, 2008 traducido por Sosa, 2011)

A continuación se describe cada subdominio tomando como referente lo que plantean Ball et al (2008) y se ejemplifican con la geometría tridimensional.

El *Conocimiento del contenido* abarca una cantidad de conocimientos organizados que el profesor posee. El profesor conoce el contenido que está enseñando y conoce el por qué debe enseñar ese contenido y no otro. El conocimiento del contenido se subdivide en conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y horizonte matemático.

- *Conocimiento común del contenido (CCC)*: Se refiere al conocimiento matemático y las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, se requiere que los profesores sean capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes. Cuando el profesor propone a los estudiantes calcular el volumen de un determinado prisma, presupone que el profesor sabe calcular el volumen de ese prisma e incluso ya tiene anticipado el resultado del planteamiento que hizo a los estudiantes.
- *Conocimiento Especializado del contenido (CEC)*: es el conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores. El CEC incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones que dan sus alumnos podrían funcionar en general o no. El profesor debe reconocer por ejemplo que existen relaciones entre el volumen y la capacidad de los prismas, pero que además esta relación puede romperse dependiendo del grosor de las caras del prisma o del objeto que puede ser llenado.
- *Horizonte matemático (HM)*: Es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas. Este subdominio incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la

importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular. El HM implica que el profesor identifique las relaciones matemáticas entre los contenidos de geometría tridimensional que está enseñando, así como el grado de complejidad con que es enseñado a lo largo de la educación primaria dicho contenido. Si por ejemplo se plantea ver el contenido del área y volumen de los prismas en sexto grado de primaria, el profesor puede considerar que ese contenido ya fue trabajado en cuarto grado donde se estudiaron las características de los prismas y en quinto grado donde se trabajó el armado y área de prismas y que por lo tanto, el contenido de los prismas al llegar a sexto grado implicará trabajar sus propiedades-características medibles y cuantificables como el área y el volumen aludiendo a los contenidos que se relacionan con el contenido abordado en la clase.

El *Conocimiento didáctico del contenido*, incluye los conocimientos que posee el profesor respecto a la enseñanza del contenido. Incluye las formas más útiles para ilustrar, ejemplificar, representar ideas y explicaciones más adecuadas para formular el contenido y hacerlo comprensible a los estudiantes. Son tres los subdominios que se proponen:

- *Conocimiento del contenido y los Estudiantes (CCEs)*: Se entiende como la unión de la comprensión del contenido y saber lo que los estudiantes pueden pensar o hacer matemáticamente. El CCEs implica que el profesor tome en cuenta el impacto que causará la enseñanza de un contenido de geometría tridimensional en los alumnos. Por ejemplo, saber que los estudiantes tienen dificultades para comprender por qué en el caso de las unidades cúbicas la equivalencia de unidades es de 1000 en 1000, o que asocian el volumen al tamaño y forma de los objetos tridimensionales con los cuales interactúan en la clase. Además de conocer que en sexto grado, los estudiantes confunden el volumen con el área del prisma, reflexionar por qué se les dificulta diferenciar entre uno y otro procedimiento.

El CCEs también implica que el profesor conozca las posibles respuestas que los alumnos darán a las tareas propuestas en la clase de matemáticas así como de las posibles dudas que les surgirán y lo que probablemente preguntarán. Además involucra, la identificación de los conceptos previos a la clase que llevan los alumnos, las dificultades de aprendizaje que se presentaran en los alumnos durante la clase de geometría tridimensional que ha preparado y las concepciones erróneas que llevan los alumnos respecto al contenido matemático que se va a enseñar. Cuando el profesor desarrolla el tema del área de los prismas, debe tener presente las respuestas que va a tener por parte de los estudiantes, así como la habilidad para identificar a los estudiantes que entienden el proceso para calcular el área de prismas con facilidad y los estudiantes que comprenden el tema del área de prismas con dificultad para poder actuar de la manera más óptima al momento de abordar la clase de cálculo de área de prismas. Esta información puede ser accesible a partir de la propia experiencia, pero es sustentada a partir de la didáctica de la geometría.

- *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEn)*: Se refiere a la conjunción de la comprensión del contenido y su enseñanza, del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñarlo. El CCEn lleva al profesor a buscar las formas más sencillas y eficientes para enseñar un contenido matemático. Lo anterior implica tener presentes diferentes métodos y procedimientos para presentar el tema, de tal manera que la enseñanza sea realmente significativa y entendida por el alumno. Así por ejemplo al enseñar el contenido del volumen de prismas, el profesor tomaría en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes respecto a los prismas, para posteriormente decidir con qué actividad empezar la clase. Por ejemplo, calcular el volumen de algunas cajas que tengan en físico, destacar los argumentos de los alumnos que permiten profundizar en el contenido e identificar aquellos errores que requieren ser discutidos y superados.

- *Conocimiento del Currículo (CC)*: Incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman (1986) en el conocimiento didáctico del contenido. Con el CC, el profesor conoce a profundidad el programa educativo en el que se incluye a las matemáticas como asignatura y la forma en cómo está estructurada esta asignatura a lo largo de la Educación primaria. También requiere que conozca los objetivos que persigue la Educación básica y los aprendizajes que se espera conozcan los alumnos al culminar su Educación Primaria para continuar con los aprendizajes que se pretenden lograr en la educación secundaria. El profesor debe saber que es en segundo grado cuando el estudiante comienza a trabajar con objetos tridimensionales mencionando algunas de las características observadas en las cajas que se le presentan para que las explore; que en tercer grado se abordan algunos cuerpos geométricos y el alumno identifica algunas de sus características para que en cuarto grado los estudiantes conozcan todas las características de algunos prismas y pirámides con sus respectivos nombres. De esta manera, en quinto grado el estudiante ya identifica algunas pirámides, algunos prismas y algunos poliedros regulares así como sus características y el armado de algunos prismas y pirámides. En el último año de la primaria, los estudiantes identifican algunos prismas, pirámides y sus características, para proceder con el cálculo del volumen y el área de prismas y para el caso de pirámides solamente el área, ya que el volumen lo trabajarán en la secundaria.

En esta tesis se considera que esta perspectiva teórica permite identificar los subdominios que emergen en una clase de geometría tridimensional y dá cuenta de los conocimientos de los profesores puestos en acción en sus clases.

3. METODOLOGÍA

La enseñanza de la geometría tridimensional en la educación primaria se aborda desde los primeros años de la educación básica en la asignatura de matemáticas, sin embargo, esta investigación se enfocará únicamente al sexto grado. Esta elección se justifica porque es en este grado donde se aborda el contenido del volumen de prismas, contenido elegido para el análisis en esta tesis.

El trabajo a realizar será de corte cualitativo con un alcance descriptivo, ya que estará basado en la especificación de lo que hacen las profesoras en sus clases de matemáticas, y lo que hacen los niños en función de lo que ellas les comunican. Este enfoque permite acercarse a la comprensión de lo que sucede en las prácticas de enseñanza así como cierta flexibilidad para la utilización de métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. Se enfoca más hacia una lógica y proceso inductivo, lo cual permite explorar lo que sucede en el aula.

En este proceso de análisis cíclico y continuo, se obtienen perspectivas y puntos de vista de los participantes así como un acercamiento a sus prioridades, experiencias, significados y otros aspectos que enriquecen las observaciones y dan sentido a las actuaciones de los docentes. En este sentido, se pueden recabar datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, lo cual permite describir y analizar los datos para vincularlos con el tema de estudio y profundizar sobre las tendencias personales; en este caso, de los profesores que estarán involucrados en mi objeto de estudio (Hernández et al, 2010).

3.1 Participantes en el estudio

La investigación se realizó en dos escuelas primarias públicas del Distrito Federal, una del turno matutino: Escuela Primaria Miguel Ramírez Castañeda, C.C.T. 09DPR2010I, clave económica 51-2416-241-34-X-023, zona escolar 241, sector 34 y otra del turno vespertino: Escuela Primaria Dr. Roberto Solís Quiroga, C.C.T. 09DPR3094N, clave económica 52-2483-511-33-X-023, zona escolar 511, sector 33, instituciones donde el autor de esta tesis ha estado laborando y que por ello, han dado las facilidades para la toma de datos.

Participaron tres profesoras de sexto grado, quienes se desempeñaban como profesoras de grupo y por tanto, impartían todas las asignaturas que son: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia, Formación Cívica y Ética y Educación artística. Este grupo de estudio fue tomado de manera intencionada, y se hizo un seguimiento a sus prácticas durante varias sesiones de clase, donde se abordaron temas vinculados con geometría tridimensional. El trabajo de campo se desarrolló durante trece meses en sesiones específicas como se muestra en la tabla 3.2.

Características de las profesoras

Es importante mencionar que las tres profesoras mostraron disponibilidad para ser observadas y video grabadas durante las clases de geometría tridimensional que impartieron. Para este estudio y por ética profesional, durante la descripción y análisis de los datos, se utilizarán los seudónimos Laura, Consuelo y Rosy. A continuación se describen las características de las participantes en cuanto a formación inicial, experiencia docente y, en particular, con los grados quinto y sexto de primaria.

Seudónimo de la profesora	Características
Consuelo	Es profesora normalista con 32 años de servicio frente a grupo, siempre ha trabajado con quinto y sexto grado. Tiene además la licenciatura en medicina, por lo que ejerce dos profesiones.

Laura	Es profesora normalista. No tiene licenciatura. Cuenta con 25 años de servicio frente a grupo, ha trabajado con todos los grados aunque los últimos 6 años los ha dedicado a quinto y sexto grado.
Rosy	Profesora normalista, no cuenta con una licenciatura. Tiene 27 años de servicio de los cuales los 10 primeros fue maestra de grupo, los 14 siguientes fue directora y los últimos 3, ha sido maestra de sexto grado.

Tabla 3.1. Características de las tres docentes participantes.

Sesiones observadas

En la siguiente tabla se muestra el trabajo de campo realizado y las clases videograbadas.

FECHA	ACTIVIDAD PROGRAMADA	Tema abordado	No. De lección
06/02/2013	Observación de clase (Profra. Laura)	Clasificación de prismas y pirámides por sus características.	Lección 40 quinto grado.
07/02/2013	Observación de clase (Profra. Laura)	Clasificación por sus características de prismas y pirámides.	Lección 40 quinto grado
01/04/2013	Observación de clase (Profra. Consuelo)	Volumen de prismas	lección 41 sexto grado
05/06/2013	Observación de clase (Profra. Rosy)	volumen de prismas	Lección 41 sexto grado
08/11/2013	Observación de clase (Profra. Laura)	Áreas de prismas y pirámides	Lección 15 sexto grado

13/11/2013	Observación de clase (profra. Laura)	Construcción de prismas y pirámides	Lección 16 sexto grado
10/12/2013	Observación de clase (Profra. Laura)	Volumen de prismas rectos	Lección 17 sexto grado
21/02/2014	Observación de clase (Profra. Laura)	Volumen de prismas rectos	Lección 41 sexto grado
22/02/2014	Observación de clase (Profra. Laura)	Equivalencias entre unidades de volumen y unidades de capacidad.	Lección 42 sexto grado

Tabla 3.2 Registro de las observaciones realizadas.

Los datos fueron registrados mediante videograbaciones de cada una de las sesiones de clase y se realizó la transcripción del video para seleccionar los episodios a analizar e identificar los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza evidenciados por las profesoras al momento de la clase de matemáticas cuando enseñan contenidos de geometría tridimensional.

3.2 Instrumentos para la recolección de datos

Para hacer las descripciones de los conocimientos empleados por las profesoras al impartir la clase de matemáticas se utilizaron tres acercamientos: Observación no participante, diario de campo y entrevista semiestructurada.

La observación permite obtener información sobre un fenómeno o acontecimiento tal y como éste se produce. Como lo plantea Rodríguez et al (1999), la observación es un procedimiento de recogida de datos que nos proporciona una representación de la realidad, de los fenómenos en estudio, además de tener un carácter selectivo que se guía por lo que percibimos de acuerdo con la cuestión que nos preocupa. De esta manera la observación es apoyada con la videograbación de las clases a analizar debido a que permite ver lo que sucede en

la clase de manera más detallada y apoya a la precisión de los episodios con que se trabajará en el análisis.

El diario de campo es una especie de diario personal en donde se incluyen las descripciones del ambiente o contexto, en el que se describen lugares y participantes, relaciones y eventos, secuencias de hechos o cronologías de sucesos, el por qué se recolectaron, su significado y contribución al planteamiento (Hernández et al, 2010), lo cual permite llevar cuenta de los acontecimientos que suceden, pero que no se pueden registrar en el video.

La entrevista, por su parte, permite mediante una guía de preguntas obtener datos sobre un problema determinado o de individuos mediante una interacción entre quien formula las preguntas y quien o quienes ofrecen las respuestas (Rodríguez et al, 1996). Con la intención de conocer algunos aspectos con mayor profundidad se utiliza la entrevista semiestructurada, la cual permite mediante una guía de preguntas introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados (Hernández et al 2010). Es decir, no todas las preguntas estuvieron predeterminadas. Este tipo de entrevista facilitó la recolección de datos no evidenciados por las profesoras en su clase como sus datos personales y algunos elementos que en la observación no participante quedan poco claros, como por ejemplo, la toma de decisiones ante preguntas de los alumnos, etc.

La observación no participante fue tomada en clases cotidianas, para esto, se tomó en cuenta a las profesoras participantes para que en un primer momento otorgaran fechas aproximadas en las cuales abordarían las clases de interés para este estudio. En la medida en que se aproximaba la fecha de la observación, se hacían los reajustes a la fecha e incluso en ocasiones se hicieron reajustes un día anterior a la fecha establecida. Cabe mencionar que en varias ocasiones se pospuso la fecha de observación debido a que se presentaban en la escuela acontecimientos no previstos e impredecibles como la aplicación de una evaluación estandarizada en línea que los estudiantes realizaron, la prueba de

Olimpiada del Conocimiento y el adelanto de la aplicación de exámenes bimestrales.

Los contenidos que abordan el volumen de prismas para sexto grado de primaria se abordan en dos bloques distintos Bloque II y IV por lo que hubo necesidad de ir a observar las clases de las profesoras en distintas fechas del año escolar.

Las observaciones fueron registradas durante los meses de noviembre y diciembre para el Bloque II de, mientras que las observaciones que corresponden al bloque IV fueron realizadas entre los meses de febrero, abril y junio. La recolección de datos se realizó del 6 de febrero de 2013 al 22 de febrero del 2014.

Considero importante mencionar que cada una de las clases que se observaron estuvieron conformadas por tres momentos principales a saber: inicio, desarrollo y cierre como se observa en las tablas de los anexos 3, 4 y 5.

3.3 Análisis de los datos: descripción de categorías e indicadores

Para efectos de análisis de las clases observadas se utilizará el sistema de observación categorial debido a que la observación se hará siempre desde categorías prefijadas por el observador, identificando los indicadores de las categorías de análisis desde la teoría o modelo explicativo del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por Ball y colaboradores. Sin embargo, los indicadores se fueron refinando durante el proceso de investigación.

3.3.1 Cuál es la unidad de análisis, cómo se elige y selecciona

Para hacer las descripciones de los conocimientos empleados por las profesoras al impartir su clase de matemáticas, se realizó la revisión y transcripción de las clases observadas y videograbaciones, para seleccionar los episodios a analizar. De esta manera se descubrieron los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza de contenidos de geometría tridimensional.

A partir de los indicadores diseñados por Sosa (2011) en un trabajo realizado con profesores de bachillerato, se seleccionaron aquellos de los indicadores que

podían ser adecuados para ser aplicados en profesores de Educación primaria, a la vez que se diseñaron indicadores específicos para efecto de análisis de las clases observadas sobre la enseñanza del volumen de prismas.

A continuación se citan los indicadores diseñados por Sosa (2011) y los indicadores específicos que se diseñaron para este trabajo de investigación (véase Tabla 3.4). Después de haber revisado los indicadores de la tabla que se muestra en el anexo 2, se seleccionaron los más adecuados tomando en cuenta el análisis de la lección, posteriormente se usaron para el análisis de las clases en las que se abordó el volumen de prismas impartidas por cada una de las tres profesoras usando el mismo libro de texto. Resultado del análisis, los indicadores específicos se fueron refinando.

Subdominio	Indicador de (Sosa:2011)	Indicador específico
CCC Conocimiento Común del Contenido.	CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.	Conoce la distinción entre área y volumen.
		Conoce una definición de volumen.
		Conoce que al comparar dos prismas continentes de diferentes dimensiones es necesario calcular el volumen de ambos.
		Conoce que los prismas tienen caras.
		Conoce que el hexaedro regular (cubo) tiene todas sus caras iguales.
		Conoce que el hexaedro regular (cubo) se incluye en el grupo de los prismas.
		Conoce características distintivas entre prismas y pirámides.
		Conoce de forma anticipada las actividades y sus respectivas respuestas que propone el libro de texto respecto al contenido.
		Conoce que todas las aristas de un hexaedro regular tienen la misma longitud.
		Conoce e identifica los prismas rectangulares como un tipo de prismas.
		Conoce que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular.
		Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.

	CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparecen en las definiciones formales).	Conoce la importancia de tener siempre presentes los términos matemáticos que aparecen en las definiciones formales durante todo el tiempo en que sea tratado el contenido.
	CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.	Conoce que para calcular el volumen de un prisma cuadrangular o rectangular (tratamiento tridimensional) una forma es comenzar por calcular el área de una de sus caras. Muestra solidez en el conocimiento, esto le permite hacer uso de distintos procedimientos para calcular el volumen.
CEC Conocimiento Especializado del Contenido	CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.	Conoce la causa matemática del error que cometen los estudiantes al calcular el volumen de prismas cuando confunden el área con el volumen.
	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.	Conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.
		Da indicios de que conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.
		Distingue entre el procedimiento unidimensional y el procedimiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.
		Se adentra en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún está en el tratamiento unidimensional.
		Conoce que una vez tratado el procedimiento unidimensional del volumen, se debe iniciar el tratamiento tridimensional para el cálculo de volumen de prismas.
		Se adentra en el uso del centímetro cúbico (cm^3) adjudicándoselo a unidades cúbicas.
		Conoce que se pueden utilizar unidades de medida de longitud no convencionales o poco usuales.
Conoce que cualquiera de las caras de los prismas puede ser tomada como su base.		

		<p>Conoce que el volumen de los prismas guarda cierta relación con su capacidad.</p> <p>Es lo suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición.</p>
<p>CC-Es</p> <p>Conocimiento del Contenido y Estudiantes</p>	<p>CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla del lenguaje común con matemático).</p>	<p>Conoce que se debe escuchar el conocimiento y pensamiento matemático de los estudiantes para interpretar lo que están comprendiendo acerca del volumen de prismas.</p>
	<p>CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.</p>	<p>Conoce las dificultades que tienen los estudiantes para identificar las tres dimensiones de un hexaedro regular cuando se tiene como dato único la medida de sus aristas.</p>
	<p>CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.</p>	<p>Conoce que cuando los estudiantes padecen un despiste y dan un resultado incorrecto, se les reorienta para obtener el resultado esperado.</p> <p>Conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el volumen de un prisma cuando todavía no dominan el contenido.</p>
	<p>CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder</p>	<p>Conoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.</p>

	ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.	Conoce que cuando un dato está ausente en una situación matemática y se presta a ambigüedades, se debe plantear un procedimiento consensuado para obtener ese dato.
	CCEs9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.	Conoce que cuando los estudiantes están siguiendo un procedimiento equivocado para calcular el volumen, se puede intervenir en el momento para favorecer un procedimiento adecuado.
	CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.	Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan el área con el perímetro.
		Conoce que para evitar que los estudiantes tomen decisiones erróneas al comparar capacidades de prismas es necesario insistir en el cálculo del volumen de ambos prismas.
CC-En	CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”.	Conoce el uso de palabras comunes para facilitar la comprensión de los estudiantes.
Conocimiento del Contenido y Enseñanza	CC-En38. Saber poderosas analogías para presentar o representar el contenido	Conoce que para centrar el tema de las características de los prismas es necesario acudir a una analogía que permita resaltar el contenido que se está tratando en la clase.

	matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.	Conoce que para que los estudiantes comprendan la representación de un prisma por niveles, se puede acudir a la analogía de prisma-edificio, niveles-pisos.
	CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.	Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida. Conoce que cuando los estudiantes utilizan unidades cúbicas en la representación de prismas, pueden dar una respuesta basada en sus propias construcciones.
	CC-En* Conocer recursos para trabajar un contenido.	Conocimiento de un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.
CC Conocimiento del currículum	CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.	Conoce que después de haber trabajado con los estudiantes el volumen de prismas, el siguiente tema a desarrollar es el volumen de pirámides.

Tabla 3.4 Indicadores específicos derivados de los indicadores de Sosa (2011) diseñados a partir del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball y colaboradores (2008)

4. ANÁLISIS DE LA CLASE DE VOLUMEN DE PRISMAS DE TRES PROFESORAS DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Se consideró pertinente, antes de hacer el análisis de la clase de las tres profesoras, hacer una breve descripción de la lección 41 del libro de matemáticas sexto grado, dado que es la lección que utilizarán en la clase las tres profesoras. Esta lección se compone de una actividad introductoria con dos preguntas a resolver como se observa en la imagen 4.1; la actividad 1 y el reto que se observan en la imagen 4.2; la actividad 3 y actividad 4 se muestran en la imagen 4.3. Se ignora el por qué se omite la actividad 2, parece que hay un error en la enumeración de las actividades para esta lección o implícitamente es que se toma el reto como actividad 2.

La actividad introductoria se localiza en la página 162 del libro de Matemáticas sexto grado. En esta actividad se muestran los prismas A, B, C y D a partir de los cuales se formulan dos preguntas que se muestran en la parte inferior de la página:

- De los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen?
- ¿Cuántos cubos más se necesitan para que el prisma C tenga el mismo volumen que el B?

Por lo que se observa, esta actividad muestra la representación paralela de cuatro prismas (Formas tridimensionales representadas en 2 dimensiones) a saber: dos prismas rectangulares (A y D), un Hexaedro regular o cubo (B), el cual se incluye dentro del grupo de los poliedros regulares, además de pertenecer a los prismas y un prisma cuadrangular (C). Lo podemos constatar en la imagen 4.1.

Calcula el volumen de prismas mediante el conteo de los cubos en que están divididos.

41

¿Cuántos cubos hay en el prisma?

Lo que conozco. Observa los prismas y contesta las preguntas.

♦ De los prismas, ¿cuáles tienen el mismo volumen? _____
 ♦ ¿Cuántos cubos más se necesitan para que el prisma C tenga el mismo volumen que el B? _____

162

Imagen 4.1. Problema introductorio de la lección (SEP, 2013: 162)

Las representaciones gráficas de los prismas que se observan en esta página permiten deducir que se empleará el tratamiento unidimensional para calcular el volumen y responder a las preguntas que se plantean, no se descarta que haya estudiantes que resuelvan la actividad utilizando el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.

La actividad 1 propone que los estudiantes calculen el volumen de los prismas A, B y C, además de que completen una tabla en la que habrán de identificar cantidades para alguna de las dimensiones de un prisma o la obtención de su volumen. Los prismas A y B permiten identificar las tres dimensiones (largo, ancho y altura) por medio del conteo de unidades cúbicas que están representadas de forma gráfica, mientras que el prisma C muestra solamente segmentos de recta que permiten deducir la medida de longitud de dos aristas del prisma (altura y ancho), no se observa la medida de longitud para la arista del largo del prisma. Véase la imagen 4.2.

1. En equipos, completen los prismas y obtengan su volumen. Consideren cada cubo pequeño como unidad de medida. Posteriormente, contesten lo que se pide.

Volumen: _____

Volumen: _____

Volumen: _____

¿Cuál será la manera más rápida de obtener el volumen de un prisma rectangular? _____

RETO Completa la tabla siguiente.

Ancho	Largo	Altura	Volumen
4	6	9	
4	7	10	
7	10		350
	8	8	192

163

Imagen 4.2. Actividad 1 de la lección (SEP, 2013: 163)

Por la manera en cómo están representados los prismas A y B de la Actividad 1, podríamos decir que parece que tienen representaciones isométricas sin embargo, la representación del prisma C muestra dificultad para definir el tipo de representación que se está utilizando de forma gráfica debido a que después de observar la figura, se midió con la regla cada uno de los segmentos del ancho y la altura quedando para la altura (8mm, 8mm, 8mm, 8mm, 8mm, y 8mm) 6 magnitudes de 8mm, mientras que para el ancho los segmentos tienen medidas de longitud distintas (9mm, 9mm, 8mm, 7mm y 6mm) parece que se trata de una representación de proyección en perspectiva, sin embargo, está faltando la medida de longitud de una de sus dimensiones. Si consideramos que 6 veces 8mm = a 48 mm y que la suma de los segmentos en que está dividido el ancho es 39, al hacer la división $39\text{mm}/5 = 7.8\text{mm}$, esto al redondear podría quedar como 8mm para cada segmento. Al medir con la regla el largo del prisma se tienen 56 mm, si se hace la división $56\text{mm}/8$ entonces podemos decir que la medida de longitud para el largo del prisma C es 7 unidades. Me parece que es importante en este apartado tomar en cuenta los tipos de representación que se están utilizando, además de hacer la observación de que en esta actividad se da transición entre los tratamientos unidimensional y tridimensional para el cálculo del volumen.

La tabla que se observa en la parte inferior de esta página (actividad 1) deja en claro que propone trabajar el tratamiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.

La página 164 propone las actividades 3 y 4. La actividad 3 plantea el problema:

Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa. El vendedor le propone los siguientes modelos:

Pecera A: 25 por 25 por 25

Pecera B: 30 por 20 por 26

¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenar? _____ ¿Por qué?
_____ véase imagen 4.3.

La actividad 4 pide resolver un problema en parejas:

A una juguetería llegaron 70 cajas con juguetes de forma cúbica. Las cajas miden 124 cm X 64 cm X 94 cm y cada juguete tiene 30 cm de arista.

¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? _____

Si las 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular ¿Cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho? _____ ¿Cuántas de fondo? _____

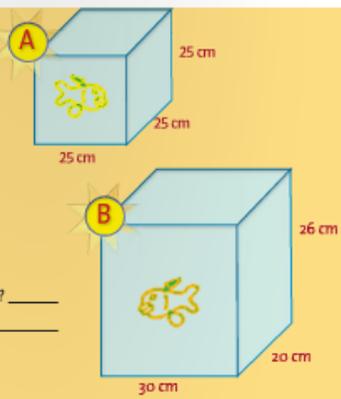
¿Cuántas de altura? _____

3. Resuelve el problema siguiente.

Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa. El vendedor le propone los siguientes modelos:

♦ ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? _____

♦ ¿Por qué? _____



El volumen de un cuerpo está relacionado con el espacio que ocupa. El volumen se calcula en unidades cúbicas, se llaman así porque en el cálculo intervienen tres dimensiones (largo, ancho y altura); así, se pueden tener metros cúbicos (m^3), decímetros cúbicos (dm^3), centímetros cúbicos (cm^3) o milímetros cúbicos (mm^3), entre otros.

4. En parejas, resuelvan el problema siguiente:

A una juguetería llegaron 70 cajas con juguetes de forma cúbica. Las cajas miden 124 cm x 64 cm x 94 cm y cada juguete tiene 30 cm de arista.

¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? _____

Si las 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular, ¿cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho? _____ ¿Cuántas de fondo? _____ ¿Cuántas de altura? _____

Consulta en...

<http://www.thatquiz.org/es/practice.html?geometry>
En esta página podrás poner en práctica lo aprendido en la lección al calcular el volumen de distintos cuerpos geométricos

Imagen 4.3. Actividades 3 y 4 de la lección 41 (SEP, 2013: 164)

Se observa que para las actividades 3 y 4 de esta lección al parecer se propone trabajar el tratamiento tridimensional para el cálculo de volumen, aunque no se descarta que algunos estudiantes o profesores prefieran trabajarlo desde el tratamiento unidimensional apoyándose en representaciones tridimensionales.

4.1. Análisis de la clase impartida por la profesora Consuelo sobre la enseñanza de volumen de prismas

Cabe destacar que los indicadores diseñados para los subdominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) por sus siglas en inglés, algunos fueron retomados y adaptados de los propuestos por Sosa (2011)³, y otros fueron contruidos para efectos de esta investigación como se muestran en la tabla 3.4.

Debido a que las fuentes de información para identificar el conocimiento matemático para la enseñanza, solamente han sido las transcripciones de las clases video-grabadas, algunos indicadores específicos no se observan en su totalidad por lo que no se puede afirmar contundentemente sobre los conocimientos que la profesora posee, sin embargo, dan información que permite acercarse a ellos. Se observaron también algunos aspectos que se consideran para esta investigación falta de conocimiento matemático para la enseñanza, los cuales se ponen de manifiesto en cada uno de los apartados respectivamente. No se descarta que Consuelo pudiera tener más conocimientos matemáticos de los identificados, no obstante, lo que aquí se presenta en los indicadores específicos, es lo que se logra apreciar desde la investigación basada en la observación no participante de una clase.

Conocimiento matemático para la enseñanza evidenciado

Conocimiento Común del contenido (CCC)

Respecto al indicador **CCC1**. *Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta*, ubicado dentro del sub-dominio Conocimiento Común del contenido del MKT, se encontraron cuatro indicadores específicos que dan cuenta del conocimiento acerca de los prismas que posee la profesora, estos se describen a continuación:

³ Los indicadores propuestos por Sosa (2011) fueron diseñados y aplicados a una investigación realizada con profesores del nivel medio superior.

- ✓ *Conoce que los prismas tienen caras.*
- ✓ *Conoce que una de las características propias del hexaedro regular (o cubo) es que todas sus caras son iguales.*

Estos indicadores específicos se dejan ver en la línea 13 cuando la profesora pregunta a los estudiantes acerca de las características de los prismas: “*Tienen caras, pero eso es con el cubo, estamos hablando de los prismas.*” Sin embargo, también se identifica un indicador específico en estas líneas con el que se observó que parece que la profesora desconoce que el cubo o hexaedro regular forma parte de los prismas.

- ✓ *Conoce que el hexaedro regular (o cubo) forma parte de los prismas.*

Parece también que la profesora:

- ✓ *Conoce e identifica los prismas rectangulares como un tipo de prismas.*

Esto se observó en la línea 27 al preguntarle a los estudiantes acerca de las figuras que observaban en su libro de texto: *Mtra: “Prismas rectangulares exactamente, ahí tenemos figuras en forma de prismas rectangulares”.* (Ver imagen 4.4).

Consuelo está de acuerdo con los estudiantes en que algunos de los prismas presentados en la primera página de la lección tratada en clase son rectangulares. Esta expresión pone de manifiesto que la profesora conoce e identifica parte de la clasificación de estos cuerpos geométricos involucrados en el tema del cálculo de volumen de prismas.

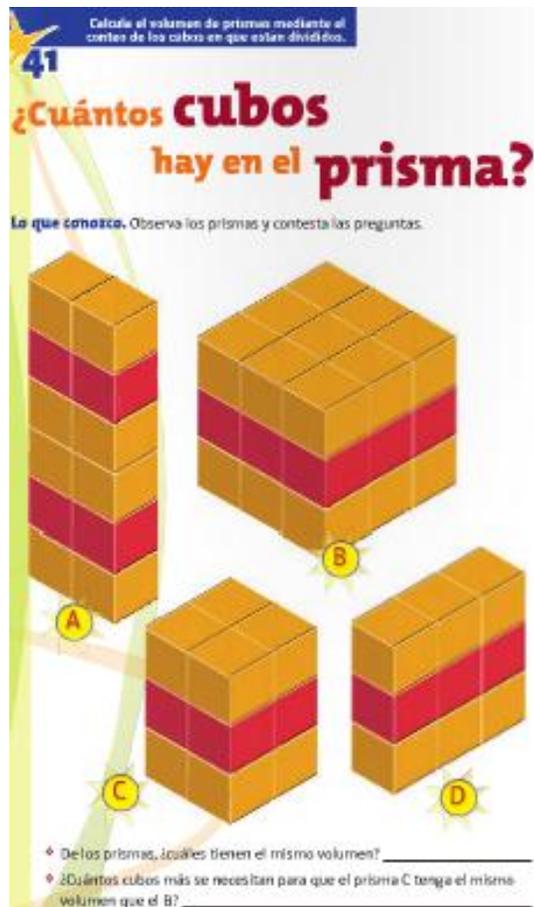


Imagen 4.4. Lección analizada (SEP, 2013: 162)

Otro de los indicadores específicos que se observan dentro de este indicador es que la profesora:

- ✓ *Conoce que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular (o cubo).*

Como se deja ver en las líneas 66-67: “Mtra. [Dirigiéndose a todos los equipos y con un dado en la mano dice:] la unidad de medida en este momento es el... dado.”

Al utilizar la profesora un dado para referirse a éste como una unidad de medida, pone de manifiesto su CCC haciendo referencia a que las unidades cúbicas mantienen la forma de un hexaedro regular, que ella lo nombra como *dado* por

tratarse del material concreto en el que se está apoyando para la enseñanza del volumen en esta lección.

Un cuarto indicador específico que pone de manifiesto Consuelo es que al parecer:

- *Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.*

Esto se observa en las líneas siguientes:

Líneas 135-137:

Estudiante M6: de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen? Es la A y la C.

Mtra: Oye, pero es que yo veo, algo diferente, si solamente veo como están eh, formados los cubos de la letra A y de la letra C ¿Por qué dices que son iguales? A ver ¿Quién me dice?

Líneas 140-150:

Estudiante M6: tienen la misma cantidad de cubos... Pero nunca cambia su número.

Mtra: ¿Su número o cómo le podemos decir?

Estudiante H8: Área

Estudiante H11. Volumen

Mtra: Su volumen [...] Muy bien, ¿Quién me dice? Y sí es la A y la C. ¿Los dos tienen el

mismo número de cubos?

Estudiantes varios: sí.

Mtra: Sí. Muy bien...

Este conocimiento es identificado debido a que la profesora por medio de preguntas lleva a los estudiantes a deducir la relación que hay entre ambos prismas en términos de su volumen. Es decir, que aunque estos dos prismas tienen diferente forma están contruidos con el mismo número de unidades cúbicas (la misma cantidad de dados fueron utilizados por los alumnos). Entonces, los dos prismas tienen el mismo volumen. El procedimiento utilizado por la profesora para llevar a los estudiantes a esta conclusión, da cuenta de que ella posee dicho conocimiento.

Conocimiento Especializado del Contenido (CEC)

En cuanto a este segundo subdominio del MKT se identificó uno de los indicadores de Sosa (2011) nombrado como **CEC5**. *Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.*

En este indicador se observaron tres indicadores específicos en los que la profesora parece que:

- ✓ *Distingue de manera implícita entre el procedimiento unidimensional y el procedimiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.*

Ella utiliza el tratamiento unidimensional como un puente para que los estudiantes comprendan el tratamiento tridimensional, siendo este último en el que se enfoca más durante la clase. No se observa que Consuelo diferencie entre uno y otro haciendo notar su utilidad para el cálculo de volumen. Esto se puede ver en las siguientes líneas:

Líneas 90-99:

Mtra: ¿Qué tomaron en cuenta para estas [...] para estas figuras que estamos formando[...]?

Estudiante H6: el número de dados.

Mtra: Sí pero ¿cómo se llaman?

Mtra: [Señalando la altura del prisma pregunta] ¿Qué es esto?

Estudiante H6: La altura.

Mtra: La altura, ¿Qué más?

Estudiante H6. [Señala en el prisma formado con cubos al mismo tiempo que dice] el largo

y el ancho.

Mtra: Muy bien. Ahora escriban el volumen en su libro. Muy bien.

Al pasar con otro equipo la profesora hace notar las tres dimensiones del prisma por medio de preguntas dirigidas a los estudiantes como se presenta en el siguiente diálogo (líneas 166-189):

Mtra: [...] ¿Quién me dice qué hicieron para hacer ese volumen?

Estudiante H9: base por altura.

Mtra: [...] No me digas base por altura dime qué hicieron.

[La estudiante M8 levanta la mano y la profesora se dirige a ella con la mirada para preguntarle]

Mtra: ¿Qué hicieron?

Estudiante M8: Multiplicamos.

Mtra: Exacto.

[...]

Mtra: A ver Estudiante M8.

Estudiante M8: Multiplicamos la base por...

Mtra: La base ¿Por qué?

Estudiante M8: por la altura y la profundidad.

Mtra: Y la profundidad, a la profundidad le podemos decir de otra manera. ¿Quién más?

Estudiante H10: Ancho.

Mtra: Ancho muy bien, entonces tenemos que tomar en cuenta tres, ¿[...] qué serán esas,

tres medidas[...]? ¿Cómo podemos manejarlo?

Mtra: Efectivamente, ¿Qué hace un prisma, qué tiene un prisma, qué características tiene

un prisma como éste? Pues tiene esas características, tiene largo, ¿Qué más tiene?

Estudiante H9: Ancho

Mtra: Ancho y ¿Qué más tienen?

Estudiante M6: Altura

Mtra: Altura

Como se muestra en la tabla 3.3. (Ver Anexo 3), identificamos que en las líneas 3-190 se ha trabajado la página 162 del libro de matemáticas sexto grado. En dicho

apartado de la lección, se plantea el tratamiento unidimensional del volumen de los prismas, sin embargo, en el desarrollo de la clase, la profesora ya ha integrado el largo, ancho y altura para obtención del volumen y ha dejado de lado el conteo de unidades cúbicas (tratamiento unidimensional). Parece que la profesora:

- ✓ *Se adentra en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún está en el tratamiento unidimensional.*
- ✓ *Conoce que una vez tratado el procedimiento unidimensional, se debe iniciar el tratamiento tridimensional para el cálculo de volumen de prismas.*

Estos dos indicadores específicos se observaron en las líneas 188-191:

*Mtra: [...] vamos a trabajar ahorita. Vamos a **contar largo, vamos a contar ancho y altura de esos prismas**. Pueden auxiliarse contando por equipo y tienen que llegar al mismo número. [...] Vamos a poner los volúmenes de esos prismas que están ahí. Bueno háganlo manejando en equipos, sí.*

Otra estrategia que evidencia que la profesora se adentra en la perspectiva tridimensional para calcular el volumen de los prismas, es vinculando un cálculo por niveles (capas), esto es calcular el área de la base y luego multiplicarlo por la altura. En las líneas 82-86 que están en el rango de la primera parte de la lección, donde se supone que se está trabajando el tratamiento unidimensional del volumen de los prismas, se aborda dicha estrategia.

Mtra: ¿Cuál es el área de la base? Señálamela.

Estudiante H5: [Señala la superficie de la base superior].

Mtra: Muy bien.

Estudiante H5: [Señala también la altura del prisma]. Altura del prisma.

Mtra: La altura del prisma. Muy bien. Anoten en su libro el volumen de este prisma.

Al parecer la profesora tiene interés por enseñar lo más rápido posible a los estudiantes el tratamiento tridimensional a partir de la superposición de cubos para que identifiquen que el volumen de un prisma se obtiene calculando el área de la base y multiplicando el resultado por la altura, lo cual da cuenta de que la profesora posee el conocimiento del tratamiento tridimensional del volumen y el

tratamiento unidimensional probablemente no lo conoce muy a fondo y solo lo utiliza como apoyo didáctico al enseñar el tratamiento tridimensional.

Se identificó también el indicador específico mediante el cual parece que la profesora:

- ✓ *Conoce que cualquiera de las caras de los prismas rectangulares puede ser tomada como su base.*

Como se observa en las líneas 82-84:

Mtra. ¿Cuál es el área de la base? Señálamela.

Estudiante H 5: [señala la superficie de la base superior del prisma]

Mtra. Muy bien

Parece que la profesora conoce que dependiendo de la posición que tenga el prisma rectangular, la base es la cara que se encuentra de forma paralela con la superficie que lo sostiene o la cara que descansa sobre la superficie que lo sostiene.

Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es)

Del Conocimiento del Contenido y Los Estudiantes, cuarto subdominio del MKT se retoma un indicador de (Sosa 2011) **CC-Es8**. *Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.*

En el primer indicador específico **CC-Es8** se observa que la profesora parece que:

- ✓ *Conoce que cuando un dato está ausente en una situación matemática y se presta a ambigüedades, se debe plantear un procedimiento consensuado para obtener ese dato.*

La ambigüedad en la figura C es que no hay una representación que permita deducir la longitud de una arista, como se observa en la imagen 4.5.

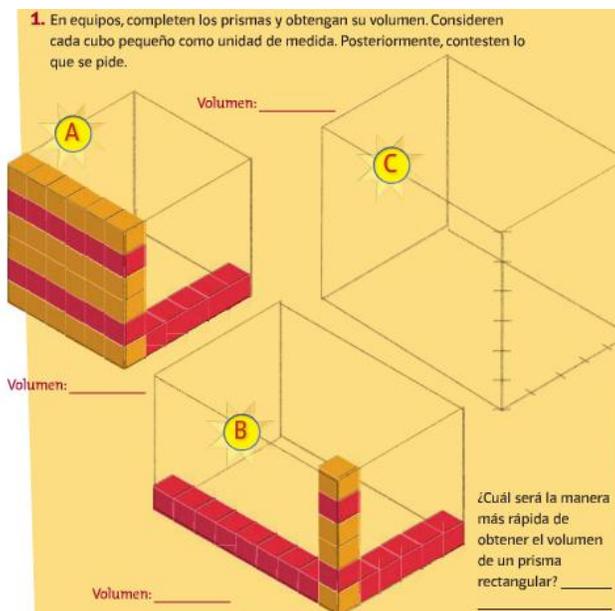


Imagen 4.5. Consigna de la actividad 1 (SEP, 2012: 163)

Ante dicha situación, se presenta el siguiente diálogo:

Líneas 236-285

Mtra: [...] ¿Qué hicieron para tomar las medidas del prisma que está en la letra C? [...] A ver, Estudiante H9 ¿Qué hicieron?

Estudiante H9. Medí con una regla.

Mtra: [...] ¿Quién hizo algo diferente? ¿Quién hizo algo diferente? [Señala a un estudiante con la mano y le pregunta.] ¿Tú también mediste con una regla?

Estudiante M5: Sí, pero medí lo de abajo para ver si lo de abajo tenía lo mismo de ancho.

Mtra: Si tenía lo mismo de ancho, ¿Tú mediste el ancho, Estudiante H7?

Estudiante H7: Yo medí cuanto medía una rayita, pero se complicaba con la regla en los palitos y yo medí los seis cubitos con la regla y luego ver cuántos cabían aquí en el ancho y en el largo, cuántos cubitos.

Mtra: Me puedes decir ¿Qué mediste? ¿Cuántos cubos están de largo en esa figura?

Estudiante H7: De largo eran 7, de ancho eran 4 y de altura eran 6.

Mtra: Otra vez ¿Puedes repetirla haber si alguien coincide?

Estudiante H5: De ancho son 5.

Estudiante H3: Son 6.

Mtra: 4, 5, 6 ¿Cómo vamos a saber?

Estudiante H5: Yo dije cinco.

Mtra: Ella dijo 4, y tú ¿Qué dijiste?

Estudiante H3: el 6.

Mtra: seis.

[Levanta la mano el estudiante H4 y la profesora le da la palabra]

Estudiante H4: Maestra es que cada una de las rayitas que tenemos en la altura mide un centímetro y si le ponemos cada un centímetro son cuatro cubos cerrados.

Mtra: Bueno recuerden cuando lo hicieron por unanimidad, muchas veces nuestras reglas no son exactas y no son exactas porque no es que hayas medido mal, es que muchas veces nuestros instrumentos son diferentes, sí, y van a tener diferentes medidas. Estudiante H4 en este sentido así va a ser.

Estudiante H7: A mí me dio 8 milímetros.

Mtra: En algunos casos a él, yo estuve ahí cuando él midió ¿Cuánto midió ahí en tu caso? ¿Cuántos milímetros?

Estudiante H8: Midió un centímetro casi.

Mtra: Un centímetro casi pero no exacto, eh contigo ¿sí midió un centímetro? Entonces con él sí, ¿También ustedes también un centímetro? Entonces puede haber diferentes medidas por esta situación, si nosotros eh... tomamos una medida exacta y una unidad, nuestros cubitos van a ser de un centímetro entonces, sí podemos tomar, podemos tomar, la medida del estudiante H8, pero si no, va a haber diferencias por lo que está diciendo el Estudiante H8, otro tipo de medida. Entonces vamos a tomarlas todas como de un centímetro, si es de un centímetro, Estudiante H8 dime de cuánto va a quedar la medida a lo largo de ese prisma.

Estudiante H8. A lo largo, es de 4.

Mtra: De 4.

Estudiante H6: ese es el ancho.

Mtra: De 4. Ese es el ancho, a lo largo, que entiendes por lo largo, largo.

Estudiante H4. Nueve.

Mtra: Nueve, está bien, nueve.

Estudiante H1. Diez.

Estudiante H2: once.

Mtra: Es que va a variar, entonces, ¿qué vamos a hacer? vamos a tomar una sola medida, eh, podemos tomar la medida de las líneas que están hacia la altura,

quiero que todos tomen su medida de las líneas que están a la altura, vamos a ver si son exactamente. ¿Cuántos cubitos tiene hacia la altura para poder colocarlos en la base.

Líneas 298-302:

Mtra: Ocho milímetros, ocho milímetros, ocho milímetros. Vamos a tomarlo en ocho milímetros. Entonces vamos a ordenarlo, todos van a ser de ocho milímetros, ocho milímetros, entonces ahora sí. Midan largo, ancho y altura y calculemos el volumen. Todos. ¿Ya lo tienes? Espérate, espérate.

[La profesora se dirige al equipo 2 y les dice:].

Mtra: Ahora sí, ya lo tienen, con eso calculen su volumen.

Debido a que en el prisma representado en el libro de texto de forma gráfica es una representación paralela y no se especifica una de las dimensiones del prisma además de que tampoco se puede deducir por la forma en que está representado, la profesora pone en juego su conocimiento del contenido y los Estudiantes. Para ello, la profesora considera la posibilidad de que el volumen que se está calculando no sea exacto, pero sí aproximado. Aunque no lo explicita en sus acciones. La profesora conduce a los estudiantes hacia el uso de la regla para que por medio de un consenso, se defina la medida de longitud de la dimensión que está faltando y así poder calcular el volumen del prisma C.

Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (CC-En)

Esta clase también nos permitió observar el Conocimiento del Contenido y su Enseñanza quinto subdominio del MKT. Se retomaron dos de los indicadores de (Sosa 2011) **CC-En38**. *Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.* Y **CC-En43**. *Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.* Se hizo necesario construir un nuevo indicador, **CC_En***: Conocer recursos para trabajar un contenido.

En el indicador **CC-En38** se observó que la profesora:

- *Conoce que para centrar el tema de las características de los prismas es necesario acudir a una analogía que permita resaltar el contenido que se está tratando en la clase.*

Como se deja ver en las líneas 12-14 cuando la profesora pregunta a los estudiantes acerca de las características de los prismas:

Estudiante M1: ¿Todos tienen dos caras?

Mtra: Tienen caras, pero eso es con el cubo, estamos hablando de los prismas. Los prismas es como hablar en una forma muy general y decir todos son niños, pero cada niño tiene ciertas características. Los prismas también van a tener ciertas características.

La profesora quiere que los estudiantes mencionen las características de los prismas a partir de ejemplificarlo con las características de los niños.

El indicador **CC-En*** se identificó con el indicador específico:

- *Conoce recursos para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.*

Este indicador específico se identificó en las siguientes líneas:

Líneas 59-62

Mtra: Ahora lo van a comprobar usando los dados. Los van a utilizar y van a formar la primera figura y me van a enseñar, y me van a enseñar la primera figura y me van a contar, perdón, y me van a decir qué volumen tiene la figura A pero formándolo con sus dados. Ya pueden abrir su material.

Líneas 111-112:

[...] muy bien. Esta actividad nos está sirviendo para darnos cuenta exactamente cuántos cubos caben en el prisma [...].

Lo anterior da cuenta de que la profesora conoce que un recurso para enseñar el volumen de prismas es el uso de material concreto el cual para este caso fue utilizar hexaedros regulares sólidos (dados) para la representación del volumen de prismas con unidades cúbicas.

Con el indicador **CC-En43** se observaron dos indicadores específicos con los cuales parece que la profesora:

- Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.

Este indicador específico se observa en las líneas 59-62:

Mtra: Ahora lo van a comprobar usando los dados. Los van a utilizar y van a formar la primera figura y me van a enseñar, y me van a enseñar la primera figura y me van a contar, perdón, y me van a decir qué volumen tiene la figura A pero formándolo con sus dados. Ya pueden abrir su material.

- Conoce que cuando los estudiantes utilizan unidades cúbicas en la representación de prismas, pueden dar una respuesta basada en sus propias construcciones.

En las líneas 71-73, se observa este segundo indicador específico.

Mtra: [Dirigiéndose al equipo 3]. Al formar esta figura, utilizaron los dados ¿Cuántos dados utilizaron?

Estudiante H4. Doce

Debido a que la profesora primero ha pedido a los estudiantes que formen los prismas con hexaedros regulares (dados), los estudiantes pueden dar una respuesta correcta que se basa en sus propias construcciones.

4.2. Análisis de la clase impartida por la profesora Rosy sobre la enseñanza de volumen de prismas

El análisis que se presenta a continuación da cuenta de los conocimientos observados en Rosy al impartir su clase de matemáticas, lección 41, de sexto grado ¿Cuántos cubos hay en el prisma? (SEP, 2012), se trata de la misma lección que desarrolló la profesora Consuelo.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza evidenciado

Los conocimientos identificados se ubican, según el MKT, en los subdominios: Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es) y Conocimiento del Contenido y su enseñanza (CC-En). Se describen en los siguientes apartados.

Conocimiento Común del Contenido (CCC)

El conocimiento Común del Contenido se observó por medio del indicador **CCC1**. *Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta* (Sosa, 2011) y se diseñaron ocho indicadores específicos a partir de lo observado en las clases video grabadas. A continuación se describen cada uno de los indicadores específicos y se citan las líneas en las que se evidencia dicho conocimiento.

- *Conoce una definición del volumen.*

Es un indicador específico que se observa en las líneas 5 y 6:

[La profesora inicia la clase escribiendo en el pizarrón el siguiente texto: “El volumen de un cuerpo está relacionado con el espacio que ocupa”].

A partir de esta información escrita por Rosy, parece que ella conoce una definición del volumen. Esta información coincide con un párrafo que presenta el libro de texto dentro de la lección 41 como se observa en la figura 4.3. Cabe decir que no se observó que la profesora transcribiera del texto.

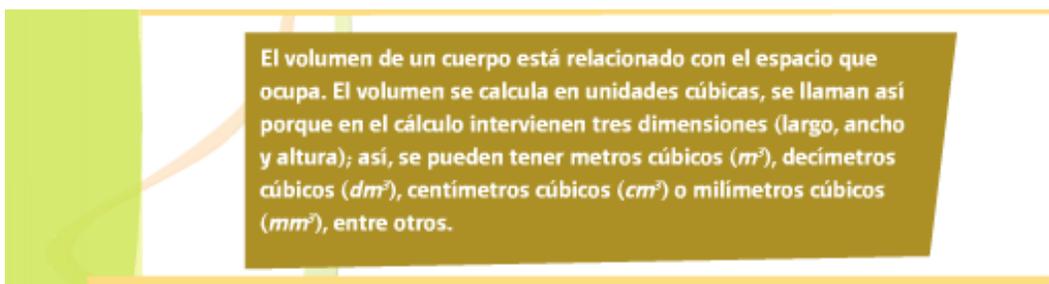


Imagen 4.6. Párrafo de la página 164 del libro de matemáticas sexto grado, lección 41 (SEP, 2013:164).

- *Conoce características distintivas entre prismas y pirámides.*

Este indicador específico se observa en las líneas 30-32. Durante esta actividad, la profesora pide a los estudiantes que copien dos prismas que ella trazó en el pizarrón usando una representación paralela. Al momento de ir revisando los trabajos de los estudiantes, se percató de que el Estudiante H5 había trazado un prisma y una pirámide en vez de los dos prismas que les había solicitado.

*Mtra. ... Estudiante H5 ¿y esto, **por qué termina en punta?***

Estudiante H3: Esa es una pirámide.

Mtra. Sí, exactamente y estamos con prismas.

Se observa que al parecer la profesora conoce que una de las características que distinguen a los prismas de las pirámides es la cúspide de las pirámides a lo que ella nombra punta.

- *Conoce que el hexaedro regular (o cubo) se incluye en el grupo de los prismas.*

Este indicador específico se observa en las líneas 46-51 y 61-62, diálogo vinculado con la actividad de la construcción de un prisma que la profesora hizo en el escritorio con hexaedros regulares y la primera actividad de la lección 41 del libro de matemáticas sexto grado.

Líneas 46-51

*Mtra. ...¿Cada unidad es un qué? **Un cubo**, ¿Cierto?, y estamos viendo **¿Cuántas, con 24 unidades cuántos prismas se pueden formar que sean diferentes**, que tengamos el mismo volumen pero que lo formemos de forma diferente. Ahora medimos, ¿qué vamos a hacer? Vamos a contar en el libro desde que ejemplifica los prismas y lo único que horita les está pidiendo. **¿Cuántos prismas tiene la figura A**, cuántos la figura B, cuántos la figura C, cuántos la figura D? anótenlo ahí.*

Líneas 61-62

*Mtra: Recuerden tomar en cuenta las tres dimensiones que habíamos hablado, saquen el vo... **la cantidad de prismas que tienen esas figuras**, esos, la cantidad de unidades [...].*

Se observa que cuando la profesora se refiere a las unidades cúbicas contenidas en un prisma, los nombra de manera indistinta como prismas y como cubos. Esto da cuenta de que la profesora al parecer conoce que el hexaedro regular o cubo pertenece al grupo de los prismas.

- *Conoce e identifica los prismas rectangulares como un tipo de prismas*

Indicador específico que se observa en las líneas siguientes:

Líneas 227-228:

Mtra. Muy bien ahora dice, ¿Cuál será la manera más rápida de obtener el volumen de un prisma rectangular? Estamos trabajando solamente con prismas rectangulares [...]

Líneas 284-285:

*Mtra. [...] Recuerden que **estamos trabajando con puros prismas rectangulares.***

Cuando la profesora recuerda a los estudiantes de que están trabajando con prismas rectangulares pone de manifiesto este tipo de conocimiento.

- *Conoce que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular.*

Este indicador específico se observa en diferentes momentos de la lección, en particular, en las líneas siguientes:

Líneas 46-49:

*Mtra. [...] **Cada unidad es ¿un qué? Un cubo, ¿cierto?,** y estamos viendo ¿Cuántas, con 24 unidades cuántos prismas se pueden formar que sean diferentes, que tengamos el mismo volumen pero que lo formemos de forma diferente.*

Líneas 96-99:

*Mtra. ... Individualmente completen los prismas y obtengan su volumen, **consideren cada cubo pequeño como unidad de medida**, posteriormente contesten lo que se pide. Vamos a contestar ahí las unidades para saber ¿Cuál es el volumen de esos prismas? Agarramos nuestra regla y completamos.*

Líneas 136-140:

*Mtra. No estamos midiendo, estamos, **el cubo de la medida que sea lo estamos ocupando como una unidad**. No es que tú lo midas y que mida medio centímetro, no. Tú estás viendo aquí por ejemplo este cubo [La maestra muestra a los estudiantes un cubo de cartulina] mide menos de 10 centímetros de arista, pero lo estamos tomando como una unidad, estás contando las unidades, no estás midiendo.*

En repetidas ocasiones la profesora indica que una unidad para medir el volumen de los prismas es un cubo considerándolo como un hexaedro regular. Lo que ella quiere resaltar es la importancia de la unidad cúbica sin importar la medida de la longitud de la arista del hexaedro que utiliza como unidad.

- *Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.*

Este conocimiento se puede identificar en las líneas 47-49:

*Mtra. ¿[...] con 24 unidades cuántos **prismas** se pueden formar **que sean diferentes, que tengamos el mismo volumen** [...]?*

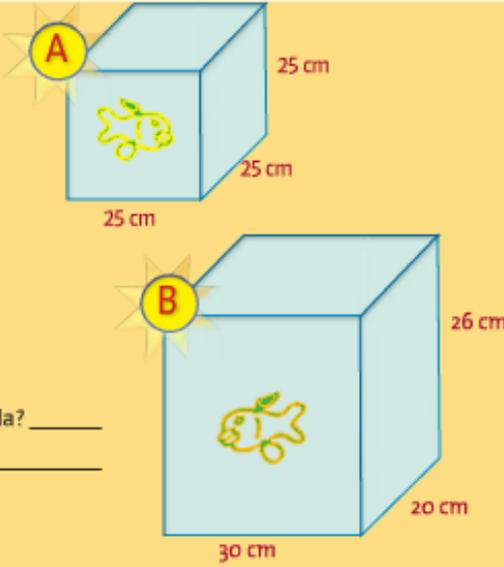
Con planteamientos similares a los ilustrados en el extracto anterior, permite suponer que la profesora conoce que dos prismas pueden tener formas diferentes con el mismo volumen. Conclusiones que se espera que los alumnos puedan construir.

- *Conoce que al comparar dos prismas continentes de diferentes dimensiones es necesario calcular el volumen de ambos.*

Este conocimiento se puede identificar en las líneas 300-305. Para aclarar este se presenta a continuación la ilustración del libro de texto en el que se presenta esta situación.

3. Resuelve el problema siguiente.

Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa.
El vendedor le propone los siguientes modelos:



♦ ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? _____
 ♦ ¿Por qué? _____

Imagen 4.7. Consigna de la actividad 3 (SEP, 2013: 164)

Líneas 303-308:

Mtra. Recuerden que para la actividad 3 en donde hay que resolver los problemas en equipo ¿Qué caja? dice ahí, resuelve el problema siguiente [La maestra lee la actividad] ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? ¿Qué quiere decir? La que sea más grande ¿No es cierto? Saquen el volumen de las dos peceras y díganme ahí por qué, por qué escogen una y no otra.

Se observa que la profesora sabe que para comparar dos prismas cuya medida de sus dimensiones es distinta una de otra, se debe calcular el volumen de ambos para posteriormente fundamentar cuál prisma tiene mayor capacidad. Aunque está como supuesto no explícito tanto en el libro como en el desarrollo de la clase, que el vidrio de las peceras son del mismo grosor.

Conocimiento Especializado del Contenido (CEC)

Acerca del CEC se encontró el indicador **CEC5**. *Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático* (Sosa, 2011: 455). Dentro de este indicador se generaron ocho indicadores específicos, los cuales se describen a continuación:

- *Conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.*

Este indicador específico se observa en las siguientes líneas:

Líneas 44-54:

Mtra. [...] Calcula el volumen del prisma mediante el conteo de los cubos en que está dividido. ¿Qué es lo que estamos haciendo? [...]

Mtra. [...] ¿Cada unidad es un qué? Un cubo, ¿cierto?, y estamos viendo ¿Cuántas, con 24 unidades cuántos prismas se pueden formar que sean diferentes, que tengamos el mismo volumen pero que lo formemos de forma diferente. [...] ¿qué vamos a hacer? Vamos a contar en el libro desde que ejemplifica los prismas y lo único que horita les está pidiendo. ¿Cuántos prismas tiene la figura A, cuántos la figura B, cuántos la figura C, cuántos la figura D? anótenlo ahí. [...] Contemos, hagamos el conteo.

Líneas 64-65:

Mtra. [...] Muy bien. ¿Quién me quiere decir cuántas unidades tiene el prisma A?

Líneas 76-77:

Mtra. [...] ¿Cuántas unidades tiene el prisma C Estudiante M7? ¿Cuántas? Haber cuenta bien [...]

Líneas 136-140:

Mtra. [...] el cubo de la medida que sea lo estamos ocupando como una unidad. [...]Tú estás viendo aquí por ejemplo este cubo [La maestra muestra a los estudiantes un cubo de cartulina] mide menos de 10 centímetros de arista, pero lo estamos tomando como una unidad, estás contando las unidades, no estás midiendo. Entonces ¿Cuántas unidades son?

Lo que se evidencia en estas líneas es que la profesora conduce a los estudiantes hacia el tratamiento unidimensional del cálculo de volumen de prismas en el que predomina el conteo de unidades cúbicas que caben en un prisma. A partir de estos datos creemos que Rocío conoce dicho tratamiento para calcular el volumen.

- *Conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.*

Este indicador específico se observa en las líneas siguientes:

Líneas 40-42:

Mtra. [...] anotamos esto en el **cuaderno estamos viendo lo que es volumen, ¿Cómo lo vamos a calcular, cómo utilizamos las tres dimensiones: largo, ancho y altura?** [...]

Líneas 119-121:

Mtra. ¿Cuál es el largo y cuál es el ancho este, Estudiante H4. [...]¿Cuál es el largo, el ancho y la altura?

Líneas 140- 155:

Mtra. [...] ¿Cuántas unidades son? Aquí de base, de ancho 6, de largo 6 y de altura 6. **Entonces multiplicamos 6 por 6 por 6 nos da 216**[...] En el otro, en la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho?[...]¿Cuáles son las medidas? [...] ¿Cuál es el largo?

Estudiante H8: 6 por 9

Mtra. [Escribiendo en el pizarrón a un lado de las aristas de un prisma que trazó en el pizarrón] 9, 6. Multiplicamos 9 por 6.

Estudiante H7: 54

Mtra: 54, nueve por 6 54 por 6.[...]

Estudiante H8: 324.

Mtra. 324 [La maestra escribe en el pizarrón 324 cm^3].

Líneas 227-246:

Mtra. Muy bien ahora dice, **¿Cuál será la manera más rápida de obtener el volumen de un prisma rectangular?** [...] ¿Cuál será la forma más rápida tú estudiante H10? ¿Tú qué piensas, cuál es la forma más rápida, después de hacer estos ejercicios, [...]

Estudiante H10: multiplicando.[...] Lo que te sale de la altura por la base por este, por lo de arriba.

Mtra. [...] pero ¿qué? Multiplicamos [...]

Mtra. Haber Estudiante H4.

Estudiante H4: Se multiplica base por altura por ancho

[La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación y da la palabra a la estudiante F6] [...]

Estudiante M6: largo por ancho por altura.

Mtra. **Largo por ancho por altura, multiplicamos y obtenemos el volumen.** Ahora [...] aquí [...] ya no estamos viendo visualmente el prisma, vamos a

*completar esa tabla.; ahí está el ancho, el largo y la altura. ¿Cuál será el volumen?
Hay números que faltan ahí, vamos a completarlo.*

Estas líneas que acabamos de revisar, dan cuenta de que la profesora se adentra en la enseñanza del tratamiento tridimensional del cálculo de volumen de los prismas, ello evidencia que al parecer la profesora posee dicho conocimiento Especializado del contenido. En este caso, Rocío ubica las dimensiones de largo, ancho y altura de cada prisma siguiendo la representación del libro de texto o del pizarrón. Sin embargo, no hay rotación del prisma rectangular para que los niños vayan identificando que cualquiera de las caras puede ser la base.

- *Se adentra en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún está en el tratamiento unidimensional.*

Indicador específico que se observa en las siguientes líneas:

Líneas 61-62:

Mtra. Recuerden tomar en cuenta las tres dimensiones que habíamos hablado, saquen el vo... la cantidad de prismas que tienen esas figuras, esos, la cantidad de unidades [...]

Líneas140-149:

Mtra. [...] ¿Cuántas unidades son? Aquí de base, de ancho 6, de largo 6 y de altura 6. Entonces multiplicamos 6 por 6 por 6 nos da 216[...] En el otro, en la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho? [...] ¿Cuáles son las medidas? [...] ¿Cuál es el largo?

Estudiante H8: 6 por 9

Mtra. [Escribiendo en el pizarrón a un lados de las aristas de un prisma que trazó en el pizarrón] 9, 6. Multiplicamos 9 por 6.

Estudiante H7: 54

Mtra: 54, nueve por 6 54 por 6.[...]

Estudiante H8: 324.

Mtra. 324 [La maestra escribe en el pizarrón 324 cm³ en el pizarrón].

Al momento en que la profesora introduce las tres dimensiones del prisma rectangular para calcular el volumen, aún cuando está en el tratamiento unidimensional, se puede observar que sin dejar de lado el concepto de unidad

cúbica Rocío combina estas dos estrategias para resolver los problemas planteados en el libro de texto. Creemos que estas intervenciones dan cuenta de Conocimiento Especializado que posee acerca del Contenido que aborda esta lección.

- *Se adentra en el uso del centímetro cúbico (cm^3) adjudicándose a las unidades cúbicas. Líneas 141-155.*

Mtra. [...] Entonces multiplicamos 6 por 6 por 6 nos da 216 ¿Qué? Le vamos a poner centímetros cúbicos (cm^3) [...] En el otro, en la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho?

[...]¿Cuáles son las medidas? [...]¿Cuál es el largo?

Estudiante H8: 6 por 9

Mtra. [Escribiendo en el pizarrón a un lado de las aristas de un prisma que trazó en el pizarrón] 9, 6. Multiplicamos 9 por 6.

Estudiante H7: 54

Mtra: 54, nueve por 6 54 por 6.

[...]

Estudiante H8: 324.

Mtra. 324 [La maestra escribe en el pizarrón $324 cm^3$].

Si bien en este apartado de la lección no se usan de manera explícita los cm^3 como unidades cúbicas para calcular el volumen de un prisma, parece que la profesora se adentra en su uso y no en el de las unidades cúbicas. Ejemplo de ello, es que para desarrollar la actividad propuesta en el libro de texto (Véase Imagen 4.8) promueve que sus alumnos consideren que cada cubo (amarillos o rojo) que se muestra en los prismas tienen de lado un centímetro (cm) para que puedan calcular las dimensiones de los prismas. Por ende, el cálculo del volumen de cada prisma se obtiene en cm^3 y no en términos de cubos o unidades cúbicas.

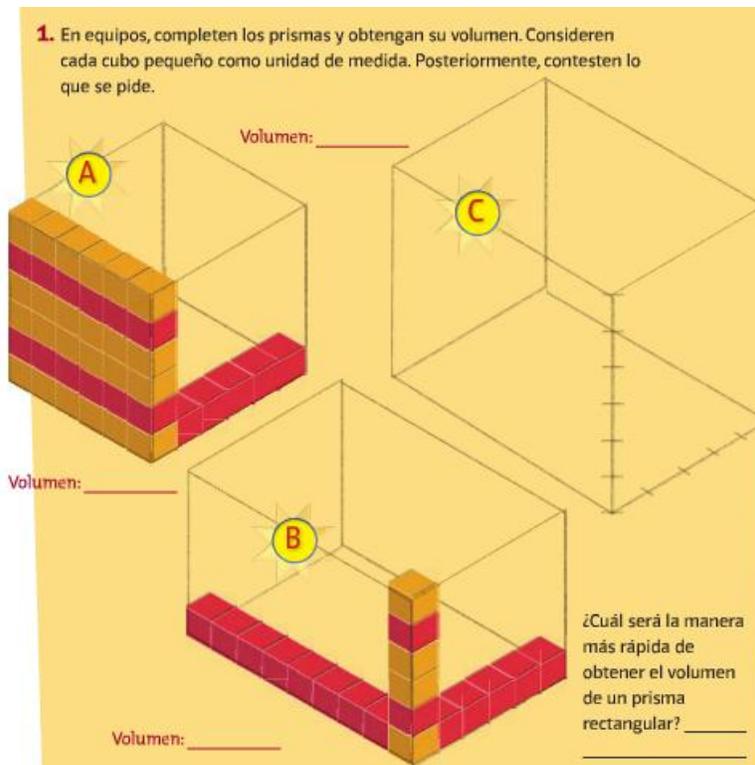


Imagen 4.8. Cálculo de volumen con unidades cúbicas, (SEP, 2013:162)

Introducir el cm^3 como una unidad de medida para calcular el volumen es una actividad posterior (ver imagen 4.9).

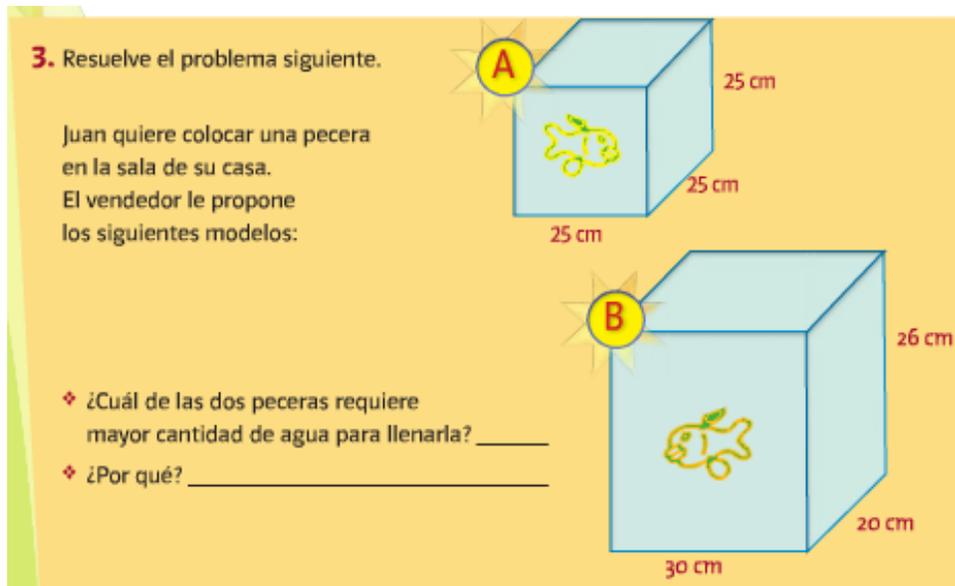


Imagen 4.9 Consigna de la actividad 3 (SEP, 2012)

- *Conoce que el volumen de los prismas guarda cierta relación con su capacidad.*

Indicador que se observa en las líneas 433-439.

Mtra. ¿Cuál es la pregunta del texto?

*Estudiante H8: **¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla?** ¿Por qué?*

Estudiantes varios: es la A

[La maestra mueva la cabeza en señal de aprobación]

Mtra. ¿Por qué estudiante H4?

Estudiante H4: porque es mayor su volumen.

*Mtra. **Porque es mayor su volumen.** Exactamente.*

Retomando la figura 4.9, podemos observar en las líneas citadas que probablemente la profesora conoce que cuando dos prismas están contruidos del mismo material pero con diferentes dimensiones pueden tener diferente volumen, aunque no siempre sucede así, por lo que, al tener diferente volumen, la capacidad de ambos será distinta pero estará relacionada con su volumen. Por ejemplo, en la lección 42. (SEP, 2012: 165) se trabaja la conversión que hay entre las unidades cúbicas de decímetro cúbico con litro.

- *Distingue implícitamente entre el procedimiento unidimensional y tridimensional para el cálculo del volumen de prismas.*

Indicador específico que se observa en las siguientes línea:

Líneas 61-62:

Mtra. Recuerden tomar en cuenta las tres dimensiones que habíamos hablado, saquen el vo... la cantidad de prismas que tienen esas figuras, esos, la cantidad de unidades [...]

Líneas 64-77:

Mtra. [...] Muy bien. ¿Quién me quiere decir cuántas unidades tiene el prisma A? [...]

Mtra. Haber estudiante H8.

Estudiante H8: 12.

Mtra. ¿Doce?

Estudiantes varios: sí, sí, sí doce. [...]

Mtra. Tiene 12 ¿Cierto? ¿Cuántas unidades tiene el prisma B estudiante M6)

Estudiante M6: 27

*Mtra. 27, muy bien. ¿Cuántas unidades tiene el prisma C Estudiante M7?
¿Cuántas? A ver cuenta bien...*

Líneas 85-86:

Mtra. ¿Cuántos tiene el prisma D, tú Estudiante H3?

Estudiante H3: 9

Líneas 119-133:

Mtra. ¿Cuál es el largo, el ancho y la altura?

Estudiante M7: El largo es de 6. [...]

Estudiante H6: 6 por 6 por 6. [...]

Estudiante H6: 6 por 6 por 6. 6 por 6 y lo que me sale lo multiplico por 6. [...]

Mtra. Es 6 por 6 y por 6. [Al mismo tiempo que lo escribe en el pizarrón en tres de las aristas de un cubo que dibujó la maestra extrayendo la imagen del libro.

Estudiante H10: Sale doscientos dieciséis.

Se puede observar en las líneas que se han citado que la profesora durante la enseñanza de esta lección hace una distinción (implícita) entre el tratamiento unidimensional y el tridimensional para el cálculo de volumen de prismas. Esta afirmación la sustentamos en que no se observó, en todo el transcurso de la clase, que Rocío expresará distinciones y relaciones entre uno y otro.

Otro indicador que se encontró dentro de este subdominio es:

- *Es lo suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición.*

Este indicado parece que se observa pero como una carencia respecto al mismo conocimiento matemático de la profesora, veámoslo en la imagen que se muestra a continuación y en las líneas 177-206:

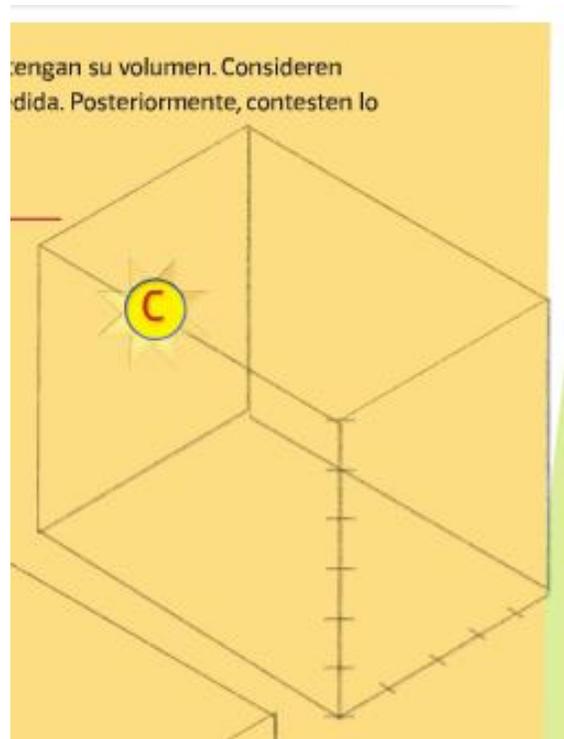


Imagen 4.10. Representación tridimensional del prisma propuesta en el libro de texto
 (SEP, 2012)

Mtra. [Dirigiéndose a un estudiante le dice] préstame tu regla.

[La maestra mide con su regla en su libro].

Estudiante H7: 1 centímetro es de dos cubos.

Estudiante H5: Son 5 centímetros.

Estudiante H8: son 6.

Mtra. Si está de medio centímetro, entonces cada uno de los lados son medio centímetro. Entonces si yo mido, sí, ¿Quién decía que 11? Son 11, [...]

Estudiante H8: 6.

Mtra. Pues no son tanto 9 Estudiante H10, son 4 centímetros, son 8.

Estudiante H8: si pero de altura son 9.

Mtra. ¿11 por ocho? [la maestra continúa midiendo la altura] de altura son 10, fíjate bien son 5 centímetro, cada una de las unidades está representando medio centímetro, son 10 unidades. Midan con su regla, midan. Cada una de las unidades que nos está representando el libro, mide medio centímetro, son cubos que miden medio centímetro.

Estudiante H9: son 5 centímetros y medio.

Mtra. Son 5, cuál 5 centímetros y medio. Apenas sí se completan los 5 centímetros, son 10 unidades, cuenten.

[Algunos estudiantes dicen no estar de acuerdo porque aseguran que son 5 centímetros y medio, a lo que la maestra responde]

Mtra. Es que no son 11, apenas sí se completan 5. A ver si es cierto.

Estudiante H9: [Se para y va con su libro y regla hasta donde está la profesora] Sí es cierto. Bueno, yo lo hice con regla y si es cierto.

[La maestra le señala en el libro del estudiante unas partes del prisma, al parecer el estudiante H9 está midiendo las aristas en otro orden distinto al de la maestra].

Mtra. Largo, ancho. Largo, ancho y altura. ¿Qué estás alegando? Está midiendo mal.

[...]

Mtra. Recuerden que en este cubo que está, en este prisma que está representado ahí, está el largo, el ancho y la altura. El largo es 11.

Estudiante H8: Son 11 por 10 por 8 entonces

Mtra. [La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación [...]]

Como se puede observar en la imagen a la cual hay que calcular el volumen, ya están dadas dos de las medidas de longitud en dos de las aristas, lo que hay que deducir es la medida de longitud de la tercera arista, sin embargo, lo que hace la profesora es desechar las medidas de longitud que ya están dadas en el prisma y mide con la regla cada una de las tres aristas diciendo a los estudiantes que tomen como unidad de medida de longitud medio centímetro para medir la longitud de cada una de las aristas.

Según lo que se observa en el prisma es que el ancho mide 5 unidades, la altura 6 y el largo no se sabe. Lo que hace la profesora es que al medir con la regla, ella obtiene 4cm para el ancho, 5.5 cm para el largo y 5cm para la altura. Ella lo traduce como 8 para el ancho, 11 para el largo y 10 para la altura.

Al hacer esto la profesora se observa que parece que no es lo suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición debido a que no toma en cuenta los datos que plantea el libro de texto para deducir un tercer dato, decide tomar una unidad de medida de longitud diferente a la que muestra el libro de texto y no

precisa en dejar claro a los estudiantes que ha cambiado la unidad de longitud para las tres dimensiones del prisma al calcular el volumen.

Me parece pertinente decir que lo que yo observo en la imagen 4.6 es que si se miden con la regla el largo, ancho y la altura del prisma, el largo mide 5.7cm, el ancho 3.9 cm y la altura 4.8 cm. Cada segmento en los que está dividida la arista de la altura del prisma mide 8mm y los segmentos de la arista del ancho miden 9mm, 9mm, 8mm, 7mm y 6mm. Si se suman los cinco segmentos de la arista del ancho y se divide entre cinco, tenemos que cada segmento mide 7.8mm. Lo cual quiere decir que si se redondea necesariamente se tienen 8mm, y si de largo se tienen 5.7 cm y se dividen entre 8 mm, esto nos da 7,1 mm, el cual si se redondea queda como 7mm. De esta manera se puede decir que el largo mide 7 u, el ancho 5 u y la altura 6u.

Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es)

Para el **CC-Es** se encontraron dos indicadores. Uno de Sosa (2011:457). **CC-Es18**. *Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.* Y otro que fue diseñado en esta tesis, **CC-Es*** *Conocer recursos para trabajar un contenido.*

En el **CC-Es18** se estableció un indicador específico, el cuales se describe a continuación:

- *Conoce que para evitar que los estudiantes tomen decisiones erróneas al comparar capacidades de prismas es necesario insistir en el cálculo del volumen de ambos prismas.*

Este indicador se observó en las líneas 303-308, vinculadas a la actividad mostrada en la Imagen 4.5.

*Mtra. **Recuerden** que para la actividad 3 en donde hay que resolver los problemas en equipo ¿Qué caja? dice ahí, resuelve el problema siguiente, Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa, el vendedor le propone los siguientes modelos y ahí les están dando la medida. **¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla?**, ¿Qué quiere decir? **La que sea más***

grande ¿no es cierto? Saquen el volumen de las dos peceras y díganme ahí por qué, por qué escogen una y no otra.

Parece que la profesora insiste en el cálculo del volumen de ambos prismas para que los estudiantes identifiquen cuál de las dos peceras tiene mayor capacidad. Al parecer, ella conoce que hay algunos distractores que pueden alejar a los estudiantes de la respuesta correcta. Aunque no se puede afirmar que Rosy los haya considerado en su clase, desde nuestro análisis (apartado 4.1) y los antecedentes revisados en esta tesis, algunos distractores podrían ser los siguientes:

- a) Al resolver el problema, los estudiantes podrían dejar de lado el cálculo del volumen y sólo basarse en las representaciones gráficas de forma isométrica que se presentan en el libro de texto (Gutierrez, 1998:196). De aquí se podría inferir, erróneamente, que la pecera de mayor capacidad es la B y no la A puesto que la pecera B a simple vista se ve más grande que la pecera A. Los alumnos deben analizar la información numérica de las longitudes de los lados.
- b) Los estudiantes podrían sumar las dimensiones de cada uno de los prismas aludiendo a uno de los errores que se presentan en el estudio que realiza Moreno y colaboradores (1998) en el que los estudiantes confundían el área con el perímetro y el área con el volumen. podría ser que para este caso, los estudiantes en vez de calcular el volumen se les ocurrió pensar en que por ser mayor la suma de las dimensiones del prisma B que las dimensiones del prisma A, es de mayor capacidad el prisma B.

Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (CC-En)

Dentro del subdominio **CC-En** se encontraron dos Indicadores de los diseñados por Sosa 2011: **CC-En25**. *Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”.* Y **CC-En43**. *Saber*

que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.

Para el indicador CC-En25 se diseñó el indicador específico:

- *Conoce el uso de palabras comunes para facilitar la comprensión de los estudiantes.*

Se observa en las líneas 30-32:

Mtra. [...] Estudiante H5 ¿y esto, por qué termina en punta?

Estudiante H3: Esa es una pirámide.

Mtra. Sí, exactamente y estamos con prismas...

La profesora utiliza la palabra punta para referirse a la cúspide de la pirámide sin que ello cause mayor problema de comprensión a los estudiantes respecto a la diferencia entre prismas y pirámides. Aunque no era el tema las características que diferencian a un prisma de una pirámide, lo que se evidencia es que la profesora conoce que se puede acudir al lenguaje común para hacer más explícito un contenido y para este caso, sacar del error al estudiante.

Para el Indicador CC-En43 se diseñó el indicador específico:

- *Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.*

Líneas 10-17.

[Mientras los estudiantes realizan en su cuaderno los procedimientos para calcular el volumen de un prisma rectangular, la profesora por su parte hizo la representación del mismo prisma cuyo volumen era de 24 unidades cúbicas de 10 centímetros de arista].

Mtra. [...] Aquí está otra, otra forma de poner los cubos, solamente tenemos 24 cubos.

Al hacer la representación de un prisma con hexaedros regulares la profesora pone de manifiesto su conocimiento respecto al uso de material concreto para la representación de prismas, sin embargo, consideramos que la actividad es más

enriquecedora y significativa si la realizan los estudiantes directamente y no solo observan lo que su profesora hace.

En cuanto al **CC-Es*** se estableció un indicador específico y se describe a continuación:

- *Conocimiento de un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.*

Se observa en las líneas 10-17:

[Mientras los estudiantes realizan en su cuaderno los procedimientos para calcular el volumen de un prisma rectangular, la profesora por su parte hizo la representación del mismo prisma cuyo volumen era de 24 unidades cúbicas de 10 centímetros de arista].

Mtra. [...] Aquí está otra, otra forma de poner los cubos, solamente tenemos 24 cubos.

Aún cuando los estudiantes no trabajaron directamente con los cubos (material concreto) para la construcción de prismas, como se evidencia en sus acciones, Rocío conoce que los hexaedros regulares utilizados como unidades cúbicas son un recurso para trabajar el volumen de prismas en el tratamiento unidimensional.

Algunas consideraciones que se logran ver como carencia de Conocimiento Matemático para la Enseñanza

En términos de las representaciones utilizadas en esta lección, hizo falta que la profesora estableciera relaciones y diferencias entre los hexaedros regulares o cubos utilizados como unidad de medida y los prismas a los que se les debía calcular su volumen. Por ejemplo, el prisma denotado en la lección como B, es un hexaedro regular o cubo. Cuestión que en el propio título de la lección pareciera que cubos son únicamente las unidades de medida.

Parece que la profesora desconoce la dificultad a la que se enfrentan los estudiantes al interpretar representaciones de cuerpos geométricos dependiendo el tipo de proyección utilizada (Gutierrez, 2008). Por lo tanto, es importante incluir en la enseñanza discusiones sobre el rol que juega cada uno de los prismas de forma particular en situaciones como ésta.

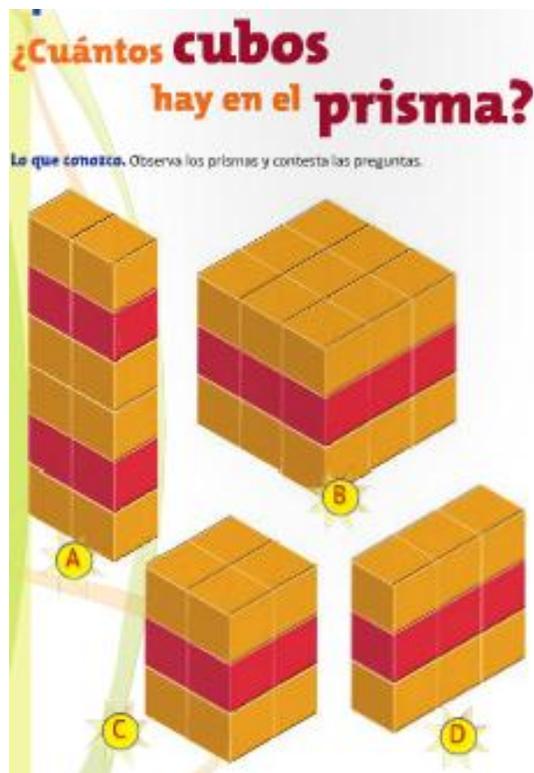


Imagen 4.11. Parte inicial de la lección 41 del libro de matemáticas sexto grado (SEP, 2013:162)

Por otro lado, para la actividad en la que hace falta información explícita sobre las medidas de una longitud de un prisma (ver imagen 4.), parece que la profesora desconoce el papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente cuando se mide. Líneas 159-210. Veamos primero el prisma C contenido en la imagen 4.12. Cabe aclarar que en el diálogo que veremos posteriormente la profesora nombra prisma B al prisma C.

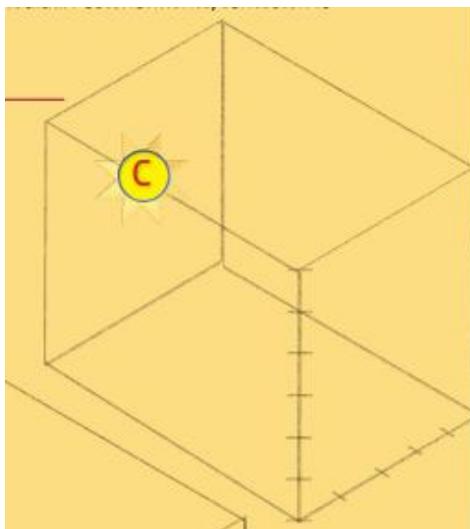


Imagen 4.12. Representación de un prisma que no muestra cuánto mide una de sus dimensiones (SEP, 2013:163)

Mtra. ... Ahora vamos a la figura que sigue, a la figura D ¿Cuánto es?

Estudiante H6: B

Mtra. A la B ¿Cuánto es?

Estudiante H8: 960

Estudiante H7: 360

Mtra. ¿Por qué, cuáles son las medidas?[...]

Estudiante M7: tiene de alto 6, de ancho 6 y de altura 6.

Estudiante H5: tiene la misma medida que la figura A.

Estudiante H5: no es cierto.

Mtra. Agarren su regla y tomen más o menos la medida de los cubos que están ahí ¿Cuántos son?

Estudiante H10: La de altura es de 7, la de largo es de 9.

Estudiante H9: de largo es 11.

Mtra. ¿De largo es once?

Estudiante H8: no es cierto maestra, de largo es 6.

Mtra. ¿6 qué?

Estudiante H8: 6 centímetros.

Mtra. [...] préstame tu regla. [...]

Estudiante H7: 1 centímetro es de dos cubos.

Estudiante H5: Son 5 centímetros.

Estudiante H8: son 6.

Mtra. Si está de medio centímetro, entonces cada uno de los lados son medio centímetro. Entonces si yo mido, sí, ¿Quién decía que 11? Son 11[...]

Estudiante H8: 6.

Mtra. Pues no son tanto 9 Estudiante H10, son 4 centímetros, son 8.

Estudiante H8: si pero de altura son 9.

Mtra. ¿11 por ocho? [la maestra continúa midiendo la altura] de altura son 10, fíjate bien son 5 centímetro, cada una de las unidades está representando medio centímetro, son 10 unidades. Midan con su regla, midan. Cada una de las unidades que nos está representando el libro, mide medio centímetro, son cubos que miden medio centímetro.

Estudiante H9: son 5 centímetros y medio.

Mtra. Son 5, cuál 5 centímetros y medio. Apenas sí se completan los 5 centímetros, son 10 unidades, cuenten.[...]

Mtra. Es que no son 11, apenas sí se completan 5. Haber si es cierto.

Estudiante H9: [Se para y va con su libro y regla hasta donde está la maestra] Sí es cierto. Bueno, yo lo hice con regla y si es cierto. [...]

Mtra. [...] Largo, ancho y altura. ¿Qué estás alegando? Está midiendo mal. [...]

Mtra. Recuerden que en este [...] prisma que está representado ahí, está el largo, el ancho y la altura. El largo es 11.

Estudiante H8: Son 11 por 10 por 8 entonces

Mtra. [...] ¿Por qué por 8? Es que no es posible que nada más les pongan el esqueleto donde ustedes lo tengan que llenar y no sean capaces de medir bien la unidad, cada una de las unidades está representada en esta parte del libro mide medio centímetro, si ustedes están tomando las medidas del cubo que no está marcando ninguna unidad, ¿No le pueden medir? [...]

Parece que la profesora deja de lado la unidad de medida de longitud que está marcada en dos de las aristas del prisma C. Rocío establece una unidad de medida para las tres aristas (largo, ancho y altura) definiendo como unidad de medida la mitad de un centímetro. Al hacer estos cambios en la actividad, la profesora deja entrever que desconoce las dificultades a las que se puede enfrentar a los estudiantes para resolver este tipo de ejercicios, debido a que su argumentación para cambiar la unidad de medida muestra desconocimiento de la

variedad de representaciones de objetos tridimensionales y su relación con la medida. En este caso, debido a que parece ser una representación en perspectiva la forma en la que está representado gráficamente el prisma no es posible obtener la medida correcta de cada dimensión. Como se mostró en el capítulo 2, apartado 2.2.2 *Los cuerpos geométricos y sus elementos*, solo es posible cuando se tiene una representación isométrica o paralela.

Otra carencia que se identifica, es que parece que Rocío desconoce que las respuestas incorrectas de los estudiantes se pueden aprovechar para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático, esto se observa en las líneas 142-154.

Mtra. ... en la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho?

Estudiante H10: 288.

Estudiante H7: 288.

Mtra. ¿Cuál es la base? ¿Cuál es? ¿Cuáles son las medidas? No estoy preguntando los resultados ¿Cuál es el largo?

Estudiante H8: 6 por 9

Mtra. [Escribiendo en el pizarrón a un lado de las aristas de un prisma que trazó en el pizarrón] 9, 6. Multiplicamos 9 por 6.

Estudiante H7: 54

Mtra: 54, nueve por 6 54 por 6.

Estudiante H5: 224

Estudiante H8: 324.

Mtra. 324 [La profesora escribe en el pizarrón 324 cm^3 en el pizarrón].

4.3. Análisis de la clase de la profesora Laura correspondiente a sexto grado, lección 41 ¿Cuántos cubos hay en el prisma?

El análisis que se presenta a continuación evidencia lo observado en esta maestra respecto a su Conocimiento Matemático para la enseñanza en los subdominios: Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es),

Conocimiento del Contenido y su enseñanza (CC-En) y Conocimiento del Currículum (CC).

Conocimiento Común del Contenido (CCC)

El conocimiento Común del Contenido se observó por medio de los indicadores **CCC1**. *Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.*, **CCC2**. *Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparecen en las definiciones formales)*, **CCC4**. *Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto* (Sosa 2011). Cada uno de estos indicadores se hace acompañar de uno o varios indicadores específicos pertinentes.

Para el indicador **CCC1**. Se observaron cuatro indicadores específicos, los cuales se describen a continuación:

- *Conoce la distinción entre área y volumen.*

Este indicador específico se observa en las siguientes líneas:

Líneas 201-204:

[El estudiante H7 pasa con la maestra a decirle el procedimiento que utilizó, [...]

Mtra. Pero estás trabajando área lateral. [...] Pues sí, eso te da área total.

Líneas 217-221:

Mtra. [...] ¿Siguen sacando área lateral y total?

Estudiante H12: ahora estaba sacando el área.

Mtra. Él estaba sacando el área lateral y luego lo sumó y sacó el área total. Pero si ya tienes 3 medidas, ¿Cuántas medidas necesitas para el volumen?

Líneas 353-355:

Mtra. [...] Volumen es todo lo que está dentro, ustedes primero estaban sacando área lateral y luego área total y ahora no sé que estaban haciendo por qué no les salía. [...]

Lo que se evidencia en las líneas anteriores es que la profesora había solicitado a los estudiantes calcular el volumen de un prisma, sin embargo, se percató de que

algunos estaban calculando el área del prisma. Su intervención da cuenta de que la profesora conoce y distingue ambas tareas, aunque no explicita cual es la diferencia entre el calcular el área lateral y total y calcular el volumen, qué datos pueden resultar relevantes (área de la base) para calcular el volumen.

- *Conoce que al comparar dos prismas continentales de diferentes dimensiones es necesario calcular el volumen de ambos.*

Indicador específico que se localizó en las líneas 504-521:

Mtra. Ahí están los dos modelos.

[Los modelos de peceras que se presentan en esta actividad son una pecera en forma de un hexaedro regular cuyas aristas miden 25 cm. Y una pecera rectangular cuyas aristas miden 30 cm, 20 cm y 26 cm., imagen 4.9]

3. Resuelve el problema siguiente.

Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa. El vendedor le propone los siguientes modelos:

❖ ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? _____

❖ ¿Por qué? _____

El diagrama muestra dos peceras. La pecera A es un cubo con aristas de 25 cm. La pecera B es un rectángulo con aristas de 30 cm, 20 cm y 26 cm. Ambas peceras tienen un dibujo de un pez en su frente.

Imagen 4.9 Descripción de la actividad 3 (SEP, 2012)

Estudiante H11: ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? (SEP, 2013:164)

Mtra: ¿Cómo?

Estudiante H11: ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? es la B

Mtra. Ahí están los dos modelos, ¿Por qué la B? ¿Porque está más grandota?

Estudiante H6: por las medidas.

Estudiante H11: Ajá por las medidas.

Mtra. Haber pero una cosa , [...]

Estudiante H7: Vamos a comprobar.

Mtra. Vamos a comprobar exactamente si es la B. sacar, ¿Qué tengo que sacar?

Estudiante H7: Largo por ancho por la altura.

Mtra. Largo por ancho por la altura, ¿qué es? ¿Qué es largo por ancho por la altura, qué es lo que vamos a obtener?

Estudiante H7: El volumen.

Mtra. El volumen, de la pecera A y de la pecera B. [...]

Lo que se observa en estas líneas es que la profesora conoce que para comparar la capacidad de dos prismas continentales cuyo material del que están hechos es el mismo, se debe calcular el volumen de ambos que tanto el libro de texto como Laura los distinguen como pecera A y pecera B.

- *Conoce de forma anticipada las actividades y sus respectivas respuestas propuestas en el libro de texto respecto al contenido.*

Es un indicador que se observa casi en todas las actividades de la lección excepto en dos, las cuales se citan en las líneas siguientes:

Líneas 552-562

Mtra. ¿Ya? ¿Cuánto salió?

Estudiante H11: Sí, estamos en lo correcto.

Mtra. ¿Estamos en lo correcto? ¿Cuál es la que necesita más agua para llenarla?

Estudiantes H11 y Estudiante H6: La B.

Mtra. La B, ¿Por qué?

Estudiante H6: Porque multipliqué 30 por 20 y luego lo que me salió lo multipliqué por 26.

Mtra. ¿Y por eso necesita más agua?

Estudiante H6: Sí. Porque saqué el volumen.

Mtra. ¿Ha porque sacó el volumen y?

Estudiante H6: Y lo que saqué lo convertí en litros, en mililitros.

Mtra. Y sí necesitamos más agua para el B. porque su volumen es mayor.

Si volvemos a la imagen 4.4, nos damos cuenta que de acuerdo a la información que muestra el libro de texto para esta actividad, la pecera A requiere 15.625 litros mientras que la pecera B solo requiere 15.6 litros de agua para llenarla. Lo que se observa en las líneas que se han citado para este indicador específico es que los estudiantes eligen la pecera B y la profesora les da la razón. Parece que la profesora desconocía en ese momento la respuesta del planteamiento, lo cual da cuenta de un desconocimiento anticipado de este apartado de la lección.

Líneas 739-759:

Mtra. ¿Ya? ahora contesten en su libro.

Mtra. Haber ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? Primero todos los juguetes, ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería?

Estudiante M6: 27 millones cuatrocientos... [Es interrumpido por la profesora]

Mtra. No,

Estudiante M3: 745 mil 984.

Mtra. ¿Cuántos juguetes llegaron? El resultado de su división. ¿Nadie lo tiene?

Estudiante H4: No sale.

Mtra. Si sale.

Estudiante H4: No sale.

Mtra. Síii.

Estudiante M2: No sale.

Estudiante H3: No sale.

Estudiante H11: Sale... noventa y...

Estudiante H6: no.[...]

[Se acerca la Estudiante M7 y le muestra su libro con un resultado que está pidiendo la profesora]

Mtra: [Observa el resultado y dice:] 27.62 [Moviendo la cabeza en señal de aprobación]. Sí, ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería?

Estudiante H11: 27. 62.

Mtra. 27 punto 62

El trozo que se ha citado corresponde a la primera pregunta del planteamiento que se presenta en la siguiente imagen:

4. En parejas, resuelvan el problema siguiente:

A una juguetería llegaron 70 cajas con juguetes de forma cúbica. Las cajas miden 124 cm x 64 cm x 94 cm y cada juguete tiene 30 cm de arista.

¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? _____

Si las 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular, ¿cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho? _____ ¿Cuántas de fondo? _____ ¿Cuántas de altura? _____

Imagen 4.13 planteamiento de un problema matemático que incluye el cálculo del volumen en la actividad 4 de la lección 41, (SEP, 2013:162)

Es claro que lo que está pidiendo el planteamiento en la primera pregunta es la cantidad de juguetes que llegaron a la tienda y no la cantidad de juguetes por caja. Lo que se deja ver en las líneas 754-775 es de que los estudiantes calcularon la cantidad de juguetes por caja y esa fue la respuesta que aprobó la profesora, al parecer la profesora desconocía la respuesta al planteamiento, lo cual da cuenta de un desconocimiento anticipado de este apartado de la lección.

- *Conoce que todas las aristas de un hexaedro regular tienen la misma longitud.*

Es un indicador específico que se observa en las líneas 595-628.

Mtra: [...] ¿Qué hacemos? [...] ¿Qué operación nos indica? El ¿Cuántas veces puede haber? 30 por 30 por 30, y luego vamos a ver cuántas veces cabe, éste de 30, por 30, por 30 en una cajototota. [...]

Mtra[...] [La profesora se dirige al estudiante H9 y le dice:] ya sacaste el volumen del juguete?

Estudiante H9: Ya.

Mtra: [...] vas a sacar el volumen del juguete, [Toma un exaedro de 10 centímetros de arista y le señala las aristas al mismo tiempo que le dice:] 30, cada arista tiene 30, 30, entonces ¿Qué se supone que es? Este también ¿cuánto mide?

Estudiante H9: 30.

Mtra: ¿Y de la altura? ¿entonces? Pero tiene que ser 3 medidas. Es como el de 25, 25 y 25. Ahora ¿Qué va a ser?

Estudiante H9: 30.

Mtra: Y... ¿Cuántas medidas tengo que tener, cuántas tiene?[...].

[...]

Estudiante H8: [toma el cubo de cartulina que tiene la profesora y señalando cuatro de sus caras le pregunta:] ¿Maestra lo multiplicamos por cada una de sus caras?

Mtra: Se supone que es como éste [La profesora señala la pecera de 25 X 25 que está representada en el libro y le dice al estudiante H8] ... se supone que es como éste, pero en vez de 25 es 30.

Estudiante H8: 30 por 30 por 30.

Mtra: Ándale.

Cuando la profesora muestra a los estudiantes la medida de las aristas del hexaedro regular y los orienta para que vean lo mismo en otra representación o incluso toma un hexaedro regular de cartulina para ejemplificar, se observa que lo hace porque espera que los estudiantes deduzcan que las demás aristas tienen la misma longitud, el hecho de que ella siga esa secuencia de acciones da cuenta de que ella conoce que todas las aristas del hexaedro regular tienen la misma longitud.

- *Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.*

Indicador específico que se observa en las líneas 711-733.

Mtra. [...] Ahora si 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular, según tienen 70 cubos ¿Cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho, cuántas al fondo y cuántas de altura? [...]

Mtra. [...], 70. La profesora [...] escribe el 70 en la columna de volumen? Hey solamente tengo 70. ¿Qué por qué [...] me da setenta?

Estudiante H6: 7 por 5 = 35 X 2.

Mtra. ¿Ancho?

Estudiante H6: 7

Mtra. ¿Ancho?

Estudiante H6: si, por 5

[La profesora Escribe en la tabla 7 para el ancho, 5 para el largo y 2 para la altura]

Mtra. Y otra.

Estudiante H6: Ha yo también sé.

Mtra. *¿Qué otra?*

Estudiante H4: *7 por 10 por 1.*

Mtra. *¿Otra?*

Estudiante H7: *7 por 1 por 10.*

Mtra. *¿Otra?*

Estudiante M6: *5 por 7 por 2.*

Lo que se observa en las líneas que se acaban de citar es que la profesora está de acuerdo con las medidas de longitud que los estudiantes aportan visualizando prismas de diferentes dimensiones pero de igual volumen, esto da cuenta de que la profesora conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.

El **CCC2** considera un indicador específico:

- *Conoce la importancia de tener siempre presentes los términos matemáticos que aparecen en las definiciones formales durante todo el tiempo en que sea tratado el contenido.*

Parece ser que Laura, desconoce la importancia que cobra el tener siempre presentes los términos matemáticos durante todo el tiempo en que es tratado el contenido. Parece que ignora la dificultad y confusión a la que se enfrentan los estudiantes cuando los términos matemáticos no son empleados adecuadamente. Parece que no distingue entre un poliedro y un polígono por lo que le da igual manejar un mismo concepto para ambos. Esto se observa en las líneas 100-103.

Mtra. [...] *¿Qué hicieron ustedes?*

Estudiante H6: *estábamos contando.*

Mtra. *Estaban contando los cuadritos.* *¿Y ya tienen el volumen de la A, de la figura A?*

Lo que se evidencia en estas líneas es que la profesora quiso decir que los estudiantes estaban contando los cubos, unidades cúbicas o hexaedros regulares que componen el prisma que estaba representado gráficamente en el libro de texto. Es evidente que los estudiantes están obteniendo el volumen de un prisma

por medio de tratamiento unidimensional. Esto me hace suponer que nada tenía que ver el concepto cuadritos (polígono regular), lo cual se refiere más bien a las unidades cúbicas (poliedro regular).

Para el CCC4. Se definieron dos indicadores específicos, los cuales se describen a continuación y se incluyen las líneas de la video captura que los refiere:

- *Conoce que para calcular el volumen de un prisma cuadrangular o rectangular (tratamiento tridimensional) una forma es comenzar por calcular el área de una de sus caras.*

Este indicador específico se observa en las líneas 121-123

Mtra. Haber ¿Qué hiciste?

Estudiante H6: primero sumé este y este y me dio 36.

Mtra. Haber sumé 6 por 6 = 36. Multiplicaste.

Es evidente que la profesora conoce que el tratamiento tridimensional para calcular el volumen de un prisma cuadrangular o rectangular se inicia calculando el área de una de sus caras lo cual se realiza por medio de una multiplicación.

- *Muestra solidez en el conocimiento, esto le permite comprender distintos procedimientos para calcular el volumen.*

Este indicador se localizó en las acciones de la profesora que se identifican en las siguientes líneas:

Líneas 122-143

Mtra: A ver ¿Qué hiciste?

Estudiante H6: Primero sumé éste y éste y me dio 36.

Mtra: A ver sumé 6 por 6 = 36. Multiplicaste.

Estudiante H9: No, primero multiplicamos este por este y nos dio 36, después lo multiplicamos por 6. [Señalando las caras del prisma].

Mtra: Por sus caras. 216, A ver, vamos a ver. ¿Estudiante H7 cuanto tiene?

Estudiante H7: Maestra, primero multiplique 6 por 6 = 36 y después por la altura 36 por 6 y me da 316.

Mtra: 36 por 6, a ver has tu multiplicación para que cheques. Vamos a ver lo que hizo el estudiante H7. Estudiante H7 y Estudiante M5. Estudiante H7 explícales, primero contamos...

Estudiante H7: Es que primero multiplicamos altura por ancho y después lo multiplicamos por largo. 6 por 6, después el resultado lo multiplicamos otra vez por 6.

Mtra: ¿Por qué altura primero?

Estudiante H7: Es que nosotros multiplicamos es que es para sacar lo de una pared, y después lo multiplicamos por 6 para sacarlo de todo.

Mtra: A ver ya, la Estudiante M5 ya está haciendo lo del primer paso. De dónde salió ese 36.

Estudiante H7: De multiplicar 6 por 6, después lo multiplicamos otra vez por seis y sacamos el resultado.

Mtra: A ver ¿Cuánto le salió a la Estudiante M5?

Estudiante H7: 216.

Mtra: Y ¿Cuánto te salió a tí? [Refiriéndose al Estudiante H7].

Estudiante H7: ¡Oh!

Mtra: ¡Oh! me imagino que en lo que está mal es en la multiplicación.

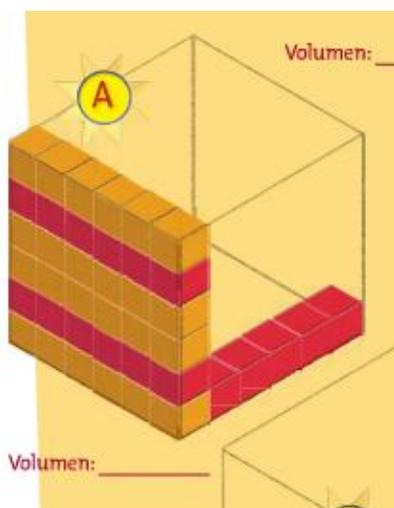


Imagen 4.14. Representación tridimensional de la actividad (SEP, 2013: 163)

Líneas 246-267:

Mtra:[...] a ver estudiante M9, explícame qué hiciste tú?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho.

Mtra: Multiplicaste, a ver escuchamos, dejamos de andar por todos lados, escuchamos, ¿Estudiante M9 qué hiciste?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho y después por las 6 caras.

Mtra: ¿Y después por qué?

Estudiante M9: Por las 6.

Mtra: ¿Largo por ancho?

Estudiante M9: Ajá, y después por las 6 caras.

Estudiante H6: No son iguales.

Estudiante H1: No son iguales las caras.

Estudiante H6: Es que ella quiere sacar un área.

Mtra: No, sí lo hizo bien. Pero no me está explicando.

Estudiante M8: No está explicando bien.

Mtra: No estás explicando bien ¿Qué hiciste? Si multiplicaste bien, pero no te has dado cuenta de que no fueron las caras lo que multiplicaste.

Estudiante H6: yo sí, yo sí, yo sí.

Mtra: [Refiriéndose al estudiante H6 le pregunta:] ¿A ver qué multiplicó?

Estudiante H6: Este, largo por ancho.

Mtra: Largo por ancho y ese 6 a qué corresponde.

Estudiante H6: Por altura.

Mtra: A los pisos del edificio, no a las caras, largo, por ancho y luego por la altura, no por las caras.

La profesora se percata de que los estudiantes H6 y H9, H7 y M5 han realizado procedimientos diferentes para calcular el volumen de este prisma que por sus características muy particulares es un Hexaedro regular, pero que además tiene la característica única de que su volumen da el mismo resultado que su área, es

decir, tiene 216 cm^2 de área y 216 cm^3 de volumen. Se observa que la profesora conoce que al calcular el volumen de un prisma con características muy particulares como es el caso de éste hexaedro regular o los prismas rectangular y cuadrangular, cualquiera de sus caras puede ser tomada como base. Parece que la profesora no se aferra a un solo procedimiento [largo por ancho por altura], sino que da libertad para que los estudiantes sigan su propio procedimiento como es el caso del estudiante H7 que multiplica la altura por el ancho y posteriormente por el largo. La profesora toma como válidos los procedimientos que le presentan los estudiantes, esto evidencia que la profesora muestra solidez en el conocimiento del contenido.

Vistos estos dos episodios desde otro ángulo, podemos decir que se observa en los estudiantes una confusión entre volumen y área y por eso el estudiante H9 se refiere a las 6 caras y no a las seis unidades cúbicas de altura.

La estudiante M9 para calcular el volumen de un prisma rectangular, primero multiplica largo por ancho y el producto lo multiplica por 6 pero hace referencia a las 6 caras y no a las 6 unidades cúbicas que tiene de altura el prisma. Por su parte la profesora se percató de que la estudiante M9 está empleando las caras y no la altura por lo que en el discurso, Laura valida el procedimiento de la estudiante H9 haciendo la aclaración de que no son las caras sino la altura del prisma a la que hace referencia el 6. Parece que la profesora conoce los procedimientos que están siguiendo los estudiantes y por tanto, acepta y/o corrige durante la clase las desviaciones de contenido que presentan los estudiantes. Esto habla de una solidez en el conocimiento del contenido.

Conocimiento Especializado del Contenido (CEC)

El CEC fue observado a través de los indicadores **CEC4**. *Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes* y **CEC5**. *Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.*

Para el **CEC4**. Se identificó un indicador específico el cual se describen a continuación y se incluyen las líneas de la transcripción del video que lo evidencian.

- *Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con volumen.*

Es un indicador específico que se observa en las líneas 246-280.

Mtra: [...] a ver estudiante M9, explícame qué hiciste tú?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho.

Mtra: Multiplicaste, a ver escuchamos, dejamos de andar por todos lados, escuchamos, ¿Estudiante M9 qué hiciste?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho y después por las 6 caras.

Mtra: ¿Y después por qué?

Estudiante M9: Por las 6.

Mtra: ¿Largo por ancho?

Estudiante M9: Ajá, y después por las 6 caras.

Estudiante H6: No son iguales.

Estudiante H1: No son iguales las caras.

Estudiante H6: Es que ella quiere sacar un área.

Mtra: No, sí lo hizo bien. Pero no me está explicando.

Estudiante M8: No está explicando bien.

Mtra: No estás explicando bien ¿Qué hiciste? Si multiplicaste bien, pero no te has dado cuenta de que no fueron las caras lo que multiplicaste.

Estudiante H6: yo sí, yo sí, yo sí.

Mtra: [Refiriéndose al estudiante H6 le pregunta:] ¿A ver qué multiplicó?

Estudiante H6: Este, largo por ancho.

Mtra: Largo por ancho y ese 6 a qué corresponde.

Estudiante H6: Por altura.

Mtra: A los pisos del edificio, no a las caras, largo, por ancho y luego por la altura, no por las caras. A ver estudiante M8, ¿Qué hiciste Estudiante M8?, escuchamos a la Estudiante M8.

Estudiante M8: Multipliqué 9 por 6, primero multipliqué nueve por 6 y lo que me salió lo multipliqué por 6 y lo que me salió es el... [La interrumpe la profesora].

Mtra: Pero 9 por 6 qué, a qué corresponde, a qué medidas corresponde.

Estudiante M8: 54.

Mtra: No a qué medidas corresponde, ¿Por qué 9? ¿Qué medida es de 9? ¿Cómo se llama la medida? ¿Cómo se llama?

Estudiante M8: Largo.

Mtra: El largo y luego el...

Estudiante H7: ancho.

Mtra: Ancho, y luego el...

Estudiante H1: La altura.

Mtra: La altura.

Laura identifica que la Estudiante M9 está diciendo que calculó el área de 6 superficies que miden 6×9 y no el volumen de un prisma que tiene 6 de ancho, 9 de largo y 6 de altura. Parece que la profesora se percata de que la Estudiante en su discurso está confundiendo el área con el volumen, esto le permite apoyarse en las preguntas que lanza a algunos de los estudiantes para hacerle notar a la Estudiante M9 que el volumen de un prisma rectangular en su tratamiento tridimensional se obtiene multiplicando las tres longitudes (largo, ancho y altura). Lo observado en estas líneas dan cuenta de que la profesora conoce que uno de los errores al calcular el volumen de prismas los estudiantes pueden estar confundiendo entre volumen y área.

El **CEC5**. Considera seis indicadores específicos, éstos se describen a continuación:

- *Conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.*
Indicador específico que se observa en las siguientes líneas

Líneas 7-8

[La profesora pidió a los estudiantes que se sentaran en equipos de 4 y que sacaran los prismas que armaron con hexaedros regulares de plastilina de un centímetro de arista el día anterior]

Líneas 34-42

Mtra. Observa los prismas y contesta las preguntas, aquí están planos los prismas, ustedes ya los tienen hechos enfrente, pónganlos enfrente, ya tienen hechas sus cuatro figuras: la figura A, la B, la C y la D. pónganlas en la misma posición en que están en el libro, sí, la A, la B, la C y la D. ¿Ya? Dice, de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen? ¿Cómo puedo saber? ¿Cómo puedo encontrar el volumen?

Estudiante H6: Contando los cubitos.[...]

Mtra. Contando los cubitos primero. Haber tomen sus figuras, cuenten los cubos, tomen sus figuras que hicieron, cuenten los cubos.

Los pasos que se observan en las líneas que se acaban de citar, son: 1. Pide a los estudiantes que hagan hexaedros regulares sólidos de plastilina. 2. Solicita a los estudiantes que construyan los prismas que están representados gráficamente en el libro de texto y 3. Que cuenten las unidades cúbicas que componen a cada uno de los prismas que construyeron con los hexaedros regulares de plastilina para conocer su volumen. Esto hace deducir que Parece que la profesora conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.

- *Da indicios de que conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.*

Indicador específico observado en las líneas siguientes:

Líneas 246-280

Mtra: [...] a ver estudiante M9, explícame qué hiciste tú?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho.

Mtra: Multiplicaste, a ver escuchamos, dejamos de andar por todos lados, escuchamos, ¿Estudiante M9 qué hiciste?

Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho y después por las 6 caras.

Mtra: ¿Y después por qué?

Estudiante M9: Por las 6.

Mtra: ¿Largo por ancho?

Estudiante M9: Ajá, y después por las 6 caras.

Estudiante H6: No son iguales.

Estudiante H1: No son iguales las caras.

Estudiante H6: Es que ella quiere sacar un área.

Mtra: No, sí lo hizo bien. Pero no me está explicando.

Estudiante M8: No está explicando bien.

Mtra: No estás explicando bien ¿Qué hiciste? Si multiplicaste bien, pero no te has dado cuenta de que no fueron las caras lo que multiplicaste.

Estudiante H6: yo sí, yo sí, yo sí.

Mtra: [Refiriéndose al estudiante H6 le pregunta:] ¿A ver qué multiplicó?

Estudiante H6: Este, largo por ancho.

Mtra: Largo por ancho y ese 6 a qué corresponde.

Estudiante H6: Por altura.

Mtra: A los pisos del edificio, no a las caras, largo, por ancho y luego por la altura, no por las caras. A ver estudiante M8, ¿Qué hiciste Estudiante M8?, escuchamos a la Estudiante M8.

Estudiante M8: Multipliqué 9 por 6, primero multipliqué nueve por 6 y lo que me salió lo multipliqué por 6 y lo que me salió es el... [La interrumpe la profesora].

Mtra: Pero 9 por 6 qué, a qué corresponde, a qué medidas corresponde.

Estudiante M8: 54.

Mtra: No a qué medidas corresponde, ¿Por qué 9? ¿Qué medida es de 9? ¿Cómo se llama la medida? ¿Cómo se llama?

Estudiante M8: Largo.

Mtra: El largo y luego el...

Estudiante H7: ancho.

Mtra: Ancho, y luego el...

Estudiante H1: La altura.

Mtra: La altura.

Líneas 320-341

Mtra: Ahora sí ¿Cuántas medidas tengo Estudiante H11?

Estudiante H11: Una.

Mtra: ¿Cómo que tengo una? Una, dos, tres, ¿Cuántas medidas necesito para sacar el volumen? [La profesora deja al equipo 4 y pasa con el equipo 5] A ver ahora esta figura.

Estudiante H7: Ya maestra.

Mtra: Ahora sí saquen el volumen. ¿Cuántas medidas necesitan?

Estudiante H8: Seis medidas.

Mtra: ¿Seis medidas, para qué? [Al mismo tiempo que la profesora señala las aristas de un prisma representado en el libro de texto, le pregunta al estudiante:] ¿Cuántas de estas necesitamos ahí para sacarlas?

Estudiante H8: Tres.

Mtra: Tres, entonces... [Al mismo tiempo que la profesora señala con su mano el largo, ancho y altura en el prisma que los estudiantes hicieron con hexaedros de plastilina, dice lo siguiente:] largo, ancho y altura. ¿Cuánto tienes de largo?

Estudiante H8: 9.

Mtra: ¿Y de ancho?

Estudiante H8: 6.

Mtra: ¿Y de altura?

Estudiante H7: 6

Mtra: ¿Entonces?

[Los estudiantes comienzan a calcular el volumen por medio de multiplicaciones con los datos que la profesora les ha ayudado a descubrir].

Líneas 375-378

Mtra. 7 anótale ahí. Tienes tres medidas ¿Puedes sacar ya el volumen?

Estudiante H7: sí.

Mtra. ¿Cómo lo vas a sacar?

Estudiante H7: Multiplico 5 por 7 por 6. Ahora sí verdad?

Líneas 446-453

Estudiante H7: multipliqué 4 por 6 = 24, luego 24 por 9 = 216 [...].

Mtra. Por qué multiplicaron largo, ancho y altura [...] Porque ese es el

[...] volumen, esas son las medidas que se necesitan para... calcular el volumen.

Líneas 516-521

Mtra. Vamos a comprobar exactamente si es la B. [...] ¿Qué tengo que sacar?

Estudiante H7: Largo por ancho por la altura.

Mtra. Largo por ancho por la altura, [...] ¿Qué es largo por ancho por la altura, qué es lo que vamos a obtener?

Estudiante H7: El volumen.

Mtra. El volumen, de la pecera A y de la pecera B.

Líneas 546-550

Mtra. Si, son tres medidas. [...] ¿Ahora si ya te diste cuenta? Son 3 medidas, las 3 medidas que están ahí, largo, ancho y altura, ahora sí.

Líneas 764-775

Mtra. [...] Si 70 cajas acomodadas forman un prisma, un prisma rectangular, ¿Cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho?

Estudiante H7: 5.

Mtra. ¿A lo largo, de fondo?

Estudiante H6: 7.

Mtra. ¿Y de altura?

Estudiante H6: 2.

Mtra. ¿De altura 2?

Estudiante H4: Si.

Estudiante H6: 5, 7, 2.

Mtra. 5,7, 2 y ¿Cuánto nos da de volumen?

Estudiante H7: 70.

Líneas 782-788:

Mtra. Entonces haber, recordando ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen?

Estudiante H6: tres.

Mtra. Tres ¿Cuáles son?

Estudiantes varios: largo, ancho y altura.

Mtra. ¿Cuáles son?

Estudiantes varios: largo, ancho y altura.

Mtra: largo, ancho y altura.

Lo que se observa en las líneas que se han citado para este indicador específico es que Laura insiste frecuentemente en el largo, ancho y la altura de los prismas así como en las medidas de longitud de sus tres dimensiones, indicando las operaciones matemáticas que se deben hacer para calcular su volumen. Ello evidencia que Laura da indicios de que conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.

- *Se adentra en el uso del centímetro cúbico (cm^3) adjudicándosele a las unidades cúbicas*

Indicador específico que se observa en las líneas 22-227.

Mtra: ¿Cuál es su unidad de medida del volumen?

Estudiante H4: ¿El centímetro cúbico?

Mtra: El centímetro cúbico. ¿Tienen ahí un centímetro cúbico?

Estudiante H4: sí.

Mtra: A ver enséñame un centímetro cúbico.

[El estudiante H4 muestra un hexaedro regular de plastilina que mide un centímetro de arista].

La profesora no solo relaciona el cm^3 con un hexaedro regular sino que también lo representa con los estudiantes haciendo Hexaedros sólidos de plastilina cuyas aristas miden un centímetro. De tal manera que cuando Laura pregunta a los estudiantes acerca de la unidad de medida del volumen, aunque no es la única pero sí práctica por su manipulación didáctica, los estudiantes contestan que es el cm^3 . Esta manera de representar el cm^3 y asociarlo a las unidades cúbicas da

cuenta de que Laura conoce y utiliza el cm^3 adjudicándoselo a las unidades cúbicas.

- *Distingue implícitamente entre el procedimiento unidimensional y tridimensional para el cálculo de volumen de prismas.*

Indicador específico observado en las líneas 59-79.

Mtra: Está ahí incompleto cada prisma. ¿Cómo podríamos completarlo? En primer lugar dice, completa el prisma, ¿Necesitamos completarlo? ¿Sí necesitamos Estudiante H5 completar los prismas?

Estudiante H5: Sí.

Mtra: ¿Llenarlos de cubitos?

Estudiante H5: No.

Mtra: A ver Estudiante H5, ¿necesitamos?

Estudiante H5: No.

Mtra: Tú qué opinas estudiante H7, ¿Necesitamos? Porque te veo ya con el lápiz. A ver ¿necesitamos completar los prismas?

Estudiante H7: También podemos multiplicar.

Mtra: También podemos ¿Qué?

Estudiante H7: Multiplicar.

Mtra: Multiplicar, ¿Tú qué estabas haciendo?

Estudiante H7: Estaba multiplicando base por altura y después por ancho.

Mtra: Él estaba multiplicando base por altura y por ancho.

[La profesora se dirige con la mirada al estudiante H8 y le pregunta:]

Mtra: Y tú ¿Qué estabas haciendo?

Estudiante H8: Contándolos.

Mtra: Contando los cubitos, entonces completa, completen, cada quien tiene su método de sacar el volumen.

Las líneas que se acaban de citar dan cuenta de que los estudiantes refieren ambos procedimientos para calcular el volumen (tratamiento unidimensional y

tratamiento tridimensional), la profesora por su parte da libertad a los estudiantes de que cada quien obtenga el volumen de los prismas de acuerdo al método que prefiera. Parece que Laura distingue implícitamente entre el procedimiento unidimensional y el tridimensional para calcular el volumen de prismas aunque no se observa que precise el tratamiento unidimensional de manera insistente como lo hace con el tridimensional.

- *Conoce que se pueden utilizar unidades de medida de longitud no convencionales o poco usuales.*

Indicador específico que se observa en las líneas siguientes:

Líneas 292-308:

Mtra: [...] ¿Cuántas medidas tiene [...] la figura C Estudiante H6,[...]

Estudiante H10: Una.

Mtra: Nada más una ¿Qué podemos hacer para obtener la otra?

Estudiante H2: ¿Multiplicando?

Mtra: ¿Multiplicando? Pero si no tenemos medida, por qué lo vamos a multiplicar? [La profesora saca un folder de cartulina de su estante y regresa con el estudiante H10]. ¿Tienes unas tijeras? Vamos a hacer la reglita medidora de cubos [la profesora recorta una tira de cartulina]. Vamos a medir ésta, la única medida que tenemos, la voy a marcar en esta reglita, esta va a ser mi reglita para medir las otras aristas. [Con la tira de cartulina que cortó la profesora, hizo una regla graduada tomando como unidades de longitud los segmentos que estaban marcados en una de las aristas del prisma, y con esa unidad de medida obtuvo la medida de longitud que hacía falta en una de las aristas del prisma]. ¿Cuántas medidas tengo ahora?

Estudiante H5: 3.

Mtra: ¿Cuántas necesito para sacar el volumen? Pues nada más esas, entonces, ¿estaba muy difícil? Y ¿Qué hicimos? Con nuestra reglita vimos cuántas veces cabe en cada una, ahora saquen el volumen.

Líneas 348-368:

Mtra: Ahora saquen el del C, yo traía mi reglita medidora, pero no me acuerdo dónde la dejé, acá está. ¿Creen que les pueda servir mi reglita?

Estudiante H8: ¿Cómo es así?

Mtra: A ver, no sé ustedes. [El estudiante H7 la toma y la coloca en su libro para medir una de las aristas del prisma B, es evidente que el estudiante H7 no sabe cómo la utilizó la profesora, por lo que la profesora la toma y la coloca en una de las magnitudes ya dadas en el prisma C al mismo tiempo que les dice:] Esta medida corresponde a lo que ya tienen ustedes, ¿Creen que les puede servir?

Estudiante H7: No o ¿sí?

Mtra: Ah, no sé, pues ve. [El estudiante la coloca nuevamente en el prisma B y no sabe qué hacer por lo que la profesora interviene diciéndole:] es del C, no es de ese. (El estudiante la deja al lado y parece que está observando el prisma C. [La profesora nuevamente interviene para decirle:] Ve, te la presto, mide. [La profesora se percata de que el estudiante H7 ha colocado mal la tira graduada y le dice:] desde el cero, desde ahí.

Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6.

Mtra: Ponle número para que no te equivoques, ahora de ¿cuántas medidas te faltan?

Estudiante H7: 1,2,3,4,5.

Mtra: Ponle, ahora de acá [La profesora señala la arista que no tiene marcadas las unidades de medida de longitud].

Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7. ¿7?

Mtra: 7 anótale ahí. Tienes tres medidas ¿Puedes sacar ya el volumen?

Líneas 385-395:

[El Estudiante H8 se acerca a la profesora para preguntarle respecto al resultado que obtuvo].

Estudiante H8: lo que hicimos es que aquí [diálogo inaudible] este medimos... [El Estudiante H8 es interrumpido por la profesora].

Mtra: Si midió con regla, no se dio cuenta que esto no equivale a un centímetro, es menos de un centímetro, son como 8 milímetros, [la profesora nuevamente saca su tira graduada y le muestra al Estudiante H11 lo siguiente:] por eso medí la misma que está marcada en el libro y la ocupé aquí y la ocupé acá. Te la presto.

[La profesora ahora se acerca con el equipo del estudiante H9].

Mtra: A ver, 1,2,3,4,5,6,7 y 6, entonces por qué, este, te salió tan grandote, 1,2,3,4 [La profesora borra los segmentos que el estudiante había marcado en la arista del

prisma que no tiene descrita una de sus magnitudes y le marca las que señala la tira graduada.

Los tres episodios citados corresponden al ejercicio que se presenta en la imagen 4.15.

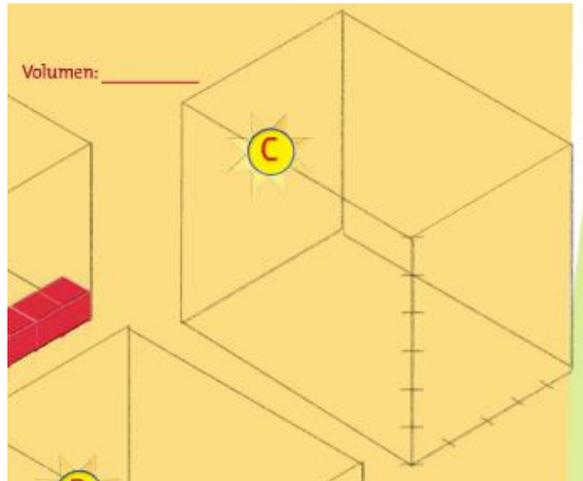


Imagen 4.15. Representación de un prisma rectangular que no muestra la medida de una de sus dimensiones (SEP, 2013:163)

Como podemos observar se trata de una representación paralela de un prisma rectangular, por la manera en que está representado este cuerpo geométrico, cabe decir que la medida de longitud que está faltando no se puede deducir, de manera que la profesora implementa el uso de una reglita medidora la cual consistió en una tira de cartulina en la que de forma graduada plasmó la unidad de medida que está marcada en una de las aristas del prisma de forma continua para poder deducir la medida de longitud de la tercera arista. Esto da cuenta de que la Laura conoce que se pueden utilizar unidades de medida de longitud no convencionales.

Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es)

Del conocimiento del contenido y de los estudiantes tomado del MKT se retomaron cinco de los indicadores diseñados por (Sosa, 2011) **CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo**

concepto –mezcla de lenguaje común con matemático). **CC-Es2.** Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. **CC-Es7.** Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. **CC-Es8.** Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. **CCEs-9.** Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo. para cada uno de los indicadores se diseñó uno o dos indicadores específicos, los cuales se dan a conocer a continuación.

Para el **CC-Es1.** Se diseñó el indicador específico:

- *Conoce que se debe escuchar el conocimiento y pensamiento matemático de los estudiantes para interpretar lo que están comprendiendo acerca del volumen de prismas.*

Este indicador se evidencia en las siguientes líneas:

Líneas 448-467:

Mtra: Ahora la Estudiante M6 va a explicar el otro, ¿Qué hizo la Estudiante M6?

Estudiante H7: Multiplicó.

Estudiante H6: Multiplicó largo por ancho por altura.

Mtra: Multiplicó largo por ancho y...

Estudiante H3: Por altura.

[El tercer reactivo lo contestó la Estudiante M4 y el cuarto reactivo lo resolvió el Estudiante H6].

Mtra: En el tercero, por qué apareció ese 5 ahí, a ver estudiante M4.

[La estudiante M4 pasa y escribe en el pizarrón la operación $7 \times 10 = 70$]

Estudiante M4: primero multiplique 10 por 7 y salieron 70.

Mtra: Y el 10 por 7 ¿Por qué?

Estudiante M4: porque es el ancho y el largo.

Mtra: ¿El ancho y el largo 10 por 7?

Estudiante H7: No el largo y la altura.

Mtra: Largo y la altura, ajá.

Estudiante M4: Y después multipliqué por 5.

Estudiante H11: No es cierto, largo y ancho.

Mtra: Largo y ancho, sí es cierto, largo y ancho.

Mtra: Y Por qué multiplicaste por 5, ¿cómo supiste que era por 5? A ver ¿por qué?

Estudiante M4: Porque fui multiplicando.

Mtra: ¿Fuiste multiplicando por 1, por 2, por 3, así hasta que diste con el 5? ¿Sí?

Líneas 477-492:

Mtra: [...] ¿Quién hizo el último?

Estudiante H6: Yo.

Mtra: Explícanos por qué le pusiste ahí 8. Ah 3. El 8 ya estaba.

[El estudiante primero escribe en el pizarrón $8 \times 8 = 64$]

Estudiante H6: y fui multiplicando por 1, por 2, por 3...

Mtra: Ha fuiste probando. ¿Alguien sabe cómo lo podríamos haber hecho también?

Estudiante H7. ¿Dividiendo?

Mtra: [Moviendo la cabeza en señal de estar de acuerdo] Operaciones contrarias. Ya lo sabemos utilizar, operaciones contrarias. ¿Verdad?

Estudiante H6: sumando.

Mtra: ¿Cómo sumando Estudiante H6?

Estudiante H6: 64 más 64, más 64...

Mtra: ¿64 más 64, más 64?

Estudiante H6. ¿Pero no sería más fácil multiplicar?

Mtra: Pues sí es más fácil multiplicar.

Los diálogos se refieren a los últimos reactivos que se presentan en la tabla de la imagen 4.16.

RETO Completa la tabla siguiente.

Ancho	Largo	Altura	Volumen
4	6	9	
4	7	10	
7	10		350
	8	8	192

Imagen 4.16 (SEP, 2013:163)

Lo que se observa en las líneas que se acaban de citar es que la profesora se interesa por conocer los procedimientos que siguieron los estudiantes al contestar la tabla respecto a las medidas de longitud que deben tener las aristas de dos prismas cuyo volumen se especifica en la misma, pero una de las dimensiones no, por lo que los estudiantes deben realizar los cálculos pertinentes para obtenerla. Laura cuestiona a los estudiantes acerca de cómo le hicieron para completar la tabla, esto da cuenta de que parece que la profesora conoce que se debe escuchar el conocimiento y pensamiento matemático de los estudiantes para interpretar lo que entienden acerca del volumen de prismas.

- *Conoce las dificultades que tienen los estudiantes para identificar las tres dimensiones de un hexaedro regular cuando se tiene como dato único la medida de una de sus aristas.*

Es el indicador específico que se diseñó para el **CC-Es2**. El cual se observó en las siguientes líneas:

Líneas 595-620

Mtra: ¿Dónde está ese juguete? [...] Ahora vas a sacar el volumen del juguete, [Toma el hexaedro y le señala las aristas al mismo tiempo que le dice:] 30, cada arista tiene 30, 30, entonces ¿Qué se supone que es? Este también ¿cuánto mide?

Estudiante H9: 30.

Mtra: ¿Y de la altura? ¿entonces? Pero tiene que ser 3 medidas. Es como el de 25, 25 y 25. Ahora ¿Qué va a ser?

Estudiante H9: 30.

Mtra: Y... ¿Cuántas medidas tengo que tener, cuántas tiene? Es que tapaste, préstame tu goma, tapaste una. [El estudiante escribe en su cuaderno 30 X 3 y la profesora le dice:]. Noo, otra vez por 3, no en vez de 25.

Estudiante H9: son 30.

Mtra: Está mal. ¿Entonces? ¿Cuánto? 30 por 30 [El estudiante H9 escribe 30 X 3 y la profesora dice:] 30 por 30, ahora. [El Estudiante H9 escribe 30 + 30] no, no se trata de sumar, por (X) [la profesora se refiere a que debe multiplicar] ándale así para que se te haga más fácil, [El Estudiante H9 multiplica 30 X 30.

Estudiante M8: Ya maestra son 27 000.

Mtra: No porque hay que dividir, ahora ve ¿cuántas veces cabe este de 30 por 30 en la cajotota.

[Se acerca el estudiante H8 y pregunta lo siguiente:]

Estudiante H8: [toma el cubo de cartulina que tiene la profesora y señalando cuatro de sus caras le pregunta:] ¿Maestra lo multiplicamos por cada una de sus caras?

Mtra: Se supone que es como éste [La profesora señala la pecera de 25 X 25 que está representada en el libro y le dice al estudiante H8]. Noo, se supone que es como éste, pero en vez de 25 es 30.

Estudiante H8: 30 por 30 por 30.

Mtra: Ándale.

Líneas 613-619:

Estudiante H8: [toma el cubo de cartulina que tiene la profesora y señalando cuatro de sus caras le pregunta:] ¿Maestra lo multiplicamos por cada una de sus caras?

Mtra: Se supone que es como éste [La profesora señala la pecera de 25 X 25 que está representada en el libro y le dice al estudiante H8]. Noo, se supone que es como éste, pero en vez de 25 es 30.

Estudiante H8: 30 por 30 por 30.

Mtra: Ándale.

Para ilustrar mejor lo que se dice en las líneas citadas, observemos nuevamente la imagen 4.6 donde se muestra el planteamiento que presenta el libro de texto. Ver la imagen 4.17

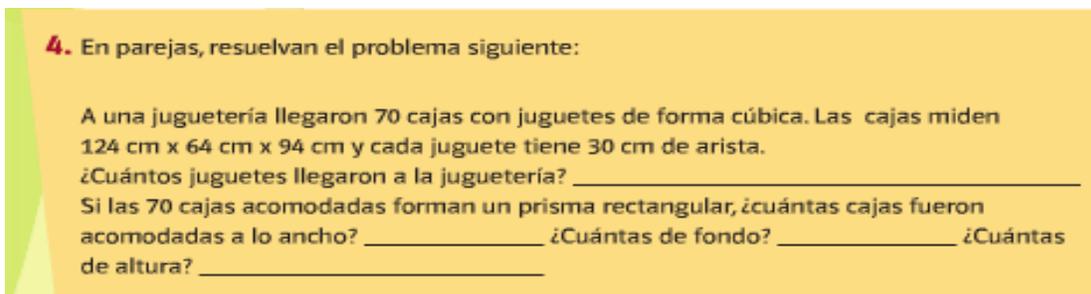


Imagen 4.18. Descripción de la actividad 4 (SEP, 2012)

Es evidente que la profesora tiene el interés de que a partir de la información escrita en el libro, los estudiantes visualicen en los juguetes la forma de hexaedro regular cuyas aristas miden 30 cm y para esto se apoya tanto en la imagen de la pecera que tiene 25 cm de arista como en un exaedro de cartulina que tiene en las manos para indicarles que si todas las aristas del hexaedro regular miden la misma longitud, entonces, esa medida de longitud será visualizada tanto en el largo como el ancho y la altura del juguete que tiene forma cúbica. Esto da cuenta de que la profesora conoce las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se le plantea a los estudiantes que identifiquen las tres medidas de longitud que se requieren para calcular el volumen de un hexaedro regular, cuando solamente se les está dando un dato de forma escrita sin recurrir a un gráfico que los lleve a visualizar mejor el cuerpo geométrico planteado.

Para el **CC-Es7**. Se diseñaron dos indicadores específicos los cuales se describen de la siguiente manera:

- *Conoce que cuando los estudiantes padecen un despiste y dan un resultado incorrecto, se les reorienta para obtener el resultado esperado.*

El cual se observa en las líneas 121-138.

Mtra: Por sus caras. 216, A ver, vamos a ver. ¿Estudiante H7 cuanto tiene?

Estudiante H7: Maestra, primero multipliqué 6 por 6 = 36 y después por la altura 36 por 6 y me da 316.

Mtra: 36 por 6, a ver has tu multiplicación para que cheques. Vamos a ver lo que hizo el estudiante H7. Estudiante H7 y Estudiante M5. Estudiante H7 explícales, primero contamos...

Estudiante H7: Es que primero multiplicamos altura por ancho y después lo multiplicamos por largo. 6 por 6, después el resultado lo multiplicamos otra vez por 6.

Mtra: ¿Por qué altura primero?

Estudiante H7: Es que nosotros multiplicamos es que es para sacar lo de una pared, y después lo multiplicamos por 6 para sacarlo de todo.

Mtra: A ver ya, la Estudiante M5 ya está haciendo lo del primer paso. De dónde salió ese 36.

Estudiante H7: De multiplicar 6 por 6, después lo multiplicamos otra vez por seis y sacamos el resultado.

Mtra: A ver ¿Cuánto le salió a la Estudiante M5?

Estudiante H7: 216.

Mtra: Y ¿Cuánto te salió a tí? [Refiriéndose al Estudiante H7].

Estudiante H7: ¡Oh!

Mtra: ¡Oh! me imagino que en lo que está mal es en la multiplicación.

Parece que la profesora conoce que si los estudiantes dan un resultado incorrecto al momento de calcular el volumen de un prisma, se debe reorientar al estudiante y para esto, le pide que haga nuevamente la multiplicación y posteriormente le da pistas acerca de dónde puede estar el error, el cual probablemente se consumió debido a un despiste del propio estudiante.

- *Conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el volumen de un prisma cuando aún no dominan el contenido.*

Este indicador específico se observa en las líneas siguientes:

Líneas 594-627:

Estudiante H9: Ya.

Mtra: ¿Dónde está ese juguete? [...] Ahora vas a sacar el volumen del juguete, [Toma el hexaedro y le señala las aristas al mismo tiempo que le dice:] 30, cada arista tiene 30, 30, entonces ¿Qué se supone que es? Este también ¿cuánto mide?

Estudiante H9: 30.

Mtra: ¿Y de la altura? ¿entonces? Pero tiene que ser 3 medidas. Es como el de 25, 25 y 25. Ahora ¿Qué va a ser?

Estudiante H9: 30.

Mtra: Y... ¿Cuántas medidas tengo que tener, cuántas tiene? Es que tapaste, préstame tu goma, tapaste una. [El estudiante escribe en su cuaderno 30×3 y la profesora le dice:]. Noo, otra vez por 3, no en vez de 25.

Estudiante H9: son 30.

Mtra: Está mal. ¿Entonces? ¿Cuánto? 30 por 30 [El estudiante H9 escribe 30×3 y la profesora dice:] 30 por 30, ahora. [El Estudiante H9 escribe $30 + 30$] no, no se trata de sumar, por (X) [la profesora se refiere a que debe multiplicar] ándale así para que se te haga más fácil, [El Estudiante H9 multiplica 30×30].

Estudiante M8: Ya maestra son 27 000.

Mtra: No porque hay que dividir, ahora ve ¿cuántas veces cabe este de 30 por 30 en la cajotota.

[Se acerca el estudiante H8 y pregunta lo siguiente:]

Estudiante H8: [toma el cubo de cartulina que tiene la profesora y señalando cuatro de sus caras le pregunta:] ¿Maestra lo multiplicamos por cada una de sus caras?

Mtra: Se supone que es como éste [La profesora señala la pecera de 25×25 que está representada en el libro y le dice al estudiante H8]. Noo, se supone que es como éste, pero en vez de 25 es 30.

Estudiante H8: 30 por 30 por 30.

Mtra: Ándale.

[El estudiante H8 se va a su lugar y la profesora continúa con el Estudiante H9].

Estudiante H9: ¿Cuánto me Salió?

Mtra: ¿Cuánto te dio?

Estudiante H9: 900

Mtra: Pero nada más tienes dos medidas, nada más multiplicaste 30 por 30, ahora ¿Qué te falta? Tienes que multiplicarlo por la siguiente medida.

Estudiante H9: ¿900 por 30?

Mtra: [Mueve la cabeza en señal de aprobación] 900 por 30. ¿Ya vé?

Líneas 687-707:

Mtra: ¿Dónde está el volumen de la caja grande? ¿Cuánto es el volumen de la caja grande? Ahí dice, La caja tenía 124 cm. Por 64, por 94. 124, por 64 y el resultado va a ser por 94. [La estudiante escribe en el pizarrón $124 \times 64 =$ [obteniendo como resultado 7 936. Posteriormente escribe: $7\ 936 \times 64 = 507\ 904$].

Estudiante M5: Ya maestra.

Mtra: Ahora por eso les dejé usar la calculadora, hay que ver ¿Pero esa multiplicación está bien Estudiante H6?

Estudiante H6: A ver déjeme ver ¿Cuál? 64×124 , no, está mal

Mtra: No, no está bien la multiplicación [La profesora se pone a revisar las multiplicaciones que ha hecho la estudiante M3 en el pizarrón y descubre que la estudiante ha multiplicado 124×64 y el resultado nuevamente lo multiplicó por 64]. ¿Pero por qué este resultado por 64 otra vez, si es 94, con razón no le sale, dije 94... 64, 94, por eso. El 64 ya lo tienes.

Veamos nuevamente la imagen 4.6 para observar nuevamente lo que se está haciendo en ambos episodios.

4. En parejas, resuelvan el problema siguiente:

A una juguetería llegaron 70 cajas con juguetes de forma cúbica. Las cajas miden 124 cm x 64 cm x 94 cm y cada juguete tiene 30 cm de arista.

¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? _____

Si las 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular, ¿cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho? _____ ¿Cuántas de fondo? _____ ¿Cuántas de altura? _____

Imagen 4.19. Consigna de la actividad 4 (SEP, 2012)

En el caso del Estudiante H9 la profesora se acerca a él para insistirle en que identifique las tres medidas de longitud que se requieren para calcular el volumen de un hexaedro regular cuyas aristas miden 30 cm, además de vigilar que el estudiante realice las operaciones que debe hacer (multiplicar $30 \times 30 \times 30$ en vez

de 30×3 o sumar $30 + 30$). El estudiante H9 quiere calcular el volumen del juguete, sin embargo, es evidente que el estudiante no domina toda vía el contenido del volumen, por lo tanto, son varios los errores que comete.

En cuanto a la estudiante M5, la profesora se percata de que la estudiante ha multiplicado $124 \times 64 \times 64$ en vez de $124 \times 64 \times 94$ (medidas de las aristas de la caja que contienen los juguetes).

Parece que la profesora se acerca al Estudiante H9 para ayudarlo a descubrir las medidas de las aristas del cubo y guiarlo hacia las operaciones que debe realizar para calcular el volumen; así como también ha pedido a la Estudiante M5 que pase al pizarrón a resolver el volumen de la caja de los juguetes porque conoce que esto dos estudiantes se pueden equivocar al calcular el volumen de un prisma, debido a que no dominan toda vía el contenido.

Un indicador específico que se diseñó para el **CC-Es8**.

- *Conoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.*

Se observa en las líneas 94-97.

Mtra. [...] Estudiante H6 que hizo, ¿Qué hicieron ustedes?

Estudiante H6: estábamos contando.

Mtra. Estaban contando los cuadritos, ¿Y ya tienen el volumen de la A, de la figura A?

Para ilustrar lo que se dice en las líneas que se acaban de citar, observemos la imagen 4.9.

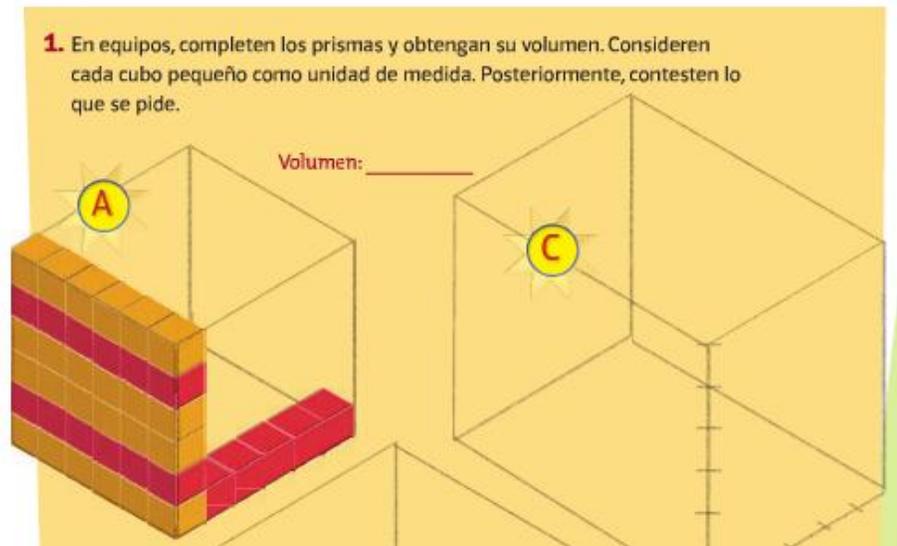


Imagen 4.20. Consigna de la actividad 1 (SEP, 2013:163)

En la representación presentada en el libro de texto (imagen 4.20) observamos el uso de unidades cúbicas refiriéndose a cada uno de los cubos pequeños que están representados. Estos cubos también se pueden nombrar hexaedros regulares que corresponde al grupo de los poliedros regulares. Es claro que no existe en la figura A alguna representación del cuadrado o cuadritos como lo menciona la profesora, aparecen las caras de forma cuadradas de los cubos, pero no los cuadrados como polígonos regulares de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. Me parece que Laura entre polígono y poliedro, nombra cuadrito a un cubito y esto me lleva a pensar que desconoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.

Para el **CC-Es9**. Se diseñaron los indicadores específicos:

- *Conoce que cuando los estudiantes están siguiendo un procedimiento equivocado para calcular el volumen, se puede intervenir en el momento para favorecer un procedimiento adecuado.*

Este indicador se observa en las líneas 520-541

Mtra: [...] [La profesora se acerca al estudiante H9 y observa lo que está haciendo y en seguida le dice lo siguiente:] por qué multiplicaste por 6?

Estudiante H9: ¿Cuál?

Mtra: Esta multiplicación.

Estudiante H9: Pues ésta.

Mtra: ¿25 por 6?

Estudiante H9: Ajá.

Mtra: ¿Por qué por 6? ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen? Yo no veo ningún 6, veo las 3 medidas, pero no hay ningún 6.

[Hace un diálogo el Estudiante H9 pero es inaudible]

Mtra: Se equivocó. [La profesora sigue observando lo que el Estudiante H9 está haciendo y le dice lo siguiente:] no es por cara, estás sacando otra vez área lateral y total, [El estudiante cambia el 6 por el 5 y la profesora le dice:] tampoco es por 5, ¿Eh dónde está una medida de 5 dime? [El estudiante H9 cambia el número 5 por el 3, la profesora le dice:] tampoco es 3, ¿Dónde hay alguna medida que sea 3. Hay tres medidas ¿Cuáles son?

Estudiante H9: 25 por 25.

Mtra: Entonces ¿Por qué escribes 25 por 3?

Estudiante H9: Entonces es 25 por 25.

Mtra: Sí, son tres medidas.

[...]

Mtra: ¿Ahora si ya te diste cuenta? Son 3 medidas, las 3 medidas que están ahí, largo, ancho y altura, ahora sí.

En este episodio del video, el estudiante está calculando el volumen de la pecera A. para esta actividad retoma el número 25 que corresponde a la medida de las y parece que el 6 lo retoma de las 6 caras que tiene el hexaedro regular de la pecera A. como se ve en la imagen 4.4.

En las líneas 520-541 parece que la profesora identifica que el Estudiante H9 está siguiendo un procedimiento equivocado e incluso, no sabe realmente lo que está haciendo. La profesora cree que está calculando el área del prisma (área lateral y total) sin embargo, me parece que está haciendo simplemente una operación en la que incluye la medida de las aristas y el número de caras y no le va a arrojar ni el resultado del área ni el del volumen. El foco de atención para la profesora es que

el estudiante H9 se centre en el cálculo del volumen y por eso le insiste en las tres cantidades (medidas) que se observan en el libro y refieren a la pecera A. Laura insiste en que las tres medidas que están en el libro son 25, 25, 25 y no aparece ningún 6, ningún 5, ningún 3 que el estudiante quiere utilizar para multiplicarlo por 25 y obtener el volumen. De esta manera, la profesora intenta dejarle claro al estudiante H9 que los tres números 25 que aparecen corresponden al largo, ancho y altura de la pecera que tiene forma de hexaedro regular. Esta intervención que hace la profesora al Estudiante H9 deja ver evidencia que conoce que el estudiante está siguiendo un procedimiento equivocado y opta por guiar al estudiante hacia un procedimiento correcto.

- *Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con perímetro.*

Este indicador específico se puede observar en las siguientes líneas:

Líneas 83-92

Mtra: ¿Ya? ¿Tú qué hiciste Estudiante M3?

Estudiante M3: Hice lo mismo.

Mtra: Lo mismo de qué. Estudiante M3 primero.

Estudiante M3: Multipliqué.

Mtra: ¿Qué multiplicaste?

Estudiante M3: 6 por 24.

Mtra: 6 por 24 ¿Y por qué 6 por 24?

Estudiante M3 porque son seis y seis [La Estudiante M3 señala dos de las aristas del prisma A y posteriormente dice lo siguiente:] y alrededor te da 24.

Mtra: Pero no queremos perímetro.

Líneas 160-165:

Mtra: Ah contaste mal. Son 6, 6 [la maestra señala dos aristas de la misma cara del cubo, la cual tiene los cubos completos] creo que sacaron el perímetro, ¿verdad? Y pensaron que habían sacado todo, el total, y después lo multiplicaron por 6 porque pensaron que eran las paredes 6 cosas ¿verdad?

Estudiante H1: Pensamos que era el volumen.

Mtra: Así sacaron 24 y luego lo multiplicaron por 6.

Lo que se evidencia en las líneas que se acaban de presentar es que la profesora conoce que los estudiantes pueden confundir el área por el perímetro, lo cual los puede llevar al error en el cálculo del volumen de un prisma.

Conocimiento del Contenido y su enseñanza (CC-En)

El CC-En fue identificado a través de dos indicadores diseñados por (sosa 2011) y uno que se diseñó para esta investigación, los cuales se describen a continuación: **CC-En38.** *Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.* **CC-En43.** *Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.* **CC-Es*** *Conocer recursos para trabajar un contenido.*

Para el **CC-En38** se diseñó un indicador específico el cual se enuncia de la siguiente manera:

- *Conoce que para que los estudiantes comprendan la representación de un prisma por niveles, se puede acudir a la analogía de prisma-edificio, niveles-pisos.*

Este indicador específico se observa en las siguientes líneas:

Líneas 22-23:

Mtra. Si, ya los habíamos ocupado para hacer los edificios, ¿Se acuerdan?

Estudiantes varios: siiii.

Líneas 214-226:

Mtra: [...]. Pero si ya tienes 3 medidas, ¿Cuántas medidas necesitas para el volumen? ¿Lo completamos? ¿Por qué no aprovechas y lo haces como edificio? Ándale.

[...]

[El estudiante H7 se pone a juntar cubitos de plastilina para armar el prisma B].

Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Mtra: A ver ahora júntalos.

Mtra: Ahora 6, 9 y 6, rápido un piso (la profesora se refiere al primer nivel del prisma) un piso solo. ¿Quieren que les preste más cubos?

Parece que la profesora utiliza las analogías edificio-prisma y pisos-niveles para hacer notar a los estudiantes una representación de los prismas por niveles como apoyo para descubrir la altura del prisma. Ello da cuenta de que la profesora conoce poderosas analogías para presentar o representar el contenido del volumen de prismas.

Para el **CC_En43**. Se diseñó el indicador específico:

- *Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza de volumen es mejor comprendida.*

Este indicador específico se observa en las siguientes líneas:

Líneas 7-9:

[La profesora pidió a los estudiantes que se sentaran en equipos de 4 y que sacaran los prismas que armaron con hexaedros regulares de plastilina de un centímetro de arista el día anterior]

Líneas 28-36:

Mtra: Observa los prismas y contesta las preguntas, aquí están planos los prismas, ustedes ya los tienen hechos enfrente, pónganlos enfrente, ya tienen hechas sus cuatro figuras: la figura A, la B, la C y la D. Pónganlas en la misma posición en que están en el libro, sí, la A, la B, la C y la D. ¿Ya? Dice, de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen? ¿Cómo puedo saber? ¿Cómo puedo encontrar el volumen?

Estudiante H6: Contando los cubitos.

Estudiante H7: Maestra yo. La A y la C.

Mtra: Contando los cubitos primero. A ver tomen sus figuras, cuenten los cubos, tomen sus figuras que hicieron, cuenten los cubos.

Líneas 442-52:

Mtra: A y C. ¿Cuántos cubos más necesitan para que el C tenga el mismo volumen que el B. ahora chequen el C, tomen su figura C y ahora el B.

Estudiante H8: Cinco.

Mtra: [La profesora se dirige al equipo 2 y le dice al estudiante H8:] Toma tu figura. A ver la figura B y la C ¿Cuántos? Fíjate, no cuentan bien.

Estudiante H2: Maestra ya. Quince.

[Los estudiantes contaron seis cubos].

Mtra: Déjame que ellos cuenten porque, no son 6. [La profesora de nuevo se dirige al Estudiante H8 y le dice: toma las figuras, desbarátalas, cuéntalas. Bueno, no desbarátalas, sino checa cuántas.

Estudiante H8: Quince.

Líneas 148-151:

Mtra: No me digas que estás mal ¿Por qué 6 por 4? ¿Cómo sabes que estás mal, ya vimos que estas mal? ¿Por qué 6 por 4? Tomen un cubito y explíquenme ¿por qué 6 por 4? Ahí lo tienen al lado, tienen una figura.

[El estudiante H1 toma el cubo de 6 centímetros de arista y lo observa].

Líneas 222-237:

[El estudiante H7 se pone a juntar cubitos de plastilina para armar el prisma B].

Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Mtra: A ver ahora júntalos.

Mtra: Ahora 6, 9 y 6, rápido un piso (la profesora se refiere al primer nivel del prisma) un piso solo. ¿Quieren que les preste más cubos?

Estudiante H7. No, ya, ya.

Mtra: No les va a alcanzar.

Estudiante H7: [Ve que su compañera de equipo ya terminó primero de hacer el prisma y le hace la siguiente pregunta:] ¿Ya lo hiciste sola?

Estudiante M5. Ya.

Mtra: Revisa la altura.

Estudiante M5: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Necesito más cubitos.

Mtra: Te estoy diciendo. [La profesora le da más hexaedros regulares de plastilina a la estudiante M5].

Estudiante H7: ¿Nada más es la base lo que quiere o todo?

Mtra: Todo.

Líneas 336-346:

Mtra: [La profesora señala nuevamente el prisma que los estudiantes elaboraron con cubos de plastilina y les indica con la mano, al mismo tiempo que le dice al equipo:] volumen es todo esto, ahora, cuéntame el primer piso, ¿dónde está más claro? Aquí, el primer piso del edificio, cuéntamelo.

Estudiante H7: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54, 55.

Mtra: 55, uno, ¿55?

Estudiante H7. ¿Son 54 no?

Mtra: 2,4,6. [La profesora ha contado el número de hexaedros regulares colocados en dos de las aristas del prisma, y dice lo siguiente:] 54 , 54 en un piso, 54 en otro, [Al mismo tiempo la profesora va señalando con su mano cada uno de los niveles del prisma] 54, 54, 54, 54, A ver multiplica, ¿Es lo mismo o no?, ¿Ya está bien su figura o está mal? [...]

Líneas 594-6009:

Mtra: [...] Ahora vas a sacar el volumen del juguete, [Toma el hexaedro y le señala las aristas al mismo tiempo que le dice:] 30, cada arista tiene 30, 30, entonces ¿Qué se supone que es? Este también ¿cuánto mide?

Estudiante H9: 30.

Mtra: ¿Y de la altura? ¿entonces? Pero tiene que ser 3 medidas. Es como el de 25, 25 y 25. Ahora ¿Qué va a ser?

Estudiante H9: 30.

Las líneas que se han citado dan cuenta de que al parecer la profesora conoce que al promover una clase con material concreto como los hexaedros regulares de plastilina y el hexaedro de cartulina utilizados en esta lección para hacer la representación de prismas, la enseñanza del volumen es mejor comprendida por los estudiantes.

El **CC_Es*** considera un indicador específico el cual se enuncia de la siguiente manera:

- *Conocimiento de un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.*

Este indicador específico se observa en las siguientes líneas:

Líneas 7-8:

[La profesora pidió a los estudiantes que se sentaran en equipos de 4 y que sacaran los prismas que armaron con hexaedros regulares de plastilina de un centímetro de arista el día anterior]

Líneas 28-36:

Mtra: Observa los prismas y contesta las preguntas, aquí están planos los prismas, ustedes ya los tienen hechos enfrente, pónganlos enfrente, ya tienen hechas sus cuatro figuras: la figura A, la B, la C y la D. Pónganlas en la misma posición en que están en el libro, sí, la A, la B, la C y la D. ¿Ya? Dice, de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen? ¿Cómo puedo saber? ¿Cómo puedo encontrar el volumen?

Estudiante H6: Contando los cubitos.

Estudiante H7: Maestra yo. La A y la C.

Mtra: Contando los cubitos primero. A ver tomen sus figuras, cuenten los cubos, tomen sus figuras que hicieron, cuenten los cubos.

Líneas 43-51:

Mtra: A y C. ¿Cuántos cubos más necesitan para que el C tenga el mismo volumen que el B. ahora chequen el C, tomen su figura C y ahora el B.

Estudiante H8: Cinco.

Mtra: [La profesora se dirige al equipo 2 y le dice al estudiante H8:] Toma tu figura. A ver la figura B y la C ¿Cuántos? Fíjate, no cuentan bien.

Estudiante H2: Maestra ya. Quince.

[Los estudiantes contaron seis cubos].

Mtra: Déjame que ellos cuenten porque, no son 6. [La profesora de nuevo se dirige al Estudiante H8 y le dice: toma las figuras, desbarátalas, cuéntalas. Bueno, no desbarátalas, sino checa cuántas.

Mtra. Déjame que ellos cuenten porque, no son 6. [La maestra nuevamente se dirige al Estudiante H8 y le dice: toma las figuras, desbarátalas, cuéntalas. Bueno, no desbarátalas, sino checa cuántas.

Estudiante H8: 15

Líneas 148_151:

Mtra: No me digas que estás mal ¿Por qué 6 por 4? ¿Cómo sabes que estás mal, ya vimos que estas mal? ¿Por qué 6 por 4? Tomen un cubito y explíquenme ¿por qué 6 por 4? Ahí lo tienen al lado, tienen una figura.

[El estudiante H1 toma el cubo de 6 centímetros de arista y lo observa].

Líneas 222-237:

[El estudiante H7 se pone a juntar cubitos de plastilina para armar el prisma B].

Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Mtra: A ver ahora júntalos.

Mtra: Ahora 6, 9 y 6, rápido un piso (la profesora se refiere al primer nivel del prisma) un piso solo. ¿Quieren que les preste más cubos?

Estudiante H7. No, ya, ya.

Mtra: No les va a alcanzar.

Estudiante H7: [Ve que su compañera de equipo ya terminó primero de hacer el prisma y le hace la siguiente pregunta:] ¿Ya lo hiciste sola?

Estudiante M5. Ya.

Mtra: Revisa la altura.

Estudiante M5: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Necesito más cubitos.

Mtra: Te estoy diciendo. [La profesora le da más hexaedros regulares de plastilina a la estudiante M5].

Estudiante H7: ¿Nada más es la base lo que quiere o todo?

Mtra: Todo.

Líneas 336-346:

Mtra: [La profesora señala nuevamente el prisma que los estudiantes elaboraron con cubos de plastilina y les indica con la mano, al mismo tiempo que le dice al equipo:] volumen es todo esto, ahora, cuéntame el primer piso, ¿dónde está más claro? Aquí, el primer piso del edificio, cuéntamelo.

Estudiante *H7:*
2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54,55.

Mtra: 55, uno, ¿55?

Estudiante H7. ¿Son 54 no?

Mtra: 2,4,6. [La profesora ha contado el número de hexaedros regulares colocados en dos de las aristas del prisma, y dice lo siguiente:] 54 , 54 en un piso, 54 en otro, [Al mismo tiempo la profesora va señalando con su mano cada uno de los niveles del prisma] 54, 54, 54, 54, A ver multiplica, ¿Es lo mismo o no?, ¿Ya está bien su figura o está mal? [...]

Es Evidente que en las líneas que Se han citado para este indicador específico la profesora pone de manifiesto el uso de hexaedros regulares de plastilina que miden 1cm de arista y promueve que los estudiantes manipulen los prismas que han construido para trabajar el volumen de una manera interactuada con el material. Esto hace pensar que la profesora conoce este recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.

Conocimiento del Currículum (CC)

El Conocimiento del Currículum (CC) Es otro de los subdominios del MKT del cual sólo se encontró un indicador de (Sosa: 2011) **CC2**. *Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.* Para este indicador se diseñó un indicador específico:

- *Conoce que después de haber trabajado con los estudiantes el volumen de prismas, el siguiente tema a desarrollar es el de volumen de pirámides.*

El cual se observó en las líneas 772-801:

Mtra. Entonces haber, recordando ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen?

Mtra: Entonces, a ver, recordando ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen?

Estudiante H6: Tres.

Mtra: Tres ¿Cuáles son?

Estudiantes varios: Largo, ancho y altura.

Mtra: ¿Cuáles son?

Estudiantes varios: Largo, ancho y altura.

[..]

Mtra: Y en este caso estamos hablando de los...

Estudiantes varios: Prismas.

Mtra: ¿Podemos sacar volumen a las pirámides?

Estudiante H3: No.

Mtra: ¿No?

Estudiantes varios: Sííí.

Mtra: Sí, pero después lo vamos a ver.

En las líneas que se acaban de citar se observa que al parecer la profesora conoce que uno de los temas posteriores a trabajar con los estudiantes es el Volumen de pirámides. Esto quiere decir que parece que la profesora conoce el currículum.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta tesis se intentó acercarse al conocimiento matemático para la enseñanza de tres profesoras de sexto grado de educación primaria, a partir del tema de la enseñanza del cálculo del volumen de prismas. Acercarse a dicho conocimiento requiere de un marco teórico y metodológico adecuado. En esta investigación se decidió utilizar el propuesto por Ball y sus colegas (2008) y estudios previos donde se utiliza este marco (véase capítulo 1. Apartado 1.3) y capítulo 2). Los datos analizados provienen de observaciones no participantes video-grabadas (véase Capítulo 4). Aunque se hicieron entrevistas semi-estructuradas a dos de las profesoras observadas, no se hizo el análisis de éstas, por limitaciones del tiempo. Sin embargo, estos datos podrán ser analizados en un siguiente estudio.

La pregunta que se planteó para esta tesis fue pensada para identificar ¿Cuáles subdominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* pone en acción un profesor cuando enseña temas relacionados con geometría tridimensional en sexto grado de primaria, en el caso del volumen de prismas?

Como resultado de esta investigación se generaron indicadores específicos para identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza vinculados con el cálculo de volumen de prismas a partir de los indicadores realizados por Sosa (2011). Cabe señalar que el trabajo de Sosa fue realizado en el contexto de bachillerato, por lo que se tuvo que hacer una selección cuidadosa de los indicadores pertinentes para primaria. Una vez seleccionados estos indicadores, adaptaron y generaron los específicos resultado del análisis de las lecciones, el marco teórico y de las observaciones a tres profesoras de educación primaria.

Los conocimientos que se identificaron en el análisis realizado fueron: Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CC-Es), Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (CC-En) y Conocimiento del Currículo (CC). Cabe señalar que en el marco teórico propuesto por Ball y sus colegas (2008), se incluye también el Horizonte Matemático (HM), sin embargo, es un subdominio que no se analiza en este estudio porque lo observado se incluye en el Conocimiento del Currículo.

El tipo de conocimiento que más se evidenció en las tres profesoras es el CCC y el CC-En. Los conocimientos fueron identificados desde dos aspectos: lo que parece que conocen y lo que pudiera ser que desconocen, a partir de la observación de las clases video-grabadas.

El subdominio que menos se evidenció es el CC. Este tipo de conocimiento sólo fue observado en una de las tres profesoras por medio de un indicador de Sosa (2011) referido al conocimiento de temas que se verán posteriormente en el curso.

Conocimientos evidenciados en Laura, Rosy y Consuelo

A partir de lo descrito en el capítulo anterior, se puede afirmar que las tres profesoras poseen conocimientos similares en los subdominios analizados y en algunos indicadores específicos, aunque también cabe decir que otros indicadores específicos sólo se observaron en una o dos profesoras. A continuación se describen estas similitudes y diferencias.

En cuanto al **Conocimiento Común del Contenido**, para el indicador CCC1 *Saber la definición del concepto, regla, propiedad teorema, o método* (Sosa, 2011) fue observado en las tres profesoras. Se observó que:

En la clase de Consuelo, Rosy y Laura parece que las tres:

- ✓ Conocen que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.

Consuelo y Rosy parece que:

- ✓ Conocen e identifican los prismas rectangulares como un tipo de prismas,
- ✓ conocen que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular.

En Laura y Rosy parece que:

- ✓ Conocen que al comparar dos prismas continentes de diferentes dimensiones es necesario comparar el volumen de ambos.

En la clase de Laura se observan tres indicadores específicos que no se observan en la clase de Rosy y Consuelo estos son:

- ✓ Conoce la distinción entre área y volumen.
- ✓ Conoce de forma anticipada las actividades y sus respectivas respuestas que propone el libro de texto respecto al contenido. (Este conocimiento fue observado más bien como carencia de conocimiento)
- ✓ Tiene conocimiento de que todas las aristas de un hexaedro regular tienen la misma longitud.

Además en esta misma profesora, se identificó conocimiento en los indicadores CCC2: *Saber usar términos matemáticos y notación matemática que aparece en las definiciones formales*. Por medio del indicador específico:

- ✓ Conoce la importancia de tener siempre presentes los términos matemáticos que aparecen en las definiciones formales durante todo el tiempo en que sea tratado el contenido.

También se identificó el CCC4 *Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto*. por medio de los indicadores específicos:

- ✓ Conoce que para calcular el volumen de un prisma cuadrangular o rectangular por medio de su tratamiento tridimensional, una forma es comenzar por calcular el área de una de sus caras.

- ✓ Muestra solidez en el conocimiento, esto le permite hacer uso de distintos procedimientos para calcular el volumen.

Cabe destacar que los indicadores **CCC2 y CCC4** y sus respectivos indicadores específicos, sólo fueron identificados en la clase de Laura a diferencia de las clases de Consuelo y Rosy.

La clase de Consuelo deja ver que hay dos indicadores específicos que no se observan en Rosy y Laura en el indicador CCC1. Estos son:

- ✓ Conoce que los prismas tienen caras.
- ✓ Conoce que el hexaedro regular (cubo) tiene todas sus caras iguales.
- ✓ Conoce que el hexaedro regular (cubo) forma parte de los prismas. (Indicador que fue identificado como carencia de conocimiento)

En la clase de Rosy se identifican tres indicadores específicos que no se observan en la clase de Consuelo y Laura en el indicador **CCC1**. Estos son:

- ✓ Conoce una definición de volumen.
- ✓ Conoce algunas características distintivas entre prismas y pirámides.
- ✓ Conoce que el hexaedro regular se incluye en el grupo de los prismas.

Carencias que se evidenciaron

En las tres profesoras se observó de manera implícita el Indicador Conocimiento anticipado de las actividades y sus respectivas respuestas que propone el libro de texto respecto al contenido. Sin embargo, parece que Laura muestra desconocimiento de las respuestas en dos de las actividades propuestas en el libro de texto para este contenido.

En el caso de Consuelo respecto a las caras de los prismas, para ella, parece que sólo los cubos tienen caras.

Hace la distinción entre el cubo y prismas, sin embargo, parece no incluir al cubo en el grupo de los prismas.

Respecto al **Conocimiento Especializado del Contenido (CEC)**, Laura, Rosy y Consuelo comparten un indicador específico del indicador **CEC5** *Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático*. Tomado de (Sosa 2011). Este indicador específico permite decir que parece que las profesoras:

- ✓ Distinguen de manera implícita entre el procedimiento unidimensional y tridimensional para el cálculo del volumen de prismas.

Un indicador específico respecto a este mismo indicador de (Sosa 2011) no se observa en la clase de Laura pero sí se identificó en la clase de Rosy y Consuelo. Esto da pie a decir que parece que las dos profesoras:

- ✓ Se adentran en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún están en el tratamiento unidimensional.

Son tres los indicadores específicos que comparten las profesoras Rosy y Laura dentro del **CEC5**, esto hace notar que parece que estas dos profesoras:

- ✓ Conocen el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.
- ✓ Conocen el tratamiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.
- ✓ Se adentran en el uso del centímetro cúbico (cm^3) adjudicándose a las unidades cúbicas.

En la clase de la profesora Consuelo se observó un indicador específico que no se identificó en la clase de de Rosy y Laura:

- ✓ Conoce que una vez tratado el procedimiento unidimensional del volumen, se debe iniciar el tratamiento tridimensional para el cálculo de volumen de prismas.

Se observaron también en la clase de la profesora Rosy dos indicadores específicos del indicador **CEC5** los cuales permiten decir que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que el volumen de los prismas guarda cierta relación con su capacidad.
- ✓ Es lo suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición. (Este conocimiento, se encontró como una carencia del conocimiento matemático de la profesora).

En la clase de la profesora Laura se identificaron dos indicadores específicos para el **CEC4** *Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes*. Los indicadores específicos identificados dan pie a decir que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con perímetro.
- ✓ Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con volumen.

y un indicador específico del **CEC-5**:

- ✓ Conoce que se pueden utilizar unidades de medida de longitud no convencionales o poco usuales.

Ambos indicadores específicos no se observaron en las clases de las profesoras Rosy y Consuelo.

Considero pertinente mencionar que los indicadores del **CEC4** que se observan en la clase de la profesora Laura también son observaciones que identifican los profesores investigadores en los estudiantes en un estudio realizado por Moreno et al (1998), esto da cuenta de un conocimiento especializado que la profesora posee.

Respecto a las carencias identificadas, parece que Rosy no es suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición.

El subdominio Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (**CC-Es**) se observó en las tres profesoras desde distintos indicadores, cabe decir que a diferencia de los dos subdominios anteriores, aquí no se observaron indicadores específicos que compartieran las tres profesoras.

En la clase de la profesora Consuelo se observaron dos indicadores específicos que corresponden al indicador **CC-Es18**. *Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema*. Tomado de (Sosa:2011). Para este indicador se diseñaron los indicadores específicos que dan cuenta de que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que cuando un dato está ausente en una situación matemática y se presta a ambigüedades, se debe plantear un procedimiento consensuado para obtener ese dato.
- ✓ Conoce que cualquiera de las caras de los prismas rectangulares puede ser tomada como su base.

En la clase de Rosy se identificó un indicador específico del indicador CC-Es18 tomado de (Sosa: 2011):

- ✓ Conoce que para evitar que los estudiantes tomen decisiones erróneas al comparar capacidades de prismas, es necesario insistir en el cálculo del volumen de ambos prismas.

En la clase de la profesora Laura se identificaron los indicadores de (Sosa: 2011): **CC-ES1**. *Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto, mezcla del lenguaje común con matemático)* para este indicador se diseñó un indicador específico, por medio del cual se observó que parece que Laura:

- ✓ Conoce que se debe escuchar el conocimiento y pensamiento matemático de los estudiantes para interpretar lo que están comprendiendo acerca del volumen de prisma.

CC-Es2. *Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.* Para el cual se diseñó un indicador específico este indicador nos señala que parece que la profesora:

- ✓ Conoce las dificultades que tienen los estudiantes para identificar las tres dimensiones de un hexaedro regular cuando se tiene como dato único la medida de sus aristas.

CC-Es7. *Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una (s) operación (es) o transformación (es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.* Para este indicador se diseñaron dos indicadores específicos, por medio de éstos se observa que parece la profesora:

- ✓ Conoce que cuando los estudiantes padecen un despiste y dan un resultado incorrecto se les reorienta para obtener el resultado esperado.
- ✓ Conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el volumen de un prisma cuando toda vía no dominan el contenido.

CC-Es8. *Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.* Para este indicador se diseñó un indicador específico el cual permitió observar una posible carencia de conocimiento, pues parece que la profesora no:

- ✓ Conoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.

CC-Es9. *Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.* Para este indicador se diseñó un indicador específico por medio del cual se observó que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que cuando los estudiantes están siguiendo un procedimiento equivocado para calcular el volumen, se puede intervenir en el momento para favorecer un procedimiento adecuado.

Una carencia se observó en la profesora Laura, pues parece que la profesora desconoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.

Respecto al **Conocimiento del Contenido y su Enseñanza (CC-en)**, se identificaron en las tres profesoras un indicador de (Sosa: 2011) y un indicador diseñado para este trabajo, con un indicador específico para cada uno, éstos se describe a continuación:

CC-En 43. *Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán mejor algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.* Para el cual se estableció un indicador específico por medio del cual se observa que parece que las tres profesoras:

- ✓ Conocen que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas, la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.

En la clase de la profesora Consuelo se observa un indicador específico dentro del indicador **CC-En43** que no se observa en la clase de Rosy y Laura, este indicador específico permitió dar cuenta de que parece que Consuelo:

- ✓ Conoce que cuando los estudiantes utilizan unidades cúbicas en la representación de prismas, pueden dar una respuesta basada en sus propias construcciones.

CC-En* *Conocer recursos para trabajar un contenido.* Para este indicador se diseñó un indicador específico por medio del cual se observó que la profesora:

- ✓ Conoce un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.

El indicador **CC-En38.** *Saber poderosas analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes,*

puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático. Fue observado en las profesoras Consuelo y Laura por medio de dos indicadores específicos distintos. Para lo evidenciado por Consuelo se diseñó el indicador específico que da cuenta de que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que para centrar el tema de las características de los prismas es necesario acudir a una analogía que permita resaltar el contenido que se está trabajando en la clase.

Mientras que para la profesora Laura se diseñó otro indicador por medio del cual se observó que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que para que los estudiantes comprendan la representación de un prisma por niveles, se puede acudir a la analogía de prisma-edificio, niveles-pisos.

En la clase de Rosy se observó el indicador **CC-En25**. *Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”.* Tomado de (Sosa: 2011) cuyo indicador no se observa en las clases de Consuelo y Laura. Para éste se diseñó un indicador específico, por medio del cual se observó que parece que la profesora:

- ✓ Conoce el uso de palabras comunes para facilitar la comprensión de los estudiantes.

El Conocimiento del Currículum sólo fue observado en la profesora Laura por medio del indicador **CC2**. *Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.* Para el que se diseñó un indicador específico, el cual da cuenta de que parece que la profesora:

- ✓ Conoce que después de haber trabajado con los estudiantes el volumen de prismas, el siguiente tema a desarrollar es el volumen de pirámides.

Probablemente no es suficiente la observación para identificar el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Especializado en las tres docentes, puesto que puede haber muchos más elementos a considerar para identificar el CEC como la revisión exhaustiva del programa de Educación Normal y el perfil de egreso de las escuelas normales para la asignatura de matemáticas. Además de una revisión de los cursos de matemáticas que se promueven en los centros de maestros. Si lo que se acaba de mencionado en las líneas anteriores fuera incorporado en los exámenes que se diseñan para evaluar las competencias docentes respecto a geometría, además de la implementación de entrevistas por medio de las cuales se logre la obtención de información acerca del conocimiento que poseen los docentes y los resultados de esto entrara en una regilla de análisis, arrojaría un resultado me parece que un poco más completo. Sin embargo, cabe decir que sólo se empleó la observación no participante de las clases de las profesoras por motivos de tiempo y porque es en la clase del profesor en donde podemos detectar gran parte del MKT aunque no puedo afirmar que sea la única manera de obtener la información que se requiere.

Recomendaciones para el desarrollo profesional

En este caso, se hizo un estudio con profesoras de sexto grado de Educación primaria en el área de la geometría tridimensional en una de las lecciones que trabajan el volumen de prismas tomando en cuenta que es un tema de difícil comprensión (Freudental: 1993), Rico y Vergnaud (1983) ambos citados por (Carrizoza: 2007) y complejo de enseñar como lo refiere (Carrizoza: 2007) citado en el apartado del análisis de libros de texto que forma parte de los antecedentes de esta tesis.

Dado que en mi profesión también me desempeño como profesor frente a grupo considero importante promover discusiones colaborativas entre los colegas que permitan enriquecer el bagaje de conocimientos con miras a la mejora y perfección de los conocimientos que se involucran en la enseñanza de las matemáticas haciendo un vínculo con la geometría tridimensional como una de las ramas en la

que se tratan temas que se muestran como difíciles de enseñar y/o comprender en la práctica docente.

Considero importante mencionar que la lección 41 del libro de matemáticas sexto grado la cual se incluye en esta tesis por ser la lección que las tres profesoras trabajaron con los estudiantes al momento en que se les observó, es la misma lección que (Tinoco, 2010) aborda para su trabajo relacionado con la Investigación-acción (véanse los antecedentes de esta tesis en el apartado del aprendizaje). Él plantea la detección de problemáticas surgidas en la clase en torno al aprendizaje del volumen, la planeación y la aplicación de una secuencia didáctica que atienda a dicha problemática y concluye en la importancia de reflexionar por parte del profesor respecto de su misma práctica. Sin embargo, con lo realizado en esta tesis puedo decir que el profesor además de reflexionar y analizar respecto a su misma enseñanza, también puede compartir y desarrollar círculos académicos respecto a los conocimientos matemáticos que posee y los que se muestran como una carencia, de tal manera que el profesor opte por fortalecer los conocimientos matemáticos que no posee o los tiene de forma fragmentada.

Es necesario partir de los conocimientos que tienen los profesores, de su contexto, de su formación profesional y de su experiencia para generar discusiones, dudas y poder conformar o replantear sus propias concepciones respecto al conocimiento matemático que poseen y sus formas de enseñanza. A partir de ello, se propone generar espacios formativos donde haya análisis y discusiones que permitan favorecer realmente los conocimientos tanto matemáticos como didácticos que requieren para la práctica docente.

El análisis como el presentado en esta tesis y compartido con los participantes en las observaciones, me da la información de que hay fortalezas en el conocimiento matemático de las profesoras pero también algunas carencias de conocimiento, sin embargo, cabe mencionar que las profesoras aceptan y son conscientes de las carencias que poseen en dicho conocimiento. Tal es el caso de la profesora Laura que después de haberme solicitado el video para ver su propia clase, me solicitó

observar nuevamente la parte de la clase que ella había detectado con errores de enseñanza. Sin embargo, preciso decir que esa clase no fue tomada para este estudio. Actitudes como la que muestra esta profesora me parece que reflejan un ambiente de confianza con miras a mejorar las prácticas docentes.

Respecto a mi experiencia en España, me parece importante la forma en cómo han trabajado la mayoría de los integrantes del equipo de la Universidad de Huelva en el Departamento de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, sociales y Matemáticas) y Filosofía. Ribeiro por ejemplo, realizó un trabajo colaborativo con dos profesoras que trabajaban en el primer ciclo de primaria. Este trabajo le permitió dar cuenta de los conocimientos matemáticos para la enseñanza empleados por ambas profesoras en sus clases de matemáticas, pero a la vez permitió que ambas profesoras colaboraran en el fortalecimiento de sus conocimientos tanto del contenido matemático como sus conocimientos didácticos del contenido, de tal manera que este estudio permitió favorecer a las profesoras en esos dos aspectos. Nuria Climent, además de las múltiples tareas de la universidad atiende a un grupo de profesores del nivel básico en el que analizan y reflexionan acerca del conocimiento matemático y conocimiento didáctico que los profesores ponen en juego durante sus clases.

Esta forma de trabajo entre investigadores y profesores del nivel básico que actualmente se está desarrollando en España me hizo pensar en una posible manera de trabajar con los profesores del nivel primaria en México. Probablemente los profesores muestran una actitud colaborativa para que el profesor investigador o el investigador realice un buen trabajo, pero también están esperando no la respuesta masiva que arrojan las investigaciones actuales sino una respuesta más individualizada pero a la vez colaborativa en la que el profesor realmente se involucre en algo educativo, útil e inmediato.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, J. (2009). *Uso de tecnología en la enseñanza de la geometría tridimensional en la escuela primaria*, Tesis de maestría, UPN, México

Ball, D. L., Thames, H. M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Carrizoza, K. (2007). *Implementación de dos libros de texto diferentes para la enseñanza del concepto de medición de volumen*, Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, México

Castro, E. (2001). *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*, Síntesis, Madrid

Cattaneo, L. (2010). La enseñanza de la Geometría, *Didáctica de la Matemática*, 47-74, Argentina

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*, Pearson Educación, Madrid

Chamorro, M. C., y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

Del Olmo M. et al, (1993). *Superficie y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*, Síntesis, Madrid

Dorantes, C. (2008). Exploración con profesores de nivel básico, acerca de algunos temas de geometría del espacio”, Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México

Frías, A., Gil, F. y Moreno, F., (2001). Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*, 477-502, Madrid, Síntesis.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, 74, 163 - 183

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3, 194 - 220

http://enlace.sep.gob.mx/ba/informes_para_impresion

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*, Quinta Edición, Editorial McGraw Hill, México.

López, E. (2009). *La imaginación espacial y la enseñanza, el caso de la construcción de cubos*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México

Miguel, A. (2008). *Estudio sobre las concepciones de los docentes de Educación Primaria en torno de la enseñanza de la geometría tridimensional en el tercer ciclo*, Tesis de maestría, UPN, México

Moreno, A.; Bulla, B.; Giraldo, N.; Mantilla, A. y Mantilla, A. (1998). Introducción a la medida del volumen, *Revista EMA*, 3, 254-262

Olvera, F. (2013). *Comunidad de profesores. Un estudio de desarrollo profesional para aprender geometría de los sólidos a partir de la práctica*, Tesis de Doctrado, CINVESTAV-IPN, México

Ribeiro, C. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas*. Universidad de Huelva, España

Rodríguez, G.; Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*, Aljive, Granada

Saiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza*, Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN, México

SEP (1993). *Plan y Programas de Estudio, primaria, México*

SEP (1997). *Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales, 1997, México*

SEP (2001). Geometría, en *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, 209 -302, México

SEP (2009). *Programas de estudio 2009 Quinto grado, Educación Básica primaria, México*

SEP (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro Educación Básica, México*

SEP (2011). *Programas de Estudios 2011, Guía para el maestro Educación Básica, México*

SEP (2012). *Libro de texto gratuito. Sexto grado, Educación Básica primaria, México*

SEP (2013). *Libro de texto gratuito. Sexto grado, Educación Básica primaria, México*

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14. Trad. y edición española ("El saber y

entender de la profesión docente”) en Estudios Públicos (Centro de Estudios Públicos, Chile), núm. 99, 2005, 195-224.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato : un estudio de dos casos*. Tesis de doctorado, Universidad de Huelva, España

Thompson, J. (1996). *Geometría*, Limusa, México

Tinoco, M. (2010). *El saber cómo enseñar a calcular el volumen de prismas y cubos a estudiantes de quinto grado de primaria*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, México

ANEXO 1.

Relación de temas de geometría por grado escolar, según el currículum de 1993

Grado	Cantidad de lecciones de Geometría	Temas abordados	Cantidad de lecciones de G. Tridimensional
1°	31 de 128 24.21 %	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicación espacial: reproducción de figuras y mosaicos; de trayectos y ubicación de sí mismo en relación con otros seres u objetos • Figuras geométricas: recubrimiento con figuras iguales en forma y tamaño (cuadrados, rectángulos, triángulos); formas con lados rectos y curvos; construcción y trazo de figuras más grandes que el modelo dado. • Objetos tridimensionales con caras planas y caras curvas. 	6 4.68 %
2°	35 De 117 29.91 %	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicación Espacial: Ubicación en un plano de figuras geométricas; Ubicación de objetos en un plano; relaciones espaciales arriba, abajo, adentro, afuera, delante, atrás, sobre, encima, derecha, izquierda; Descripción y reproducción de trayectos entre dos puntos • Figuras geométricas: comparación directa de superficies. Comparación de áreas con medidas arbitrarias (cuadrados y rectángulos); perímetro de figuras construidas; reproducción de una imagen en retículas cuadrículadas y trianguladas; simetría y movimientos de rotación y traslación de una figura: localización de triángulos, cuadrados y romboides, reproducción de composiciones geométricas; figuras que tienen una propiedad geométrica en común, trazo de figuras en cuadrículas a escala; identificación de una figura a partir de la descripción oral de sus características geométricas; percepción del triángulo contenido en otra figura; construcción y transformación de figuras geométricas; • Objetos tridimensionales: clasificación por número, tamaño y forma de los lados y número de vértices; trazo de las caras de un cuerpo geométrico; relación de cuerpos geométricos y las diferentes representaciones de sus caras en el plano; 	8 6.83 %
3°	19 de	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicación espacial: Ubicación de lugares en croquis y plano 	7

	89 21.34 %	<p>usando puntos de referencia y puntos cardinales; interpretación y elaboración de planos; descripción de trayectos sobre mapas y croquis; rutas paralelas y perpendiculares en mapas o croquis sencillos;</p> <ul style="list-style-type: none"> Figuras geométricas: comparación de superficies por superposición de dos o más figuras; medición y comparación de superficies de diversas figuras por medio de la superposición de figuras y con el cm^2; trazo de figuras geométricas usando, líneas paralelas y perpendiculares; identificación y reproducción de figuras simétricas, construcción de figuras a partir de otras. Objetos tridimensionales: Descripción de la forma, tamaño, y posición de un cuerpo en reposo o en movimiento; Construcción y uso de unidades de medida de 1 litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ litro. 	7.86%
4°	25 de 91 27.47 %	<ul style="list-style-type: none"> Ubicación espacial: Representación de puntos y desplazamientos en el plano; elaboración de planos mediante trazo de paralelas y perpendiculares; diseño, lectura e interpretación de croquis y planos Figuras geométricas: Cálculo de área y perímetro de figuras; fórmula para obtener el área del rectángulo; Uso del metro cuadrado; Identificación de figuras simétricas y trazo de sus ejes. Elaboración de dibujos simétricos; uso de figuras de igual perímetro y diferente área; Figuras con igual área y diferente perímetro; introducción a la noción de ángulo mediante la partición de círculos en medios, cuartos y octavos; trazo de paralelas y perpendiculares en la reproducción de figuras; identificación y clasificación de figuras por sus características; reproducción de figuras a escala; descripción y trazo de cuadriláteros; trazo de la altura de triángulos; trazo del círculo; descripción, clasificación y trazo de triángulos tomando en cuenta su características; cálculo del área de triángulos; Objetos tridimensionales: Identificación y clasificación de poliedros, dadas algunas características; construcción del cubo; noción de volumen; descripción y construcción de prismas y pirámides. 	10 10.98 %
5°	25 de 85 29.41 %	<ul style="list-style-type: none"> Ubicación espacial: Interpretación de mapas; uso de coordenadas en un plano; Figuras geométricas: trazo de figuras geométricas; trazo de figuras geométricas que tienen segmentos paralelos y líneas perpendiculares; propiedades que definen una figura; 	8 9.41 %

		<p>polígonos regulares, círculo y circunferencia; clasificación de figuras geométricas; construcción de figuras a escala; perímetro de polígonos regulares e irregulares y figuras curvilíneas; área de polígonos regulares e irregulares;</p> <ul style="list-style-type: none"> Objetos tridimensionales: desarrollos planos de cuerpos geométricos; volumen de prismas; uso del cm^3 con respecto al litro; 	
6°	<p>29 de 87 33.33 %</p>	<ul style="list-style-type: none"> Ubicación espacial: Uso de coordenadas en el primer cuadrante; elaboración de croquis; ubicación de puntos en un plano; planos a escala; Figuras geométricas: perímetro del círculo; área del romboide; uso de la hectárea; cálculo de áreas; fórmula del trapecio y del rombo para calcular el área; construcción de figuras a escala; comparación de figuras a escala; identificación de formas geométricas; clasificación de figuras; reproducción de figuras con regla y compás; medición de ángulos; Objetos tridimensionales: construcción de desarrollos planos y armado de prismas y pirámides; volumen de cubos y prismas; áreas de prismas; fórmula del volumen del cubo y de prismas. 	<p>12 13.79 %</p>

ANEXO 2.

Indicadores para identificar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza, propuestos por Sosa (2011:455-460)

Subdominio	Indicador
CCC	CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.
	CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).
	CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas.
	CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.
	CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o de una regla.
CEC	CEC1. Saber el significado de los conceptos.
	CEC2. Saber los pasos ocultos: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.
	CEC3. Saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc., están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.
	CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.
HM	HM1. Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad
	HM2. Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).
	HM3. Saber la aplicación del contenido en otras áreas.
	HM4. Saber cómo concretar un contenido con otro más específico.
	HM5. Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores.
	HM6. Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos posteriores.
CC-Es	Escuchar e interpretar CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla del lenguaje común con matemático).

Subdominio	Indicador
	<p>Necesidades y dificultades CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.</p>
	<p>Confusiones y/o equivocaciones CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una (s) operación (es) o transformación (es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.</p>
	<p>No saben/no recuerdan/no ven/o no se fijan CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad.</p>
	<p>Quedarse con una imagen inadecuada CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.</p>
	<p>Cansado y aburrido CC-Es6. Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.</p>
	<p>Interesante, motivador o desafiante CC-Es20. Saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema que el profesor elija para enseñar el contenido.</p>
	<p>Respuesta intuitiva CC-Es. Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.</p>
	<p>Lo que les será más comprensible o resolver fácilmente CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto). CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán “mejor el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo”. CC-Es19. Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento.</p>

Subdominio	Indicador
	<p>Obstáculos comunes para llegar a la solución</p> <p>CC-Es15. Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema.</p> <p>CC-Es16. Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido</p> <p>CC-Es17. Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema.</p> <p>Cc-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.</p>
CC-En	<p>Ejemplos</p> <p>CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea.</p> <p>CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto.</p> <p>CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase.</p> <p>CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido.</p> <p>CC-En5. Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto.</p> <p>CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.</p> <p>Ayudas</p> <p>CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema.</p> <p>CC-En8. Saber que una “buena” estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema.</p> <p>CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.</p> <p>Gestión de la participación (GP)</p> <p>GP1. Preguntas (Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático)</p> <p>CC-En10. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar.</p>

Subdominio	Indicador
	<p>CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes).</p> <p>CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación.</p> <p>CC-En13. Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos.</p> <p>CC-En14. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo.</p> <p>CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica.</p> <p>GP2. Respuestas</p> <p>CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase.</p> <p>CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática.</p> <p>CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático.</p> <p>CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido.</p> <p>CC-En20. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro.</p> <p>CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.</p> <p>GP3. Preguntas y respuestas</p> <p>CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes.</p> <p>GP4. Para que hagan los ejercicios</p> <p>CC-En23. Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.</p> <hr/> <p>Traducir</p> <p>CC-En24. Saber cómo “traducir” a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo “traducir” alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual.</p> <p>CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”.</p>

Subdominio	Indicador
	<p>Hacer notar/remarcar/destacar CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.</p>
	<p>Alertar/prevenir CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. CC-En28. Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.</p>
	<p>Preparar actividades CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando.</p>
	<p>Forma de presentarlo/representarlo CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. CC-En33. Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. CC-En38. Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático. CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido.</p>

Subdominio	Indicador
	<p>CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar.</p> <p>CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.</p> <p>CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido.</p> <p>CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema.</p> <p>CC-En46. Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.</p>
CC	CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto.
	CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.
	CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto.

ANEXO 3.

Estructura de la clase de Matemáticas de la profesora Consuelo, lección 41. Volumen de prismas. (Cuadro C1)

Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3	Nivel 4
I. Inicio [5-29] {{ }}.	1.2. [5-27] Recuperación de las características de los prismas (mediante preguntas) {{{ }}.			
II. Desarrollo [30-336] Cálculo del volumen de los prismas representados en el libro de texto {{ }}.	2.1. [31- 190] Respuesta a las dos preguntas de la primera página (pág. 162) {{{ }}.	2.1.1. [31-149] Pregunta 1 {{{{ }}}).	2.1.1.1. [32-40] La profesora pide a los estudiantes que por equipos observen las figuras A, B, C y D en el libro de texto y que a su vez averigüen si tienen el mismo volumen {{{{ }}}).	
			2.1.1.2. [42-59] La profesora pasa por los equipos a preguntar lo que han averiguado los estudiantes respecto a si son iguales los prismas en volumen.	
			2.1.1.3. [61-64] Por equipos la maestra pide a los estudiantes que comprueben su respuesta de la figura A representando el prisma con cubos en sus tres dimensiones. {{{{ }}}).	
			2.1.1.4. [83] La profesora pide a los estudiantes del equipo 4 que le señalen el área de la base del prisma {{{{ }}}).	
	2.1.2. [150-164] Pregunta 2 {{{{ }}}). La profesora pide que uno de los estudiantes lea la pregunta 2, dé su respuesta y dé argumentación {{{{ }}}).		2.1.1.5. [92-100] La profesora pide a los estudiantes del equipo 6 que le muestren la altura, el largo y el ancho del prisma {{{{ }}}).	
	2.1.3. [164- 190] Por medio de preguntas la profesora rescata el largo, ancho y altura de los prismas a los cuales nombra características de los prismas {{{ }}.		2.1.1.6. [108-132] La profesora pide a todo el grupo de estudiantes que le digan el volumen de cada uno de los prismas (A, B, C y D) {{{{ }}}).	
2.2. [190-336] Cálculo de los prismas A, B y C que están		2.2.1. [192-220] Planteamiento de la tarea y trabajo en pequeños grupos {{{{ }}}).		
		2.2.2. [221-336] Puesta	2.2.2.1. [225-234] Respuesta al volumen del prisma A {{{{ }}}).	
			2.2.2.2. [235-240] Respuesta al volumen del prisma B {{{{ }}}).	

	representados en la página 163{{{}}}	en común en gran grupo {{{{ }}}}	2.2.2.3. [241-336] Respuesta al volumen del prisma C {{{{ }}}}	2.3.3.1. [241-287] La profesora pide a los estudiantes que le digan cómo le hicieron para obtener las medidas del prisma, pues no está dada una medida de una dimensión. Los estudiantes dicen qué hicieron para obtener esa medida {{{{{{ }}}}}}. 2.3.3.2. [288-302] La profesora se percata de que hay diferentes valores como medida del ancho que están dando los estudiantes por lo que decide que se unifique el valor de la unidad de medida y la unidad del ancho del prisma con esa unidad {{{{{{ }}}}}}. 2.3.3.3. [314-336] La profesora pide que los estudiantes den su respuesta y expliquen el procedimiento para obtenerla {{{{{{ }}}}}}
III. Cierre [337-356] {{{}}	3.1. [345-364] La profesora propone que le digan los estudiantes ¿Qué fue lo que aprendieron en esta sesión?. {{{ }}			

ANEXO 3.1

Cuadro de análisis de la clase de la profesora Consuelo

Subdominio	Indicador	Indicador específico	Líneas
CCC	CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.	Conoce que los prismas tienen caras.	13
		Conoce que una de las características propias del hexaedro regular (o cubo) es que todas sus caras son iguales.	
		Conoce que el hexaedro regular (o cubo) forma parte de los prismas.	
		Conoce e identifica los prismas rectangulares como un tipo de prismas.	27
		Conoce que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular (o cubo).	66-67
		Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.	135-150 160-164
CEC	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.	Distingue de manera implícita entre el procedimiento unidimensional y el procedimiento tridimensional para calcular el volumen de prismas.	90-99 166-189
		Se adentra en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún está en el tratamiento unidimensional.	82-86
		Conoce que una vez tratado el procedimiento unidimensional del volumen, se debe iniciar el tratamiento tridimensional para el cálculo de volumen de prismas.	192-195
CC-Es	CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones	Conoce que cuando un dato está ausente en una situación matemática y se presta a ambigüedades, se debe plantear un procedimiento consensuado para obtener ese dato.	241-291 Y 298-302

	matemáticas, para evitar confusiones y errores.	Conoce que cualquiera de las caras de los prismas rectangulares puede ser tomada como su base.	82-84
CC-En	CC-En38. Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.	Conoce que para centrar el tema de las características de los prismas es necesario acudir a una analogía que permita resaltar el contenido que se está tratando en la clase.	13 -15
	CC_En* Conocer recursos para trabajar un contenido.	Conoce recursos para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.	59-62 111-112
	CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.	Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.	59-62
		Conoce que cuando los estudiantes utilizan unidades cúbicas en la representación de prismas, pueden dar una respuesta basada en sus propias construcciones.	71-72

ANEXO 4.

Estructura de la clase de Matemáticas de la profesora Rosy, lección 41.

Volumen de prismas. (Cuadro C2)

Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3	Nivel4
I. Inicio [4-37] {{ }}.	1.1. [4-5] Breve definición del volumen {{{ }}. 1.2. [6-8] Trazo de un prisma en el pizarrón en representación paralela para calcular su volumen {{{ }}. 1.3. [9-11] Construcción de un prisma por medio de cubos superpuestos por parte de la profesora {{{ }}. 1.4. [20-31] La profesora hace observaciones a los e3studiantes respecto a los prismas que están representando en su cuaderno {{{ }}.			
II. Desarrollo [38-438] Cálculo del volumen de los prismas representados en el libro de texto {{ }}.	2.1. [42-92] página 162 {{{ }}.	2.1.1. [48-92] Actividad introductoria {{{ }}.	2.1.1.1. [48-85] Cálculo del volumen de los prismas A, B, C y D {{{{ }}}}. 2.1.1.2. [86-88] Respuesta a la pregunta 1 {{{{ }}}}. 2.1.1.3. [88-92] Respuesta a la pregunta 2. {{{{ }}}}.	
	2.2. [93-263] Página 163 {{{ }}.	2.2.1. [93-263] Actividad 1.	2.2.1.1. [114-142] Cálculo del volumen del prisma A {{{{ }}}}. 2.1.1.5. [142-159] Cálculo del volumen del prisma B {{{{ }}}}. 2.2.1.2. [159-225] Cálculo del volumen del prisma C {{{{ }}}}. 2.2.1.3. [226-241] Respuesta ala pregunta 3 {{{{ }}}}. 2.2.1.4. [241-263] Respuestas al reto de la actividad 1 {{{{ }}}}.	
	2.3. [263-438]Página 164 {{{ }}	2.3.1. [263-438] Actividad 3 {{{{ }}}}.	2.3.1.1 [401-421] Cálculo del volumen de la pecera A {{{{ }}}}. 2.3.1.2 [422-427] Cálculo del volumen de la pecera B {{{{ }}}}. 2.3.1.3 [428-438] Respuesta a la pregunta de la actividad 3.	
III. Cierre [438-456] {{ }}.	3.1. [438-447] Lectura del cuadro te texto que muestra información acerca del volumen, la profesora insiste en el tratamiento tridimensional para calcular el volumen {{{ }}. 3.2 [448-456] La profesora deja como tarea extra clase la actividad 4.			

ANEXO 4.1. Cuadro de análisis de la clase de la profesora Rosy

Subdominio	Indicador	Indicador específico	Líneas
CCC	CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.	Conoce una definición del volumen.	4-5
		Conoce características distintivas entre prismas y pirámides.	29-31
		Conoce que el hexaedro regular (o cubo) se incluye en el grupo de los prismas	45-53 60-61
		Conoce e identifica los prismas rectangulares como un tipo de prismas.	226-227 281-282
		Conoce que la representación de la unidad cúbica se puede hacer por medio de un hexaedro regular.	45-48 95-96 135-139
		Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.	46-48
		Conoce que al comparar dos prismas continentes de diferentes dimensiones es necesario calcular el volumen de ambos.	300-305
CEC	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.	Conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.	43-53 63-64 73-76 135-139
		Conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.	39-41 118-120 139-154 228-244
		Se adentra en la perspectiva tridimensional del volumen cuando aún está en el tratamiento unidimensional.	60-61 139-149
		Se adentra en el uso del centímetro cúbico (CM ³) adjudicándose a unidades cúbicas.	140-154
		Conoce que el volumen de los prismas guarda cierta relación con su capacidad.	430-436

		Distingue implícitamente entre el procedimiento unidimensional y tridimensional para el cálculo del volumen de prismas.	60-61 80 83-84 128-130
		Es lo suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición.	176-205
CC-Es	CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.	Conoce que para evitar que los estudiantes tomen decisiones erróneas al comparar capacidades de prismas es necesario insistir en el cálculo del volumen de ambos prismas.	300-305
	CC_En* Conocer recursos para trabajar un contenido.	Conocimiento de un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional	9-16
CC-En	CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".	Conoce el uso de palabras comunes para facilitar la comprensión de los estudiantes.	29
	CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.	Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.	10-12

ANEXO 5.

Estructura de la clase de Matemáticas de la profesora Laura, lección 41. Volumen de prismas. (Cuadro C3)

Nivel 1	Nivel 2		Nivel 3	Nivel 4
I. Inicio [6-30] { { } }.	1.1. [6-8] La profesora da indicaciones de cómo trabajarán los estudiantes y el material que deben sacar para la clase { { { } } }.			
	1.2. [9-30] La profesora pide a los estudiantes que recuerden dos expresiones que involucran al volumen (la capacidad y el cm^3 { { { } } }).			
II. Desarrollo [31-788] Cálculo del volumen de los prismas representados en el libro de texto { { } }.	2.1. [31-61] página 162 { { { } } }.	2.1.1. [31-61] Actividad introductoria { { { } } }.	2.1.1.1. [33-35] Cálculo del volumen de los prismas A, B, C y D { { { { } } } }.	
			2.1.1.2. [35-47] Respuesta a la pregunta 1 { { { { } } } }.	
			2.1.1.3. [48-61] Respuesta a la pregunta 2. { { { { } } } }.	
	2.2. [62-499] Página 163 { { { } } }.	2.2.1. [62-499] Actividad 1.	2.2.1.1. [102-173] Cálculo del volumen del prisma A { { { { } } } }.	
		2.1.1.5. [174-283] Cálculo del volumen del prisma B { { { { } } } }.		
		2.2.1.2. [283-412] Cálculo del volumen del prisma C { { { { } } } }.		
		2.2.1.3. [2414-499] Resolución del reto de la actividad 1 { { { { } } } }.		
	2.3.1. [500-567] Actividad 3 { { { { } } } }.	2.3.1.1 [516-550] Cálculo del volumen de los prismas A y B (El caso de las peceras) { { { { } } } }.		
		2.3.1.2. [552-562] Respuesta a la pregunta de la actividad 3.		
		2.3.1.3. [563-567] Lectura del cuadro de texto que muestra información acerca del volumen, la profesora insiste en el tratamiento tridimensional para calcular el volumen { { { { } } } }.		
	2.3. [500-567] Página 164 { { { } } }	2.3.2. [569-788] Actividad 4 { { { { } } } }.	2.3.2.1. [569-592] Cálculo de volumen de cada caja de juguetes { { { { } } } }.	
			2.3.2.2. [593-636] Cálculo de volumen de cada juguete?	
			2.3.2.3. [737-759] Cálculo del total de juguetes por caja { { { { } } } }.	
			2.3.2.4. [711-733; 761-788] Respuesta a las preguntas de la segunda parte de la actividad 4 { { { { } } } }.	
III. Cierre [438-456] { { } }.	3.1. [788-796] La profesora relaciona la capacidad con el volumen { { { } } }.			
	3.2. [797-801] La profesora pregunta si se podrá obtener el volumen de las pirámides para dar indicios de que es un tema que se trabajará posteriormente { { { } } }.			

ANEXO 5.1. Cuadro de análisis de la clase de la profesora Laura

Subdominio	Indicador	Indicador específico	Líneas
CCC	CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.	Conoce la distinción entre área y volumen.	200-203 216-220 352-354
		Conoce que al comparar dos prismas continentes de diferentes dimensiones es necesario calcular el volumen de ambos.	504-521
		Conoce de forma anticipada las actividades y sus respectivas respuestas que propone el libro de texto respecto al contenido.	552-562 754-775
		Conoce que todas las aristas de un hexaedro regular tienen la misma longitud.	595-610
		Conoce que dos o más prismas pueden tener formas diferentes pero mantener el mismo volumen.	726-748
	CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparecen en las definiciones formales).	Conoce la importancia de tener siempre presentes los términos matemáticos que aparecen en las definiciones formales durante todo el tiempo en que sea tratado el contenido.	99-102
CCC	CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.	Conoce que para calcular el volumen de un prisma cuadrangular o rectangular (tratamiento tridimensional) una forma es comenzar por calcular el área de una de sus caras.	121-123
		Muestra solidez en el conocimiento, esto le permite hacer uso de distintos procedimientos para calcular el volumen.	121-143 245-266
CEC	CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los	Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con perímetro.	87-96 165-170

	estudiantes.	Conoce que un error de los estudiantes al calcular el volumen de prismas puede ser que confundan área con volumen.	245-279
	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.	Conoce el tratamiento unidimensional para calcular el volumen de prismas.	32-40 220-243
		Da indicios de que conoce el tratamiento tridimensional para calcular el volumen.	244-279
			267-279
			319-321
			324-340
			374-377
			445-452
			516-522
			546-550
		778-790	
		797-811	
	Se adentra en el uso del centímetro cúbico (CM^3) adjudicándose a unidades cúbicas.	20-25	
	Distingue entre el procedimiento unidimensional y tridimensional para el cálculo del volumen de prismas.	63-83	
	Conoce que se pueden utilizar unidades de medida de longitud no convencionales o poco usuales.	116-119	
297-313			
315-317			
354-374			
		391-401	

CC-Es	CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto – mezcla de lenguaje común con matemático).	Conoce que se debe escuchar el conocimiento y pensamiento matemático de los estudiantes para interpretar lo que están comprendiendo acerca del volumen de prismas.	454-473 484-499
	CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.	Conoce las dificultades que tiene los estudiantes para identificar las tres dimensiones de un hexaedro regular cuando se tiene como dato único la medida de sus aristas.	595-610
			620-634
	CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.	Conoce que cuando los estudiantes padecen un despiste y dan un resultado incorrecto, se les reorienta para obtener el resultado esperado. Conoce que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el volumen de un prisma cuando toda vía no dominan el contenido.	126-143
602-636 696-707			

	CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.	Conoce que la confusión entre polígono y poliedro puede ser una dificultad común para los estudiantes.	99-102
	CCEs9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.	Conoce que cuando los estudiantes están siguiendo un procedimiento equivocado para calcular el volumen, se puede intervenir en el momento para favorecer un procedimiento adecuado.	528-546
CC-En	CC-En38. Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.	Conoce que para que los estudiantes comprendan la representación de un prisma por niveles, se puede acudir a la analogía de prisma-edificio, niveles-pisos.	26-27
			220-223
	CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor”	Conoce que al hacer la representación de prismas con material concreto (unidades cúbicas), la enseñanza del volumen de prismas es mejor comprendida.	5-6 32-40 47-57 153-156 227-242

	algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.		342-352 605-610
	CC-Es* Conocer recursos para trabajar un contenido.	Conocimiento de un recurso para trabajar el volumen en su perspectiva unidimensional.	5-6 32-40 47-57 153-156 227-242 342-352
CC	CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.	Conoce que después de haber trabajado con los estudiantes el volumen de prismas, el siguiente tema a desarrollar es el volumen de pirámides.	812-816

ANEXO 6

Transcripción del video de la clase de la profesora Consuelo, lección 41, sexto grado.

- 1 Mtra: Lo que ven en el libro son prismas. ¿Alguien me puede decir las características de
2 esos prismas?, véanlos bien. ¿De qué están hechos?
- 3 Estudiante H1: de cubos.
- 4 Mtra: De cubos, pero ¿Qué, qué forma tienen?
- 5 Estudiante H2: Rectángulos
- 6 Mtra: ¿Cómo están siendo limitados? ¿Qué líneas están ocupando?
- 7 [Una niña de nombre Estudiante M1 levanta la mano]
- 8 Mtra: A ver Estudiante M1
- 9 Estudiante M1: ¿Todos tienen dos caras?
- 10 Mtra: Tienen caras, pero eso es con el cubo, estamos hablando de los prismas. Los
11 prismas es como hablar en una forma muy general y decir todos son niños, pero cada
12 niño tiene ciertas características. Los prismas también van a tener ciertas características.
13 ¿De qué líneas están conformados esos prismas que están viendo ahí? ¿Qué líneas
14 tienen?
- 15 Estudiante M2: líneas rectas.
- 16 Mtra: Líneas rectas exactamente. Vean ahí que tienen líneas rectas y que tienen ciertas
17 formas. Por ejemplo. ¿Quién me dice, qué formas tienen esas figuras que están ahí en el
18 libro?
- 19 Estudiante M3: prismas
- 20 Mtra: Forma de prismas, ¿Cómo se llaman?
- 21 Estudiante H3: ¿cubos?
- 22 Mtra: Cubos, ¿Qué más hay ahí?
- 23 Estudiante H2: Rectángulos
- 24 Mtra: Rectángulos, ¿Es rectángulo?, ¿Se les llama rectángulos?, yo digo que rectángulos
25 no.
- 26 Estudiante H2: No, prisma rectangular.
- 27 Mtra: Prismas rectangulares exactamente, ahí tenemos figuras en forma de prismas
28 rectangulares y también, ah, eh, no exactamente igual pero también tenemos esas
29 figuras, bueno, ¿Qué es lo que vamos a hacer el día de hoy? Fíjense bien, esto va a ser
30 de la siguiente manera, ya nos acordamos de que tienen esa figura y que está limitada

31 por líneas... Líneas rectas y ahora queremos saber cuántos cubos hay en el prisma.
32 Quiero que observen la figura A, la figura B, la figura C, la figura D. obsérvenlas bien y
33 ahora fíjense que esas, este... esos prismas, esos prismas. Tienen volumen. Mi pregunta
34 es, y vamos a trabajarlo por equipo, y pueden comentarlos y pueden decirlo ¿Tendrán el
35 mismo volumen?

36 Estudiante H2: no

37 Mtra: No me lo digan a mí, coméntenlo entre ustedes y ahorita, ahorita entre ustedes lo...
38 este... lo comentamos entre todos, tenemos tiempo para comentarlo, quiero que lo
39 comenten por equipos y quiero que me digan si tienen el mismo volumen y si me dicen
40 que si ¿Por qué? Y si no lo tienen ¿Por qué? También. ¿Está bien? Comenzamos tienen
41 tiempo, sale tiempo.

42 [Los estudiantes comienzan a comentar mientras la profesora se dirige al equipo 1]

43 Mtra: [Dirigiéndose a los estudiantes del equipo 1] ¿tienen el mismo volumen? Vean de
44 qué manera lo podemos constatar.

45 Estudiantes del equipo 1. Dan sus propias argumentaciones. [Esta parte del video es
46 inaudible]

47 Mtra: Pero ¿Por qué?

48 Estudiantes del equipo 1: Dan otra argumentación (debido al ruido que se genera al
49 trabajar en equipo es inaudible la intervención de los estudiantes).

50 [La profesora se retira y se dirige al equipo 2].

51 Mtra: ¿Cómo le hicieron? ¿Son lo mismo?

52 Estudiante H3: no

53 Mtra: ¿Por qué?

54 Estudiante H3: porque 3 por 3 es 9 por 3, 27.

55 Estudiante M4: 3 por 3 nueve.

56 Mtra: ¿Todos tienen el mismo volumen?

57 Estudiante H3: no

58 [La profesora se dirige al equipo 3]

59 Mtra: ¿Ustedes ya lo comprobaron?

60 Equipo 3: ya

61 [La profesora se dirige a todos los equipos]

62 Mtra: Ahora lo van a comprobar usando los dados. Los van a utilizar y van a formar la
63 primera figura y me van a enseñar, y me van a enseñar la primera figura y me van a
64 contar, perdón, y me van a decir qué volumen tiene la figura A pero formándolo con sus
65 dados. Ya pueden abrir su material.

66 [Los niños en sus equipos abren una bolsa de dados y comienzan a formar los prismas.
67 Mientras que la profesora pasa por cada uno de los equipos observando y cuestionando
68 a los niños acerca de lo que están haciendo, además de ayudarles a formar los prismas].

69 Mtra: [Dirigiéndose a todos los equipos y con un dado en la mano dice:] La unidad de
70 medida en este momento es el... dado.

71 Estudiante M6: (con voz de cansancio) Maestra ya.

72 Mtra: ¿Quién ya hizo la primera figura? Quien ya hizo la primera figura ahora hace la
73 segunda figura.

74 Mtra: [Dirigiéndose al equipo 3]. Al formar esta figura, utilizaron los dados ¿Cuántos dados
75 utilizaron?

76 Estudiante H4. Doce

77 Mtra: Ponlo aquí [refiriéndose a la figura en el libro] vamos por la segunda. [Dirigiéndose a
78 la otra niña del equipo] ¿Ya lo escribieron? Bien.

79 Estudiante H5: maestra mire.

80 Mtra: Voy.

81 [La profesora se dirige al equipo 4]

82 Mtra: ¿Qué formaron, hijos?

83 Estudiante H5: Esta.

84 Mtra: La figura B.

85 Mtra: ¿Cuál es el área de la base? Señálamela.

86 Estudiante H5: [Señala la superficie de la base superior].

87 Mtra: Muy bien.

88 Estudiante H5 (Señala también la altura del prisma). Altura del prisma.

89 Mtra: La altura del prisma. Muy bien. Anoten en su libro el volumen de este prisma.

90 [La profesora se dirige al equipo 5 observa lo que están haciendo, le dice a una de las
91 estudiantes:] fijate cómo los estas poniendo, qué medidas estas poniendo.

92 [La profesora deja al equipo 5 y pasa con el equipo 6]

93 Mtra: ¿Qué tomaron en cuenta para estas... mmm... para estas figuras que estamos
94 formando, qué tomaron en cuenta de esto?

95 Estudiante H6: el número de dados.

96 Mtra: Sí pero ¿cómo se llaman?

97 Mtra: [Señalando la altura del prisma pregunta] ¿Qué es esto?

98 Estudiante H6: La altura.

99 Mtra: La altura, ¿Qué más?

100 Estudiante H6. [Señala en el prisma formado con cubos al mismo tiempo que dice] el
101 largo y el ancho.

102 Mtra: Muy bien. Ahora escriban el volumen en su libro. Muy bien.

103 [La profesora se dirige al equipo 1 pero esta parte del video es inaudible].

104 [Ahora la profesora se dirige al equipo 4 observa el prisma que están formando los
105 estudiantes y refiriéndose al libro les da una indicación, sin embargo, es inaudible esta
106 parte del video].

107 Estudiante H7: ya acabamos.

108 Mtra: ¿Quiénes ya terminaron? [Refiriéndose a los equipos 5 y 6] ustedes ya terminaron,
109 ustedes también ya terminaron, muy bien, eh... [Acercándose al equipos 2] apúrense por
110 favor.

111 Mtra: [Dirigiéndose a todos los equipos] ahora sí, ¿ya terminamos?, ¿ya terminamos?
112 Ahora sí, vamos a contestar en equipo, a contestar en equipo las preguntas que están al
113 final de la hoja, sí, el que termine levanta la mano, ahora sí por equipo vamos a comentar.
114 Contéstenlo por equipo.

115 Estudiante H2: ya terminamos maestra.

116 Mtra: Levanten la mano para saber quiénes ya terminaron. Ustedes, ¿Ustedes también?
117 ¿Ya? Ya, muy bien. Esta actividad nos está sirviendo para darnos cuenta exactamente
118 cuántos cubos caben en el prisma ¿Quién me dice cuántos cubos, este, necesitamos
119 para hacer la figura A? [refiriéndose a los estudiantes H4 y M4] niña M4 ¿Cuántos?

120 Estudiante H4 y estudiante H6: doce

121 Mtra: Doce, ¿Quién me dice cuántos cubos se necesitaron para hacer la figura B?

122 Estudiante H8: quince.

123 Estudiante H5 y Estudiante H8: veintisiete.

124 Mtra: Veintisiete, ¿Quién dijo quince? ¿Por qué?

125 Estudiante H8: Yo, porque en alguno de los cubos yo me revolví y le puse... [No se logra
126 escuchar lo que dice al final el estudiante H8].

127 Mtra: Bueno, estamos toda vía en eh... corroborando nada más, qué volumen tiene cada
128 uno. ¿Quién me dice cuántos cubos están en la letra C?

129 Estudiantes varios: doce.

130 Mtra: No, no acá son los mismos, a ver Estudiante M5.

131 Estudiante M5: ¿En la D?

132 Mtra. En la C.

133 Estudiante M5: doce.

134 Mtra. Y ¿Quién me dice en la letra D?

135 [Varios niños levanta la mano pero la maestra señala con el dedo al Estudiante H9].

136 Estudiante H9: nueve.

137 Mtra: Las preguntas son para que ustedes se den cuenta y observen y me digan. La
138 primera pregunta ¿quién la quiere leer y me da su contestación?

139 Estudiante M6: yo la quiero leer.

140 Mtra: A ver Estudiante M6.

141 Estudiante M6: de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen? Es la A y la C.

142 Mtra: Oye, pero es que yo veo, algo diferente, si solamente veo como están eh, formados
143 los cubos de la letra A y de la letra C ¿Por qué dices que son iguales? A ver ¿Quién me
144 dice?

145 [La estudiante M7 Levanta la mano].

146 Mtra: A ver Estudiante M7

147 Estudiante M6: tienen la misma cantidad de cubos pero con esa figura... [Parte del
148 episodio inaudible]. Pero nunca cambia su número.

149 Mtra: ¿Su número o cómo le podemos decir?

150 Estudiante H8: Área

151 Estudiante H11. Volumen

152 [La profesora se percata de que alguien dijo área y dice:]

153 Mtra: Su volumen, el área no es así. Estamos hablando de que tienen, eh, lo que les va a
154 caber. En cada uno de los prismas que tenemos ahí. Vamos a llamarles prismas. Muy
155 bien, ¿Quién me dice? Y sí es la A y la C. ¿Los dos tienen el mismo número de cubos?

156 Estudiantes varios: sí.

157 Mtra: Sí. Muy bien ¿Qué pasa en la siguiente, eh, pregunta ¿qué es? La leen y me
158 ayudan a ver Estudiante H7.

159 Estudiante H7: ¿Cuántos cubos se necesitan para que el prisma C tenga el mismo
160 volumen que el B? Es quince.

161 Mtra: ¿Por qué dime, dime, este, Por qué?

162 Estudiante H7: Es la, el prisma C tiene doce cubos y el prisma B tiene veintisiete.

163 Mtra: Entonces ¿qué hiciste para saber?

164 Estudiante H7: Resté veintisiete menos doce y me salió quince.

165 Mtra: Y salió quince. ¿Están de acuerdo?

166 Estudiantes varios: sííí.

167 Mtra: Sí, exactamente, aquí nos podemos dar cuenta que esos prismas eh, que el prisma
168 C y el prisma B, sí son diferentes y tiene más cubos uno que otro, en este caso sí se tiene
169 que hacer lo que hizo el estudiante H7. Y ¿Quién me dice, se parecen esos dos prismas,
170 sí o no? La letra C y la letra B, ¿Se parecen? Aunque a simple vista se parecen pero
171 tienen diferente número de cubos, muy bien, hasta ahorita se están dando cuenta, este,
172 yo espero que se estén dando cuenta que los prismas necesitan, necesitan eh, ¿qué
173 necesitamos para calcular ese volumen? ¿Qué hicieron? ¿Quién me dice qué hicieron
174 para hacer ese volumen?

175 Estudiante H9: base por altura.

176 Mtra: No, no pero ¿Qué hicieron? No me digas base por altura dime qué hicieron.

177 [La estudiante M8 levanta la mano y la profesora se dirige a ella con la mirada para
178 preguntarle]

179 Mtra: ¿Qué hicieron?

180 Estudiante M8: Multiplicamos.

181 Mtra: Exacto.

182 [Interviene otro estudiante y dice algo pero es inaudible esta parte del video]

183 Mtra: No, no. Tienes que ser claro, tienes que decir las cosas más claras.

184 [La profesora se dirige nuevamente a la estudiante M8]

185 Mtra: A ver Estudiante M8

186 Estudiante M8: Multiplicamos la base por...

187 Mtra: La base ¿Por qué?

188 Estudiante M8: por la altura y la profundidad.

189 Mtra: Y la profundidad, a la profundidad le podemos decir de otra manera. ¿Quién más?

190 Estudiante H10: Ancho.

191 Mtra: Ancho muy bien, entonces tenemos que tomar en cuenta tres, tres este... ¿que
192 serán, qué serán esas, tres medidas, qué serán? ¿Cómo podemos manejarlo?

193 [Interviene un estudiante pero es inaudible lo que dice]

194 Mtra: Efectivamente, ¿Qué hace un prisma, qué tiene un prisma, qué características tiene
195 un prisma como éste? Pues tiene esas características, tiene largo, ¿Qué más tiene?

196 Estudiante H9: Ancho

197 Mtra: Ancho y ¿Qué más tienen?

198 Estudiante M6: Altura

199 Mtra: Altura ¿Qué tan altos son? Como para que lo podamos ver. Muy bien. Pasamos a la
200 página 163. Fíjense bien lo que vamos a hacer ahorita, sí, necesitan en este momento.
201 Trabajar, vamos a trabajar ahorita. Vamos a contar largo, vamos a contar ancho y altura
202 de esos prismas. Pueden auxiliarse contando por equipo y tienen que llegar al mismo
203 número. Entonces, tenemos tiempo para trabajarlo ahorita, sale. Comiencen a trabajar
204 ahorita. Vamos a poner los volúmenes de esos prismas que están ahí. Bueno háganlo
205 manejando en equipos, sí.

206 [La profesora deja que trabajen en equipos mientras observa a cada uno de los equipos
207 dando algunas recomendaciones.]

208 Mtra: [Dirigiéndose a todo el grupo). Tienen que checar en cada prisma, tienen que checar
209 para hacer el volumen. Díganme, tienen que checar el largo, tienen que checar cuánto es
210 de alto y cuánto de.

211 Estudiante H5.: Ancho

212 Mtra: Ancho. Primero tienen que contar los cubos y después poder calcular el volumen

213 [Un estudiante del equipo 3 llama a la maestra y la maestra se dirige a ellos]

214 Mtra: ¿Qué pasó?

215 Estudiante F5. Sí pero no quiere éste [al parecer un estudiante se queja de que el otro no
216 quiere apoyarlo en el trabajo de equipo].

217 Mtra: Ustedes van a hablar y a ustedes les voy a cubrir. ¿Sí? ¿Qué tienen que hacer?
218 Van a checar dato, explicarlo y comprobarlo.

219 [La profesora se dirige al equipo 4 y les hace unas preguntas pero el video es inaudible.
220 Posteriormente se dirige al equipo 5 y les hace la siguiente pregunta].

221 Mtra: ¿Ya lo tienen?

222 [Uno de los estudiantes del equipo 5 le contesta pero el video es inaudible. La profesora
223 continúa revisando lo que están haciendo los demás equipos dando ayuda a los
224 estudiantes por medio de preguntas acerca de cómo le están haciendo y va dando
225 sugerencias para obtener el resultado. Esto sucede en un tiempo aproximado de 10
226 minutos].

227 Mtra: [Dirigiéndose al equipo 2 les pregunta:] ¿Ya terminaron la actividad 1? ¿Todos ya
228 terminaron la actividad 1? [Dirigiéndose a todos los equipos les dice:] levanten la mano los
229 que ya terminaron la actividad 1. Ese equipo nada más, falta uno, falta otro, bien.

230 [La maestra continúa acercándose a los equipos para preguntar acerca de lo que están
231 haciendo los estudiantes, sin embargo, el video es inaudible].

232 Mtra: Vamos a ver ahora, cómo sacamos nuestros volúmenes. Eh, vamos a dejar al último
233 la figura, la figura que no tiene cubos.

234 Estudiante H4: yo sí sé cómo... [no se escuchó la parte final de la frase del estudiante
235 porque es interrumpido por la profesora].

236 Mtra: Vamos a sacar la primera y luego seguir al último. La figura A, el prisma A ¿Qué
237 volumen tiene? ¿Qué equipo nos quiere responder? A ver, ajá, qué volumen tiene.

238 [Una Estudiante del equipo 4 levanta la mano].

239 Mtra: A ver Estudiante F8.

240 Estudiante M8: Doscientos dieciséis.

241 Mtra: Pero ¿qué hiciste para saber su volumen?

242 Estudiante M8: Este, multiplicar base por altura por el largo.

243 Mtra: A ver ya dijimos qué íbamos a decir en lugar de la base.

244 Estudiante H3. El ancho

245 Mtra: [Acertando con la cabeza] El ancho. Muy bien. ¿Alguno lo hizo de diferente manera?
246 Muy bien ¿Quién me dice la figura B? ¿Qué hicieron?

247 [Un estudiante del equipo 2 levanta la mano]

248 Mtra: [Señala con la mano a un estudiante del equipo 2 y le dice] Estudiante H11.

249 Estudiante H11: ancho por altura por... [No se escucha el finl de la frase porque lo
250 interrumpe la profesora].

251 Mtra: Por la altura ¿están de acuerdo que es lo mismo para todos? Ahora, me gustaría
252 saber ¿Qué hicieron para tomar las medidas del prisma que está en la letra C? ¿Qué
253 hicieron? A ver, Estudiante H9 ¿Qué hicieron?

254 Estudiante H9. Medí con una regla.

255 Mtra: Estudiante H9 midió con la regla. ¿Quién hizo algo diferente? ¿Quién hizo algo
256 diferente? [Señala a un estudiante con la mano y le pregunta.] ¿Tú también mediste con
257 una regla?

258 Estudiante M5: Sí, pero medí lo de abajo para ver si lo de abajo tenía lo mismo de ancho.

259 Mtra: Si tenía lo mismo de ancho, ¿Tú mediste el ancho, Estudiante H7?

260 Estudiante H7: yo medí cuanto medía una rayita, pero se complicaba con la regla en los
261 palitos y yo medí los seis cubitos con la regla y luego ver cuántos cabían aquí en el ancho
262 y en el largo, cuántos cubitos.

263 Mtra: Me puedes decir ¿Qué mediste? ¿Cuántos cubos están de largo en esa figura?

264 Estudiante H7: De largo eran 7, de ancho eran 4 y de altura eran 6.

265 Mtra: Otra vez ¿Puedes repetirla haber si alguien coincide?

266 Estudiante H5: De ancho son 5.

267 Estudiante H3: Son 6.

268 Mtra: 4, 5, 6 ¿Cómo vamos a saber?

269 Estudiante H5: Yo dije cinco.

270 Mtra: Ella dijo 4, y tú ¿Qué dijiste?

271 Estudiante H3: el 6.

272 Mtra: seis.

273 [Levanta la mano el estudiante H4 y la profesora le da la palabra]

274 Estudiante H4: maestra es que cada una de las rayitas que tenemos en la altura mide un
275 centímetro y si le ponemos cada un centímetro son cuatro cubos cerrados.

276 Mtra: Bueno recuerden cuando lo hicieron por unanimidad, muchas veces nuestras reglas
277 no son exactas y no son exactas porque no es que hayas medido mal, es que muchas
278 veces nuestros instrumentos son diferentes, sí, y van a tener diferentes medidas.
279 Estudiante H4 en este sentido así va a ser.

280 [El estudiante H7 pide la palabra]

281 Estudiante H7: A mí me dio 8 milímetros.

282 Mtra: En algunos casos a él, yo estuve ahí cuando él midió ¿Cuánto midió ahí en tu caso?
283 ¿Cuántos milímetros?

284 Estudiante H8: Midió un centímetro casi.

285 Mtra: Un centímetro casi pero no exacto, eh contigo ¿sí midió un centímetro? Entonces
286 con él sí, ¿También ustedes también un centímetro? Entonces puede haber diferentes
287 medidas por esta situación, si nosotros eh... tomamos una medida exacta y una unidad,
288 nuestros cubitos van a ser de un centímetro entonces, sí podemos tomar, podemos tomar,
289 la medida del estudiante H8, pero si no, va a haber diferencias por lo que está diciendo el
290 Estudiante H8, otro tipo de medida. Entonces vamos a tomarlas todas como de un
291 centímetro, si es de un centímetro, Estudiante H8 dime de cuánto va a quedar la medida a
292 lo largo de ese prisma.

293 Estudiante H8. A lo largo, es de 4.

294 Mtra: De 4.

295 Estudiante H6: ese es el ancho.

296 Mtra: De 4. Ese es el ancho, a lo largo, que entiendes por lo largo, largo.

297 Estudiante H4. Nueve.

298 Mtra: Nueve, está bien, nueve.

299 Estudiante H1. Diez.

300 Estudiante H2: once.

301 Mtra: Es que va a variar, entonces, ¿qué vamos a hacer? vamos a tomar una sola
302 medida, eh, podemos tomar la medida de las líneas que están hacia la altura, quiero que
303 todos tomen su medida de las líneas que están a la altura, vamos a ver si son
304 exactamente. ¿Cuántos cubitos tiene hacia la altura para poder colocarlos en la base.

305 [Se acerca el estudiante H6 con su libro para preguntarle algo respecto al ejercicio del
306 libro y la profesora le dice que se fije en lo que están haciendo sus compañeros del
307 equipo 4 y le señala lo que estos estudiantes están haciendo].

308 Estudiante H6: entonces estoy bien [el Estudiante H6 hace un gesto de alegría].

309 Mtra: Sí van a ser diferentes, pues... [parte del video inaudible. La profesora se va a otro
310 equipo y ve lo que están haciendo, después se voltea a ver a todos los equipos y les da
311 la siguiente indicación].

312 Mtra: Ocho milímetros, ocho milímetros, ocho milímetros. Vamos a tomarlo en ocho
313 milímetros. Entonces vamos a ordenarlo, todos van a ser de ocho milímetros, ocho
314 milímetros, entonces ahora sí. Midan largo, ancho y altura y calculemos el volumen.
315 Todos. ¿Ya lo tienes? Espérate, espérate.

316 [La profesora se dirige al equipo 2 y les dice:].

317 Mtra: Ahora sí, ya lo tienen, con eso calculen su volumen.

318 [La profesora pasa por los equipos observando lo que están haciendo los estudiantes].

319 Mtra: Para todos a ver ahorita. Levanten la mano los equipos que ya terminaron. A ver
320 [señala con la mano a los equipos para preguntarles] ¿Allá Ya terminaron?,
321 ¿Terminaron?, ¿Terminaron? ¿Terminaron allá Estudiante H4, Estudiante H4 ya
322 terminaron?, ¿Terminaron ustedes? ¿Toda vía No? Faltan dos equipos, los esperamos un
323 ratito nada más.

324 [Mientras terminan los dos equipos que faltan, la profesora pasa por los equipos
325 observando lo que hicieron o lo que están haciendo. Cuando parece que ya todos
326 terminaron la profesora les dice lo siguiente:]

327 Mtra: Bueno vamos a ver, nos falta toda vía algo, entonces [el equipo cinco interrumpe a
328 la profesora y la llaman, la profesora acude a su llamado. ¿Qué pasa? [Parte del video
329 inaudible. Posteriormente la profesora retoma la indicación dirigiéndose a todos los
330 equipos].

331 Mtra: Vamos a ver el último prisma. ¿Quién me dice qué hizo para saber cuántos cubos
332 caben, a ver [la maestra interrumpe para pedir la atención de los estudiantes y retomar el
333 silencio] ¿Qué pasa? Necesito que pongan atención. No estén hablando. Quiero que me
334 digan ¿Qué hicieron para poder encontrar las medidas necesarias para calcular el
335 volumen en ese prisma? ¿Quién me dice? Eh, Estudiante H3.

336 Estudiante H3: primero medí, este, qué distancia había entre una línea y otra, y luego que
337 me salió, lo medí, este, en la figura de abajo y lo que me salió lo multipliqué por ocho y ya
338 me salió la cantidad de cubos.

339 Mtra: ¿Qué cantidad de cubos tienes eh... de largo?

340 Estudiante H3: Me salieron 7.

341 Mtra: Eh ¿Qué otra medida necesitamos ahí?

342 Estudiante H3: el ancho.

343 Mtra: El ancho ¿Cuánto tenemos de ancho?

344 Estudiante H3: cinco.

345 Mtra: Cinco. ¿A quién le salió la misma cantidad de cinco? ¿Lo hicieron de la misma
346 manera? Bien y ¿Qué otra medida nos falta? Largo, ancho ¿Qué nos falta?

347 Estudiantes varios: altura.

348 Mtra: ¿Cuánto es de altura?

349 Estudiante H8: 6.

350 Mtra: 6, con eso es suficiente ¿Quién me indica qué volumen dio? [Varios estudiantes
351 levantan la mano y la profesora le da la palabra a la Estudiante M5].

352 Estudiante M5: Doscientos diez.

353 Mtra: ¿Está bien? Sí, doscientos diez cubos son los que debían haber salido. Muy bien.
354 Vamos a terminar ahora, quien me dice ¿Qué aprendimos ahora? No todos tienen las
355 mismas medidas ¿Qué unidad utilizamos ahorita?

356 Estudiante H7: Los cubos.

357 Mtra: Los cubos, los cubitos ¿Qué más, qué me dicen, qué necesitamos para calcular en
358 un prisma? [Se dirige a un estudiante del equipo 2 y le pregunta] ¿Qué necesitamos para
359 calcular en un prisma, qué necesitamos?

360 Estudiante H10: Altura.

361 Mtra: Altura ¿Qué más necesitamos?

362 Estudiante H5: largo.

363 Mtra: Largo, ¿Qué más?

364 Estudiante F4: Ancho.

365 Mtra: Ancho eh... ¿Alguien me dice que aunque tengan determinado número de cubos,
366 pueden tener, deben de tener la misma figura? ¿Deben de tener la misma figura?

367 Estudiantes varios: no.

368 Mtra: No ¿Pueden cambiar la figura?

369 Estudiantes varios: sí.

370 Mtra: ¿El tamaño, la forma?

371 Estudiantes varios: sí

372 Mtra: Muy bien. Pues eso es lo que nosotros vamos a utilizar la próxima clase para
373 comenzar a manejanos por tipo de medida. Vamos a darnos un aplauso.

ANEXO 7.

Transcripción del video de la clase de la profesora Rosy, lección 41, sexto grado.

- 1 [La profesora inicia la clase escribiendo en el pizarrón el siguiente texto: “El volumen de
2 un cuerpo está relacionado con el espacio que ocupa”. En seguida, la profesora dibujó
3 una representación paralela de un prisma rectangular cuya base era de 4 X 3 y 2 de altura
4 en el pizarrón, posteriormente dio la indicación a los estudiantes de que calcularan el
5 volumen del prisma en su cuaderno. Mientras los estudiantes realizan en su cuaderno los
6 procedimientos para calcular el volumen de un prisma rectangular, la profesora por su
7 parte hizo la representación del mismo prisma cuyo volumen era de 24 unidades cúbicas
8 de 10 centímetros de arista.]
- 9 Mtra: A ver tú Estudiante M1, ahora tu hazlo, tú hazlo, pasa con el Estudiante H1. Horita
10 pasas tú Estudiante M2. [La profesora hace un espacio de silencio] a ver vean niños,
11 ahora... [Un estudiante hace un comentario respecto a otro compañero, es inaudible el
12 comentario. La profesora responde:] Pues sí, nada más está criticando. Aquí está otra,
13 otra forma de poner los cubos, solamente tenemos 24 cubos.
- 14 [Se hacen comentarios que no corresponden a la clase]
- 15 Mtra: Ya, trabajamos rápido. ¿Ya Estudiante M3?
- 16 Estudiante M3: sí, ya.
- 17 Mtra: Ya pusiste, ¿cuáles son las medidas, cuál es el volumen, cuántos cubos
18 utilizamos? [Hay unos segundos de silencio]. ¿Ya? ¿Quiénes ya terminaron? ¿ya
19 terminaste Estudiante H2? ¿Ya representaste tú también? ¿tú estudiante H3? [Hay unos
20 segundos de espera por parte de la profesora para que los estudiantes terminen de
21 resolver el planteamiento].
- 22 Mtra: ¿Estudiante M4 ya?, ¿Estudiante M5?
- 23 Estudiante M5: Ya.
- 24 Mtra: ¿Y éste, que tenemos aquí? [Ahora se refiere al prisma que armó con los 24 cubos
25 en el escritorio]. Ándale Estudiante M5, Estudiante H4, ¿Ya terminaste?
- 26 [El Estudiante H4 le enseña su trabajo y la profesora le dice:]
- 27 Mtra: Te quedó bien, pero son 2. Estudiante H5 ¿y esto, por qué termina en punta?
- 28 Estudiante H3: Esa es una pirámide.
- 29 Mtra: Sí, exactamente y estamos con prismas. [Hay unos segundos de silencio.]
- 30 Mtra: Los que ya terminaron sacamos el libro de matemáticas. (Hay varios segundos de
31 silencio por parte de la profesora. Se escucha mucho ruido por parte de los estudiantes
32 quienes hacen comentarios que no precisamente tienen que ver con la actividad].

33 Mtra: A ver ¿ya niños? A ver ¿qué haces de pie Estudiante H6?

34 [Entra una profesora que está de apoyo en la dirección y le da unas hojas a la profesora
35 para que las revise y las firme. Se escucha mucho ruido].

36 Mtra: Empezamos ya, [la profesora señala con la mano a un estudiante y le dice:] ¿ya
37 terminaste verdad? [Ahora dirigiéndose a todos los estudiantes les dice:] anotamos esto
38 en el cuaderno estamos viendo lo que es volumen, ¿Cómo lo vamos a calcular, cómo
39 utilizamos las tres dimensiones: largo, ancho y altura? Ahora vamos al libro voy a abrirlo
40 en la página 163, 162 – 63, estoy en la lección ¿Cuántos cubos hacen el prisma? Estoy
41 en la lección 162, la lección 41. Es más o menos relacionado con lo que estamos viendo.
42 ¿Qué dice ahí? Calcula el volumen del prisma mediante el conteo de los cubos en que
43 está dividido. ¿Qué es lo que estamos haciendo? En este ejemplo que tenemos aquí
44 encima de la mesa, solamente tenemos 24 unidades, ¿cada unidad es un qué? Un cubo.
45 ¿Cierto?, y estamos viendo ¿cuántas, con 24 unidades cuántos prismas se pueden formar
46 que sean diferentes, que tengamos el mismo volumen pero que lo formemos de forma
47 diferente. Ahora medimos, ¿qué vamos a hacer? Vamos a contar en el libro desde que
48 ejemplifica los prismas y lo único que horita les está pidiendo. ¿Cuántos prismas tiene la
49 figura A, cuántos la figura B, cuántos la figura C, cuántos la figura D? anótenlo ahí. Dice la
50 indicación, Lo que conozco: observa los prismas y contesta las preguntas ¿De los
51 prismas cuáles tienen el mismo volumen? A cada prisma le ponen su volumen y
52 comparan ¿Cuáles de estos cuatro prismas tienen el mismo volumen? Contemos,
53 hagamos el conteo.

54 [La profesora se percató de que un estudiante está hojeando su libro y le dice:]

55 Mtra: ¿Apenas estás buscando la hoja? Qué bárbaro Estudiante H7, pareciera como que
56 si ni si quiera te sabes los números. ¿Ya Estudiante M3 estás haciendo lo que te pedí o
57 platicando con el estudiante H8? ¿qué haces Estudiante H9, no terminas lo del cuaderno,
58 no haces lo del libro, hoye pues a qué horas? Estudiante H10 concéntrate.

59 [Hay unos segundos de silencio].

60 Mtra: Recuerden tomar en cuenta las tres dimensiones que habíamos hablado, saquen el
61 vo... la cantidad de prismas que tienen esas figuras, esos, la cantidad de unidades
62 perdón.

63 Estudiante H6: Ya.

64 Mtra: ¿Ya comparaste, Ya respondiste las preguntas? Muy bien. ¿Quién me quiere decir
65 cuántas unidades tiene el prisma A?

66 Estudiante H7: Yo.

67 [Varios estudiantes contesta a la vez yo, yo, yo].

68 Mtra: A ver estudiante H8.

69 Estudiante H8: Doce.

70 Mtra: ¿Doce?

71 Estudiantes varios: Sí, sí, sí doce.

72 [La profesora observa su libro como para corroborar].

73 Estudiante H7: Sí maestra, doce.

74 Mtra: Tiene doce ¿cierto? ¿Cuántas unidades tiene el prisma B estudiante M6)

75 Estudiante M6: veintisiete.

76 Mtra: Veintisiete, muy bien. ¿Cuántas unidades tiene el prisma C Estudiante M7?

77 ¿cuántas? A ver cuenta bien, te estamos esperando para que lo hagas. [La Estudiante M8

78 levanta la mano. La profesora se dirige a la estudiante M8 y le pregunta:] ¿Cuántos tiene

79 Estudiante M8?

80 Estudiante M8: Dieciséis.

81 [El Estudiante H6 pide ser él quien dé la respuesta correcta].

82 Mtra: ¿El prisma C? [La maestra le da la palabra al estudiante H6].

83 Estudiante H6: Doce.

84 Mtra: Doce ¿es cierto?

85 Estudiante H6: [con voz de alegría] Sí.

86 Mtra: ¿Cuántos tiene el prisma D tú Estudiante H3?

87 Estudiante H3: Nueve.

88 Mtra: 9 Ahora dice “De los prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen?”.

89 Estudiantes varios: A y C

90 Mtra: A y C ¿no es cierto? ¿cuántos cubos más se necesitan para que el prisma C tenga

91 el mismo volumen que el B?

92 Estudiantes varios: Quince.

93 Mtra: ¿El C?

94 Estudiante H5: Sí, quince.

95 Mtra: Muy bien. Ahora vamos a la actividad 1. Para completar, aquí dice en equipos, pero

96 como ustedes no pueden trabajar en equipos, ustedes individualmente háganlo. En

97 equipo... en... individualmente completen los prismas y obtengan su volumen, consideren

98 cada cubo pequeño como unidad de medida, posteriormente contesten lo que se pide.
99 Vamos a contestar ahí las unidades para saber ¿Cuál es el volumen de esos prismas?
100 Agarramos nuestra regla y completamos.

101 [La profesora da alrededor de 20 minutos para que los estudiantes realicen la actividad]

102 Mtra: Estudiante M10 ¿Ya terminaste, qué haces ahí?

103 Estudiante M10: Estoy pidiendo una regla.

104 Mtra: [Mueve la cabeza en señal de desaprobación] y todo porque no vienes ¿Ayer por
105 qué no viniste?

106 Estudiante M10: Fui al doctor.

107 Mtra: Pero ni siquiera avisas, y ni siquiera te tomas la molestia de preguntar ¿qué es lo
108 que tenemos que hacer? le voy a mandar un citatorio a tu mamá porque siempre es lo
109 mismo.

110 Mtra: [Después de varios minutos le dice a los estudiantes lo siguiente:] ¿ya?, ¿Ya niños?.

111 Estudiantes varios: Nooo.

112 Estudiante H8: No maestra, mire maestra ya hice un... [El final de la frase es inaudible].

113 Mtra: Sí horita, hoy estamos en paz, espérate tantito, espérate horita. Estamos en
114 matemáticas concéntrate en el volumen, concéntrate en las unidades y dime cuál es. ¿Ya
115 tienen el volumen de las figuras A, B y C?

116 Estudiante H8: Otra vez me falta la C, está difícil.

117 Mtra: ¿Ya, quién está terminando ya? Ya, empezamos a revisar. Ya muchos ya lo
118 hicieron. ¿Cuál será el volumen del primer cuerpo?

119 Estudiante H8: Doscientos dieciséis.

120 Estudiante H6: Doscientos dieciséis.

121 Mtra: ¿Cuál es el largo y cuál es el ancho? este... Estudiante H4.

122 Estudiante H4: [Con voz pensativa] El ancho.

123 Mtra: ¿Cuál es el largo, el ancho y la altura?

124 Estudiante M7: El largo es de 6.

125 Estudiante H7: El largo es de 6

126 Estudiante H6: 6 por 6 por 6.

127 Estudiante H9: 3 por 6.

- 128 Mtra: A ver piénsenle bien.
- 129 Estudiante H6: Sí, ¿no?
- 130 Mtra: Pues no sé, lo están haciendo ustedes.
- 131 Estudiante H6: 6 por 6 por 6. 6 por 6 y lo que me sale lo multiplico por 6.
- 132 Estudiante H10: No es cierto.
- 133 Mtra: Es 6 por 6 y por 6. [Al mismo tiempo que lo escribe en el pizarrón en tres de las
134 aristas de un cubo que dibujó la profesora en el pizarrón extrayendo la imagen del libro].
- 135 Estudiante H10: Sale doscientos dieciséis.
- 136 Estudiante M7: Centímetros cúbicos.
- 137 Estudiante H3: ¿No tendríamos que dividirlo entre 2 porque cada cubo mide medio
138 centímetro?
- 139 Mtra: No estamos midiendo, estamos, el cubo de la medida que sea lo estamos ocupando
140 como una unidad. No es que tú lo midas y que mida medio centímetro, no. Tú estás
141 viendo aquí por ejemplo este cubo [La maestra muestra a los estudiantes un cubo de
142 cartulina] mide menos de 10 centímetros de arista, pero lo estamos tomando como una
143 unidad, estás contando las unidades, no estás midiendo. Entonces ¿Cuántas unidades
144 son? Aquí de base, de ancho 6, de largo 6 y de altura 6. Entonces multiplicamos 6 por 6
145 por 6 nos da 216 ¿Qué? Le vamos a poner centímetros cúbicos, solamente es una
146 representación Estudiante H3, no que sean forzosamente los centímetros cúbicos sí. En
147 el otro, en la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho?
- 148 Estudiante H10: Doscientos ochenta y ocho.
- 149 Estudiante H7: Doscientos ochenta y ocho.
- 150 Mtra: ¿Cuál es la base? ¿Cuál es? ¿Cuáles son las medidas? No estoy preguntando los
151 resultados. ¿Cuál es el largo?
- 152 Estudiante H8: 6 por 9.
- 153 Mtra: [Escribiendo en el pizarrón a un lado de las aristas de un prisma que trazó en el
154 pizarrón] 9, 6. Multiplicamos 9 por 6.
- 155 Estudiante H7: Cincuenta y cuatro.
- 156 Mtra: Cincuenta y cuatro, nueve por 6 54 por 6.
- 157 Estudiante H5: Doscientos veinticuatro.
- 158 Estudiante H8: Trescientos veinticuatro.

159 Mtra: Trescientos veinticuatro. [La profesora escribe en el pizarrón 324 cm^3].

160 [Se escucha una discusión entre dos estudiantes respecto al resultado, sin embargo, no
161 se percibe muy bien lo que dice cada uno, pero por lo visto la profesora sí sabe qué es lo
162 que está diciendo cada uno].

163 Mtra: ¿Qué tanto alegan? ¿por qué alegan? Ya les dije que las matemáticas son exactas.
164 Nosotros multiplicamos 9 por 6, por 6. ¿Cuánto nos da? 324, ¿es cierto? Ahora vamos a
165 la figura que sigue, a la figura D ¿Cuánto es?

166 Estudiante H6: B

167 Mtra: A la B ¿Cuánto es?

168 Estudiante H8: 960.

169 Estudiante H7: 360

170 Mtra: ¿Por qué, cuáles son las medidas? no estoy hablando de resultados. A ver
171 Estudiante M7.

172 Estudiante M7: Tiene de alto 6, de ancho 6 y de altura 6.

173 Estudiante H5: Tiene la misma medida que la figura A.

174 Estudiante H5: No es cierto.

175 Mtra: Agarren su regla y tomen más o menos la medida de los cubos que están ahí
176 ¿cuántos son?

177 Estudiante H10: La de altura es de 7, la de largo es de 9.

178 Estudiante H9: de largo es 11.

179 Mtra: ¿De largo es once?

180 Estudiante H8: No es cierto maestra, de largo es 6.

181 Mtra: ¿6 qué?

182 Estudiante H8: 6 centímetros.

183 Mtra: [Dirigiéndose a un estudiante le dice] préstame tu regla.

184 [La profesora mide con su regla en su libro].

185 Estudiante H7: 1 centímetro es de dos cubos.

186 Estudiante H5: Son 5 centímetros.

187 Estudiante H8: son 6.

188 Mtra: Sí, está de medio centímetro, entonces cada uno de los lados son medio centímetro.
189 Entonces si yo mido, sí, ¿Quién decía que 11? Son 11, 11 por...

190 Estudiante H8: 6.

191 Mtra: Pues no son tanto 9 Estudiante H10, son 4 centímetros, son 8.

192 Estudiante H8: sí pero de altura son 9.

193 Mtra: ¿11 por ocho? [La profesora continúa midiendo la altura] de altura son 10, fíjate bien
194 son 5 centímetro, cada una de las unidades está representando medio centímetro, son 10
195 unidades. Midan con su regla, midan. Cada una de las unidades que nos está
196 representando el libro, mide medio centímetro, son cubos que miden medio centímetro.

197 Estudiante H9: Son 5 centímetros y medio.

198 Mtra: Son 5, cuál 5 centímetros y medio. Apenas sí se completan los 5 centímetros, son
199 10 unidades, cuenten.

200 [Algunos estudiantes dicen no estar de acuerdo porque aseguran que son 5 centímetros y
201 medio, a lo que la profesora responde:]

202 Mtra: Es que no son 11, apenas sí se completan 5. A ver si es cierto.

203 Estudiante H9: [Se para y va con su libro y regla hasta donde está la profesora] Sí es
204 cierto. Bueno, yo lo hice con regla y sí es cierto.

205 [La profesora le señala en el libro del estudiante unas partes del prisma, al parecer el
206 estudiante H9 está midiendo las aristas en otro orden distinto al de la profesora].

207 Mtra: Largo, ancho. Largo, ancho y altura. ¿Qué estás alegando? Está midiendo mal.

208 [Se escuchan gritos de abucheo].

209 Mtra: Recuerden que en este cubo que está, en este prisma que está representado ahí,
210 está el largo, el ancho y la altura. El largo es 11.

211 Estudiante H8: Son 11 por 10 por 8 entonces.

212 Mtra: [La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación y pregunta lo siguiente:]
213 ¿Por qué, por 8? Es que no es posible que nada más les pongan el esqueleto donde
214 ustedes lo tengan que llenar y no sean capaces de medir bien la unidad, cada una de las
215 unidades está representada en esta parte del libro mide medio centímetro, si ustedes
216 están tomando las medidas del cubo que no está marcando ninguna unidad, ¿No le
217 pueden medir? ¿Qué, cuales son las medidas Estudiante H11, por qué estás distraído?

218 [El estudiante H11 no contesta y la profesora le vuelve a preguntar].

219 Mtra: ¿Cuáles son las medidas?

- 220 [El estudiante H11 de nuevo se queda callado].
- 221 Mtra: Pero te pones a alegar.
- 222 Estudiante H11: ¿Con quién?
- 223 Mtra: Con el Estudiante H7. Apúrate, apúrate dime las medidas. [La profesora dirige la
224 mirada al estudiante H8 y le dice:] tú estudiante H8 dime cuáles son las medidas?
- 225 Estudiante H8: 11 por 10 por 8.
- 226 Mtra: Por 8 de qué, ¿Cuál es el ocho?
- 227 Estudiante H6: De altura.
- 228 Estudiante H7: De altura.
- 229 Estudiante H8: 11 por 10 por 8.
- 230 Mtra: ¿Cuál es el volumen del prisma C?
- 231 Estudiantes varios: 860.
- 232 Estudiante H8: 860.
- 233 Mtra: Muy bien ahora dice, ¿Cuál será la manera más rápida de obtener el volumen de un
234 prisma rectangular? Estamos trabajando solamente con prismas rectangulares. ¿Cuál
235 será la forma más rápida tú estudiante H10? ¿Tú qué piensas, cuál es la forma más
236 rápida, después de hacer estos ejercicios, ¿Cuál es la forma más rápida? [El estudiante
237 H10 dice algo pero no se le escucha, la profesora le dice:] no te oigo.
- 238 Estudiante H10: multiplicando.
- 239 Mtra: ¿Qué?
- 240 Estudiante H10: Lo que te sale de la altura por la base por este, por lo de arriba.
- 241 Mtra: Sí multiplicando pero ¿qué multiplicamos? ¿qué?
- 242 [Están levantando la mano varios estudiantes y la profesora ahora se dirige al estudiante
243 H4]
- 244 Mtra: A ver Estudiante H4.
- 245 Estudiante H4: Se multiplica base por altura por ancho.
- 246 [La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación y voltea a ver a la estudiante M6
247 que también está levantando la mano y señalándola con la mano le da la palabra].
- 248 Estudiante M6: largo por ancho por altura.

249 Mtra: Largo por ancho por altura, multiplicamos y obtenemos el volumen. Ahora dice... [La
250 profesora hace un comentario antes de leer la indicación del libro] aquí ya no tenemos
251 físicamente, ya no estamos viendo visualmente el prisma, vamos a completar esa tabla.
252 Ahí está el ancho, el largo y la altura. ¿Cuál será el volumen? Hay números que faltan ahí,
253 vamos a completarlo.

254 [La profesora deja un espacio de 18 segundos para que los estudiantes comiencen a
255 resolver la tabla y en seguida dice lo siguiente:].

256 Mtra: El último que es el que más les causó problema ¿Cómo está, cuáles eran las
257 medidas por fin Estudiante H5?

258 Estudiante H5: eran 10, 11 por 10 por 8.

259 Mtra: 11 por 10 por 8.

260 [La profesora traza en el pizarrón una representación del prisma y coloca en tres de las
261 aristas las cantidades que le acaba de dar el estudiante H5, al mismo tiempo que dice lo
262 siguiente:].

263 Mtra: 11 por 10 por 8 ¿es cierto? Y ahí está el último prisma.

264 [La profesora dirige la mirada a la estudiante M10 y le dice lo siguiente:]

265 Mtra: Toda vía no has hecho esas medidas Estudiante M10. Toda vía no Estudiante M11.
266 Apenas Vas en la figura B y nosotros ya terminamos todo. Tú también Estudiante M12
267 todo chueco. Fíjense en lo que están haciendo, les está poniendo el ejemplo el libro. Tú
268 qué hiciste Estudiante H12.

269 Estudiante H12: Este prisma.

270 Mtra: Nada, no terminaste, esto no te lo voy a calificar, te quedas sin recreo, tú ¿Qué
271 esperas Estudiante M13, oye Estudiante M14, ¿Ya terminaste? [La profesora se dirige a
272 otro estudiante y le dice lo siguiente] ¿Ya terminaste? No terminaste de completar esos
273 cubos eso es lo que estamos haciendo. Solo te falta 1. [La profesora se dirige a dos
274 estudiantes más y les dice lo siguiente:] Ya Estudiante M6, ya estudiante H4. Los que
275 terminaron, hacemos el problema de la actividad 2. [La profesora se dirige al estudiante
276 H13 y le dice:] ¿Ya terminaste?

277 Estudiante H13: ya.

278 Mtra: Vaya, pero no has sacado los volúmenes Estudiante H13. Estamos diciendo qué
279 tenemos que multiplicar ¿Por qué no lo haces?

280 Estudiante H13: ¿11 por 10 por 8?

281 Mtra: Sí por qué no lo haces si ya formaste, ya tienes las unidades. [La profesora voltea a
282 ver al estudiante H14 y le dice:] Rápido estudiante H14.

283 Estudiante H6: Cuál es la actividad 2 maestra.

284 Mtra: ¿Cuál es qué?

285 Estudiante H6: La actividad 2.

286 Estudiante H8: La del otro lado.

287 Estudiante H6: entonces me sigo con la 3.

288 Mtra: [Mueve la cabeza en señal de aprobación] Entonces la 2 es nada más que uno.

289 Estudiante H8. De la 1 se sigue a la 3, la 4.

290 Mtra: Vamos a la 3, vamos a la actividad 3 por favor. Se volaron allí en el libro la actividad
291 2, ni modo, vamos a la actividad 3.

292 Estudiante H2: falta la 2 maestra.

293 Mtra: No importa, nosotros trabajamos en la 3, recuerden que estamos trabajando con
294 puros prismas rectangulares. Apúrate Estudiante H10.

295 [La profesora se dirige al Estudiante H6 y le dice:].

296 Mtra: Concentración [En seguida se pasa con el Estudiante H9 y le dice:] recuerda que
297 son de medio centímetro, aquí tienes que medir y marcar medio, medio, medio para saber
298 cuáles son las unidades. [La profesora voltea a ver al estudiante H13 y le dice:] ¿Qué
299 estás haciendo Estudiante H13? [La profesora se acerca a ver lo que está haciendo el
300 estudiante H13 y le dice:] A ver lo otro.

301 [El estudiante H13 le muestra la actividad anterior y la maestra le dice:]

302 Mtra: Ni siquiera lo has terminado. Dónde están las, el cálculo del volumen ahí. Lo tienes
303 que poner aquí, ve, ni siquiera lo has hecho.

304 [La profesora voltea a ver a la estudiante M11 y le dice:]

305 Mtra: ¿Tú Estudiante M11 ya? ¿Estás entendiendo lo que estamos haciendo?

306 [La estudiante M11 hace un movimiento con la mano derecha como para decir que no es
307 mucho, ni poco sino regular].

308 Mtra: Qué es eso de [la profesora reproduce el movimiento].

309 [La profesora se dirige ahora al estudiante H5 y le dice lo siguiente:].

310 Mtra: Estudiante H5, no has terminado nada de esto, entonces ¿Pues qué estás
311 haciendo? ¿Dónde está la regla? ¿Por qué no la trajiste he?

312 [La profesora toma su libro para dar a los estudiantes la siguiente indicación:].

313 Mtra: Recuerden que para la actividad 3 en donde hay que resolver los problemas en
314 equipo ¿Qué caja? dice ahí, resuelve el problema siguiente, Juan quiere colocar una
315 pecera en la sala de su casa, el vendedor le propone los siguientes modelos y ahí les
316 están dando la medida. ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para
317 llenarla? ¿Qué quiere decir? La que sea más grande ¿No es cierto? Saquen el volumen
318 de las dos peceras y díganme ahí por qué, por qué escogen una y no otra.

319 [Tres estudiantes están resolviendo el problema juntos y la profesora se dirige a ellos para
320 decirles lo siguiente:].

321 Mtra: Ustedes como hablan.

322 Estudiante H8: ¿Cuatro?

323 Mtra: ¿Cuatro qué?

324 Estudiante H8: Digo cuatro [y se refiere a los otros 3 estudiantes y él].

325 Mtra: Ustedes 3 porque el Estudiante H11 nada más los está oyendo.

326 Estudiante H8: Sí Estudiante H11.

327 Mtra: ¿Quién tiene una regla que le preste al estudiante H5?

328 Estudiante H7: Yo.

329 Mtra: Préstasela. [Refiriéndose al estudiante H5 le dice:] Haber si así terminas, he.
330 ¿Quién otro no tiene regla?

331 Estudiante H14: Yo no tengo.

332 Mtra: Préstasela Estudiante H9 por favor sí. Estudiante H3, ¿Qué estás haciendo? ¿Por
333 qué lo haces como escondido?

334 [El estudiante H9 contesta con unas palabras pero no se entiende porque hay ruido
335 cerca].

336 [La profesora da la siguiente indicación:].

337 Mtra: Hagan las operaciones ahí o en el cuaderno.

338 [La profesora deja 11 minutos solos a los estudiantes para que resuelvan la actividad 3 y
339 se va al lugar donde está el investigador para entablar una conversación acerca de un
340 taller que tomaron por parte de la SEP de geometría sólo algunos profesores].

341 Mtra: ¿Sí le enseñó el libro la maestra Mila?

342 Investigador: Ya lo revisé.

343 Mtra: ¿Verdad que está muy bien maestro? A mí me lo prestó Lulú porque nosotros ya ve
344 que no todos fuimos al taller, pero me pareció maravilloso, muchas cosas que hasta
345 nosotros como maestros, no sabemos maestro, porque a nosotros tampoco nos
346 enseñaron la geometría, o sea, no nos han enseñado nunca geometría, entonces así
347 como que todo lo que dice la autora, de esas ideas malas, de esas malas ideas que nos
348 hemos formado, está, pero estuve pensando que está difícilísimo maestro para tratar de
349 quitar todo eso, porque los primeros que tendríamos que aprender seríamos nosotros,
350 entonces, no, es una labor titánica he, la verdad.

351 Investigador: pues sí es la parte del conocimiento del docente o competencias que el
352 docente debe tener.

353 Mtra: Si porque hemos incurrido en un montón de errores, la verdad, sobre todo en la
354 geometría, porque además es algo que no, no está como que muy presente en los
355 programas de matemáticas, nada más está la aritmética no, que sepan sumar y restar,
356 sumar, restar, las cuatro operaciones fundamentales.

357 Investigador: como que lo que predomina más es la aritmética ¿verdad? Y dejan por un
358 lado...

359 Mtra: Toda la geometría, si, no ayer que lo estuve leyendo dije hay, hay. Pues hasta
360 nosotros dije. Es que yo tendría que... Hay unas cosas maestro que por ejemplo uno está
361 leyendo y aunque el libro es muy sencillo, como que a veces uno se va perdiendo en el
362 concepto. Yo estaba impresionada con las alturas del triángulo maestro. Si, si, pensé que
363 era una, o sea dije, yo ya, ya lo entendí, pues es que son tres, tres alturas, dije hay ¡qué
364 barbaridad!

365 Investigador: sí, y además dice que cualquiera de los lados puede ser la base.

366 Mtra: Puede ser la base. O sea todas esas cosas que a veces uno dice.

367 Investigador: En qué errores se ha incurrido ¿Verdad?

368 Mtra: En qué errores maestro, pero errores realmente garrafales maestro.

369 Investigador: Y ¿cómo se le enseña al niño la base del triángulo?

370 Mtra: La base del triángulo y puede ser de cualquier forma y cómo puede sacar las
371 alturas, la medida de las alturas que es paralela no, a determinado este, lado como se
372 ponga el triángulo, hay no, no, no. No, no sabe maestro, ahí quería darme de topes
373 porque dije ¡Hay Dios mío! ¡Qué ignorancia no! O sea ¡Qué ignorante es uno!

374 Investigador: Sobre todo en la geometría que es una parte de las matemáticas pero que
375 no se le da la misma importancia que la aritmética.

376 Mtra: Y lo que me encantó fue su definición que pone al principio ¿Qué es la geometría?
377 Las matemáticas del espacio. Hay esa sí me encantó, esa definición, pero, hay no, no, se
378 me hizo... Y yo me acuerdo maestro que en los libros estos del rincón había uno, creo de

379 los primeros textos que era de geometría. Y yo me acuerdo haberlo leído, que me
380 impresionó también porque eran cosas así como para reflexionar, para ver y ya no lo
381 encuentro, por más que lo he buscado aquí en toda, ya no sé, no está.

382 Investigador: Éste está bueno sobre todo...

383 Mtra: Hay no, este es un libro maravilloso, sí de verdad que yo lo quiero, si no me lo dan,
384 yo lo voy a ir a conseguir porque ya pedí la dirección y todo, lo voy a ir a pedir con mi
385 credencial, con mi talón, porque sí es un libro que necesito.

386 Investigador: pues yo sé que si se lo pueden...

387 Mtra: Dicen que sí lo van a dar, también el que me interesa mucho es el de las fracciones.
388 Mi hija va, bueno tengo una hija chiquita, no tan chiquita, la que está en la primaria, va a
389 pasar a la secundaria y entonces a ella le cuestan mucho trabajo las matemáticas
390 entonces la puse en un método japonés en una escuela particular. Este método japonés
391 está basado en el cálculo japonés, nunca descansan y todos los días ellos tienen que
392 hacer un ejercicio pero con tiempo, no es nada de razonamiento, todo es repetitivo, pero
393 si viera maestro, que sí van aprendiendo, de geometría no les dan nada, todo es
394 fracciones, este, operaciones básicas, después de ahí ya van con las derivadas, cómo
395 cambian las fracciones a letras, o sea todo, pero maestro, sí aprenden, uno se da cuenta
396 y sí aprenden menos de geometría porque he estado revisando el libro y le he preguntado
397 cosas y no sabe mi hija nada, y eso que está en una escuela particular. No eso sí me
398 aterrorizó porque no sabe nada, no sabe ni siquiera, le digo y ¿Qué es un cuadrilátero? Y
399 me dice: hay pues como una caja ¿no? Le digo ¿Cómo como una caja? Pues sí dice,
400 esos que son cuadrados que tienen cuatro lados, pero no sabe más maestro, no sabe
401 más. No, ayer estaba yo pensando hay Dios Ésta va a tener que estudiar geometría o
402 algo.

403 Investigador: Yo creo que por algo ¿no? Son como focos rojos que nos ponen si se da
404 cuenta en el libro, dice que fue realizado a raíz de que se hizo una revisión de...

405 Mtra: De todas las evaluaciones.

406 Investigador: Que se han obtenido de la prueba Excale, de la prueba Pisa, sobre todo
407 esas dos, no mencionan...

408 Mtra: No mencionan Enlace maestro y yo creo que deberían de hacer todo un análisis de
409 cómo están contestando el Enlace.

410 Investigador: sobre todo del 2006 al 2012 que ya son 7 enlaces que se aplicaron que no
411 se sabe que es lo que pasó, pero pues no hay nada hasta horita.

412 Mtra: Claro, qué es lo que está pasando. Es que es todo, es todo: la ignorancia del
413 magisterio que bueno, tenemos que ser conscientes de que somos ignorantes en muchas
414 cosas, la falta de capacitación, la actitud de los niños, la falta de apoyo de los papás, los

415 papás ahorita, maestro, ya no saben nada, o sea no le entienden nada, entonces los
416 papás ni siquiera se meten.

417 [La profesora se dirige al Estudiante H11 y le dice lo siguiente:]

418 Mtra: ¿Ya terminaste Estudiante H11?

419 [Vino nuevamente la maestra que está de apoyo en la dirección para darle unas
420 indicaciones a la profesora].

421 Mtra: Muy bien ¿ya? ¿Quién ya tiene el primer cálculo de la primera pecera?

422 Estudiante H14: [Levantando la mano] yo.

423 Mtra: [Sonriente y a la vez extrañada, al parecer es un estudiante poco participativo] A
424 ver estudiante H14.

425 Estudiante H14: Este, a mí me salió 15 625.

426 Estudiantes varios: sí, sí, sí.

427 Mtra: A ver Estudiante H14 ¿Cuáles eran las medidas? ¿Qué multiplicaste por qué?

428 Estudiante H14: base por ancho y por la altura.

429 Mtra: Sí pero ve, ¿Cuáles son? Aquí anótalas en el pizarrón.

430 (El estudiante H14 escribió en el pizarrón la multiplicación $25 \times 25 = 625$, posteriormente
431 hizo la multiplicación $625 \times 25 = 15\,625$. Todos los estudiantes le aplaudieron).

432 [Ahora la mayoría de los estudiantes piden pasar al pizarrón a calcular el volumen de la
433 segunda pecera].

434 Mtra: [Dirigiéndose al estudiante H14] A ver ¿cómo tenemos que registrar ese resultado?
435 ¿Qué es lo que estábamos diciendo al principio? 15 625 ¿qué? Centímetros ¿Qué?

436 Estudiantes H14: Cúbicos.

437 Mtra: Pues ponlo.

438 [El estudiante H14 agrega al resultado lo de centímetros cúbicos: cm^3].

439 Mtra: [Dirigiéndose al estudiante H14] ¿Ya ves que sí puedes cuando te lo propones?
440 Bien, muy bien. A ver Estudiante H9. Bien, vamos a dejar aquí el valor de esta primera
441 pecera para compararse con la otra.

442 [El estudiante H9 pasa al pizarrón para calcular el volumen de la siguiente pecera, escribe
443 en el pizarrón $30 \times 20 = 600$].

444 Mtra: No cabe duda que todo lo que hemos visto de multiplicar por 10, por 100, por 1000
445 no tiene... [Mueve la cabeza en señal de desaprobación] nada más se debe poner el cero,
446 para que pones cero, cero... [Mueve nuevamente la cabeza].

447 [El estudiante H9 continúa multiplicando $600 \times 26 = 15600$]

448 Mtra: 15600 cm^3 entonces ¿Cuál le conviene más.

449 Estudiante M3: la B

450 Mtra: ¿Cuál es la pregunta del texto?

451 Estudiante H8: ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla?
452 ¿Por qué?

453 Estudiantes varios: es la A.

454 [La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación]

455 Mtra: ¿Por qué estudiante H4?

456 Estudiante H4: Porque es mayor su volumen.

457 Mtra: Porque es mayor su volumen, Exactamente.

458 Estudiante H4: por 25.

459 Mtra: Por 25 unidades es mayor su volumen. Muy bien, vamos a terminar ya por último
460 con el... vamos a leer el recuadro café que casi siempre es el resumen de lo que hemos
461 estado viendo.

462 Estudiante H7: yo.

463 Mtra: A ver Estudiante H7.

464 Estudiante H7: El volumen de un cuerpo está relacionado con el espacio que ocupa. El
465 volumen se calcula en unidades cúbicas, se llaman así porque en el cálculo intervienen
466 tres dimensiones (largo, ancho y altura); así, se pueden tener metros cúbicos (m^3),
467 decímetros cúbicos (dm^3), centímetros cúbicos (cm^3) o milímetros cúbicos (mm^3), entre
468 otros.

469 Mtra: Eso es lo que estábamos viendo y lo que hemos estado viendo en la clase de ayer y
470 hoy, ¿Quedó caro? ¿Quién no ha entendido nada de lo que estamos haciendo?

471 Mtra: ¿Ya están listos para resolver problemas?

472 Estudiantes varios: sííí.

473 Mtra: Bueno pues vamos a copiar ese recuadro café en su cuaderno y vamos a resolver
474 para que yo califique si aprendieron o no aprendieron, vamos a resolver el problema que
475 está en la última parte.

476 Mtra: Dice en la actividad 4. En parejas resuelvan el problema siguiente. Ahí es ese
477 problema y copiamos ese recuadro en nuestro cuaderno donde resumimos todo lo que
478 hemos estado viendo. El problema ya lo vamos a hacer de tarea, porque horita ya
479 empleamos demasiado tiempo en la clase sí. Recuerden que las operaciones ahí en el
480 libro para saber qué es lo que hicieron.

ANEXO 8.

Transcripción del video de la clase de la profesora Laura, lección 41, sexto grado.

- 1 [La profesora pidió a los estudiantes que se sentaran en equipos de 4 y que sacaran los
- 2 prismas que armaron con hexaedros regulares de plastilina de un centímetro de arista el
- 3 día anterior]
- 4 Estudiante H1: ¿Qué página maestra?
- 5 Mtra: 162, lección 41, es continuación de lo que estábamos viendo con los prismas.
- 6 Estudiante H2. ¿Calcula el volumen de prismas?
- 7 Mtra: Sí, ¿Qué habíamos visto del volumen? ¿Se acuerdan o ya no se acuerdan?
- 8 Estudiante H3: No.
- 9 Mtra: ¿No? ¿Quién dijo no? A ver entonces ¿Qué es el volumen?
- 10 Estudiante H3: No sé.
- 11 Mtra: Pues entonces no me contestes así hijo.
- 12 Estudiante M1: Es lo que le cabe adentro.
- 13 Mtra: ¿De qué?
- 14 Estudiantes varios: De la figura
- 15 Mtra: De la figura ¿Ya recordaste Estudiante H3?
- 16 Estudiante H3: Sí sabía.
- 17 Mtra: ¿Cuál es su unidad de medida del volumen?
- 18 Estudiante H4: ¿El centímetro cúbico?
- 19 Mtra: El centímetro cúbico. ¿Tienen ahí un centímetro cúbico?
- 20 Estudiante H4: sí.
- 21 Mtra: A ver enseñame un centímetro cúbico.
- 22 [El estudiante H4 muestra un hexaedro regular de plastilina que mide un centímetro de
- 23 arista]
- 24 Mtra: Sí, ya los habíamos ocupado para hacer los edificios, ¿Se acuerdan?
- 25 Estudiantes varios: Síííí.
- 26 Mtra: De eso si se acuerdan, ¿Verdad estudiante H3?

27 Estudiante H3: sí.

28 Mtra: ¿O no? Bueno, lee por favor Estudiante H5

29 Estudiante H5: Lo que conozco: observa los prismas y contesta las preguntas.

30 Mtra: Observa los prismas y contesta las preguntas, aquí están planos los prismas,
31 ustedes ya los tienen hechos enfrente, pónganlos enfrente, ya tienen hechas sus cuatro
32 figuras: la figura A, la B, la C y la D. Pónganlas en la misma posición en que están en el
33 libro, sí, la A, la B, la C y la D. ¿Ya? Dice, de los prismas ¿Cuáles tienen el mismo
34 volumen? ¿Cómo puedo saber? ¿Cómo puedo encontrar el volumen?

35 Estudiante H6: Contando los cubitos.

36 Estudiante H7: Maestra yo. La A y la C.

37 Mtra: Contando los cubitos primero. A ver tomen sus figuras, cuenten los cubos, tomen
38 sus figuras que hicieron, cuenten los cubos.

39 [La estudiante M2 da una breve explicación de por qué dos de los prismas armados con
40 hexaedros regulares de plastilina que tiene son del mismo volumen].

41 Estudiante M2: Porque si estos los separo y los junto son iguales. ¿Ya vio?

42 Mtra: Sí ya vi. [La profesora se dirige a todo el grupo para preguntarle lo siguiente:] De los
43 prismas ¿Cuáles tienen el mismo volumen?

44 Estudiantes varios: A y C.

45 Mtra: A y C. ¿Cuántos cubos más necesitan para que el C tenga el mismo volumen que el
46 B. ahora chequen el C, tomen su figura C y ahora el B.

47 Estudiante H8: Cinco.

48 Mtra: [La profesora se dirige al equipo 2 y le dice al estudiante H8:] Toma tu figura. A ver
49 la figura B y la C ¿Cuántos? Fíjate, no cuentan bien.

50 Estudiante H2: Maestra ya. Quince.

51 [Los estudiantes contaron seis cubos].

52 Mtra: Déjame que ellos cuenten porque, no son 6. [La profesora de nuevo se dirige al
53 Estudiante H8 y le dice: toma las figuras, desbarátalas, cuéntalas. Bueno, no
54 desbarátalas, sino checa cuántas.

55 Estudiante H8: Quince.

56 Mtra: Ah, ¿Verdad que no son seis? Para eso hicimos las figuras, para que las vean,
57 porque a veces en los planitos nada más cuentan los cuadrados, ¿Sí? sí faltan quince. [La
58 profesora nombra planitos a las representaciones gráficas de los prismas que están en el

59 libro de texto] Estudiante M3 ¿Con quién estás trabajando, solita? A ver Estudiante H4 lee
60 por favor el número 1.

61 Estudiante H4: En equipos, completen los prismas y obtengan su volumen, consideren
62 cada cubo pequeño como unidad de medida. Posteriormente, contesten lo que se pide.

63 Mtra: Está ahí incompleto cada prisma. ¿Cómo podríamos completarlo? En primer lugar
64 dice, completa el prisma, ¿Necesitamos completarlo? ¿Sí necesitamos Estudiante H5
65 completar los prismas?

66 Estudiante H5: Sí.

67 Mtra: ¿Llenarlos de cubitos?

68 Estudiante H5: No.

69 Mtra: A ver Estudiante H5, ¿necesitamos?

70 Estudiante H5: No.

71 Mtra: Tú qué opinas estudiante H7, ¿Necesitamos? Porque te veo ya con el lápiz. A ver
72 ¿necesitamos completar los prismas?

73 Estudiante H7: También podemos multiplicar.

74 Mtra: También podemos ¿Qué?

75 Estudiante H7: Multiplicar.

76 Mtra: Multiplicar, ¿Tú qué estabas haciendo?

77 Estudiante H7: Estaba multiplicando base por altura y después por ancho.

78 Mtra: Él estaba multiplicando base por altura y por ancho.

79 [La profesora se dirige con la mirada al estudiante H8 y le pregunta:]

80 Mtra: Y tú ¿Qué estabas haciendo?

81 Estudiante H8: Contándolos.

82 Mtra: Contando los cubitos, entonces completa, completen, cada quien tiene su método
83 de sacar el volumen.

84 Estudiante H2: Ya.

85 Mtra: [Se dirige al Estudiante H8] ¿No necesitas una regla o estas como imaginando?

86 Estudiante H2: Ya maestra.

87 Mtra: ¿Ya? ¿Tú qué hiciste Estudiante M3?

88 Estudiante M3: Hice lo mismo.

89 Mtra: Lo mismo de qué. Estudiante M3 primero.

90 Estudiante M3: Multipliqué.

91 Mtra: ¿Qué multiplicaste?

92 Estudiante M3: 6 por 24.

93 Mtra: 6 por 24 ¿Y por qué 6 por 24?

94 Estudiante M3 porque son seis y seis [La Estudiante M3 señala dos de las aristas del
95 prisma A y posteriormente dice lo siguiente:] y alrededor te da 24.

96 Mtra: Pero no queremos perímetro.

97 Estudiante M3: No por eso. ¿Puede darme un momento por favor?

98 Mtra: A ver organiza tus ideas, piénsalo en lo que nos dice el Estudiante H6 qué hizo,
99 ¿Qué hicieron ustedes?

100 Estudiante H6: Estábamos contando.

101 Mtra: Estaban contando los cuadritos, ¿Y ya tienen el volumen de la A, de la figura A?

102 [El estudiante H6 mueve la cabeza para decir que no].

103 Mtra: ¿Entonces?

104 Estudiante M3: Ya maestra.

105 Mtra: [Se dirige al equipo de la Estudiante M3 y le dice:] A ver.

106 Estudiante M3: Es que son 6 por 4 nos da 24, y de aquí son 6 así y 6 así, entonces son 6
107 por 24 = 144.

108 Mtra: No te entendí, ¿Qué hiciste?

109 Estudiante H3: Es que ella dice así mire, de 6 por 6.

110 Mtra: Ah, sacar una cara nada más.

111 Estudiante H3: Ajá y después de otras 6.

112 Mtra: Si ya te entendí fue por filas. A ver Estudiante H7 ¿tú qué hiciste? ¿Ya terminaste?
113 Allá qué están haciendo? Estudiante M4 ¿Qué están haciendo? [La profesora se dirige al
114 equipo de la Estudiante M4] ¿Qué están haciendo ustedes? ¿Qué multiplicó? [La
115 profesora observa lo que están haciendo en este equipo y posteriormente les dice lo
116 siguiente:] Pero no, no dice que midas en centímetros, ahí están los cubitos marcados, no

117 dice que midas en centímetros. Si midió 4. Hiciste lo mismo que la estudiante M3. Sí, 24
118 por 6, es igual. Para qué mides abajo, si todos los lados son iguales.

119 [El estudiante H6 va a donde está la profesora para mostrarle su procedimiento:

120 Mtra: A ver ¿Qué hiciste?

121 Estudiante H6: Primero sumé éste y éste y me dio 36.

122 Mtra: A ver sumé 6 por 6 = 36. Multiplicaste.

123 Estudiante H9: No, primero multiplicamos este por este y nos dio 36, después lo
124 multiplicamos por 6. [Señalando las caras del prisma].

125 Mtra: Por sus caras. 216, A ver, vamos a ver. ¿Estudiante H7 cuanto tiene?

126 Estudiante H7: Maestra, primero multiplique 6 por 6 = 36 y después por la altura 36 por 6
127 y me da 316.

128 Mtra: 36 por 6, a ver has tu multiplicación para que cheques. Vamos a ver lo que hizo el
129 estudiante H7. Estudiante H7 y Estudiante M5. Estudiante H7 explícales, primero
130 contamos...

131 Estudiante H7: Es que primero multiplicamos altura por ancho y después lo multiplicamos
132 por largo. 6 por 6, después el resultado lo multiplicamos otra vez por 6.

133 Mtra: ¿Por qué altura primero?

134 Estudiante H7: Es que nosotros multiplicamos es que es para sacar lo de una pared, y
135 después lo multiplicamos por 6 para sacarlo de todo.

136 Mtra: A ver ya, la Estudiante M5 ya está haciendo lo del primer paso. De dónde salió ese
137 36.

138 Estudiante H7: De multiplicar 6 por 6, después lo multiplicamos otra vez por seis y
139 sacamos el resultado.

140 Mtra: A ver ¿Cuánto le salió a la Estudiante M5?

141 Estudiante H7: 216.

142 Mtra: Y ¿Cuánto te salió a tí? [Refiriéndose al Estudiante H7].

143 Estudiante H7: ¡Oh!

144 Mtra: ¡Oh! me imagino que en lo que está mal es en la multiplicación. [Refiriéndose a
145 todos los estudiantes la maestra dice:] ¿Está bien o está mal?

146 Estudiante H8: Sí está bien.

147 Mtra: A ver [refiriéndose a la estudiante M3] ¿Por qué? A tí ¿cuánto te salió?

148 Estudiante M3: 144.

149 Mtra: A ver pasa a explicarnos ahora.

150 [No pasa la Estudiante M3 sino el Estudiante H1 que pertenece también al mismo equipo
151 y escribe en el pizarrón $6 \times 4 = 24 \times 6 = 144$:]

152 Mtra: ¿Por qué 6 por 4?

153 Estudiante H1: Estoy mal.

154 Mtra: No me digas que estás mal ¿Por qué 6 por 4? ¿Cómo sabes que estás mal, ya
155 vimos que estas mal? ¿Por qué 6 por 4? Tomen un cubito y explíquenme ¿por qué 6 por
156 4? Ahí lo tienen al lado, tienen una figura.

157 [El estudiante H1 toma el cubo de 6 centímetros de arista y lo observa].

158 Mtra: Si multiplicaste 6 por 4, a ver señálame 6 por 4, ¿Qué fue el 6 y dónde está el 4?

159 [El estudiante H1 ahora observa en su libro la imagen del cubo de 6 unidades cúbicas de
160 arista].

161 Mtra: 6 ¿Por qué? ¿Dónde está la medida 6, 6 unidades?

162 Estudiante H1: [Señalando la cara del cubo que tiene completas las unidades cúbicas en
163 el libro dice:] 6 por 6.

164 Mtra: Entonces una. [Señala la maestra la misma cara del cubo que había señalado el
165 Estudiante H1] y ¿Dónde está 4?

166 Estudiante H1: Conté mal.

167 Mtra: Ah contaste mal. Son 6, 6 [la maestra señala dos aristas de la misma cara del cubo,
168 la cual tiene los cubos completos] creo que sacaron el perímetro, ¿verdad? Y pensaron
169 que habían sacado todo, el total, y después lo multiplicaron por 6 porque pensaron que
170 eran las paredes 6 cosas ¿verdad?

171 Estudiante H1: Pensamos que era el volumen.

172 Mtra: Así sacaron 24 y luego lo multiplicaron por 6.

173 [Ahora la profesora se dirige a todos los estudiantes y les dice:].

174 Mtra: Esta es la figura A ¿Cuánto salió?

175 Estudiante H9: 216.

176 Mtra: ¿La figura B?

177 Estudiante H9: 324.

178 Mtra: ¿Por qué 324? Pasa, pasa [La profesora le indica que pase al pizarrón].

179 [Mientras el estudiante H9 pasa al pizarrón a resolver el ejercicio, la profesora sigue
180 preguntando]

181 Mtra: ¿Alguien tiene la figura D? la figura B este... La figura C [Se dirige al estudiante H6]
182 ¿Estudiante H6 ya la tienes? No tienes que medir hijo. Nada más tienes que contar los
183 cubos, no medir. ¿Ha, quieres completar?

184 Estudiante H6: No.

185 Mtra: ¿Entonces? [Hay un diálogo entre la profesora y el Estudiante pero es inaudible].

186 Estudiante H9: Ya maestra.

187 [El estudiante multiplicó $6 \times 6 = 36$, después multiplicó $36 \times 9 = 324$]

188 Mtra: [Sigue con el equipo de la Estudiante M2 y el Estudiante H6] si quieres completar,
189 1,2,3,4,5,6 por 4, ya tengo el de dos medidas, una, dos, ahora falta ésta, ¿Cuánto es? [La
190 profesora voltea a ver a la estudiante M3 y le pregunta:] ¿Y tú qué es lo que estás
191 haciendo?

192 [Al parecer la estudiante M3 está sumando cantidades, la estudiante M3 le dice algo a la
193 profesora pero es inaudible esta parte del video?]

194 Mtra: Tú estás sumando.

195 Estudiante M2: sí.

196 Mtra: Entonces completa la figura.

197 [La profesora voltea a ver al Estudiante H4 y le pregunta lo siguiente:]

198 Mtra: ¿Ya tienes la B Estudiante M9?

199 Estudiante M9: Ya.

200 Mtra: Pasa al pizarrón.

201 Estudiante H8: [Se para frente al pizarrón viendo a la profesora y pidiendo que sea él
202 quien pase al pizarrón dice:] Maestra yo, ya lo hice.

203 Mtra: Ahorita que Pase la Estudiante M9.

204 [El estudiante H7 pasa con la profesora a decirle el procedimiento que utilizó, pero hay
205 cinco segundos de video inaudible].

206 Mtra: Pero estás trabajando área lateral. [El estudiante H7 hace otro comentario pero es
207 inaudible lo que dice, a lo que la profesora contesta:] Pues sí, eso te da área total.

208 [La profesora nuevamente vuelve con el equipo de los estudiantes H6 y la estudiante M2,
209 observa lo que está haciendo el Estudiante H6 y le dice lo siguiente:]

210 Estudiante H6: Me da 6.5 maestra.

211 Mtra: No, no debe ser 6.5, tiene que ser 6, no hay decimales.

212 Estudiante H6: Sí hay decimales maestra.

213 Mtra: No.

214 [La profesora se pone a explicarle señalando con su lápiz en el libro del estudiante H6 y
215 de vez en cuando voltea a ver su libro que trae en la mano. La profesora le dice algo al
216 Estudiante H6 pero es inaudible lo que le dice].

217 Mtra: A ver la B. no nos dijiste nada Estudiante M9, a ver díganos ¿Qué hizo?

218 Estudiante H11: Maestra, dice que multiplicó.

219 Mtra: No eres tú su traductor [La profesora deja a la estudiante M9 y pasa con el equipo
220 del estudiante H7 y les dice refiriéndose al estudiante H7 lo siguiente:] ¿Siguen sacando
221 área lateral y total?

222 Estudiante H12: Ahora estaba sacando el área.

223 Mtra: Él estaba sacando el área lateral y luego lo sumó y sacó el área total. Pero si ya
224 tienes 3 medidas, ¿Cuántas medidas necesitas para el volumen? ¿Lo completamos?
225 ¿Por qué no aprovechas y lo haces como edificio? Ándale.

226 Estudiante H7: No.

227 Mtra: Sí ándale.

228 Estudiante H7: Le hago así [Al mismo tiempo que hace señas con sus manos para
229 representar los niveles del prisma.

230 Mtra: Sí ¿Cuántos son? 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

231 [El estudiante H7 se pone a juntar cubitos de plastilina para armar el prisma B].

232 Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

233 Mtra: A ver ahora júntalos.

234 Mtra: Ahora 6, 9 y 6, rápido un piso (la profesora se refiere al primer nivel del prisma) un
235 piso solo. ¿Quieren que les preste más cubos?

236 Estudiante H7. No, ya, ya.

237 Mtra: No les va a alcanzar.

238 Estudiante H7: [Ve que su compañera de equipo ya terminó primero de hacer el prisma y
239 le hace la siguiente pregunta:] ¿Ya lo hiciste sola?

240 Estudiante M5. Ya.

241 Mtra: Revisa la altura.

242 Estudiante M5: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Necesito más cubitos.

243 Mtra: Te estoy diciendo. [La profesora le da más hexaedros regulares de plastilina a la
244 estudiante M5].

245 Estudiante H7: ¿Nada más es la base lo que quiere o todo?

246 Mtra: Todo.

247 Estudiante H7: ¿Todo?

248 Mtra. [Refiriéndose a la Estudiante M9, quien está en otro equipo le dice:] Estudiante H10
249 ¿Quién pasó a hacer ese, a ver estudiante M9, explícame qué hiciste tú?

250 Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho.

251 Mtra: Multiplicaste, a ver escuchamos, dejamos de andar por todos lados, escuchamos,
252 ¿Estudiante M9 qué hiciste?

253 Estudiante M9: Multipliqué largo por ancho y después por las 6 caras.

254 Mtra: ¿Y después por qué?

255 Estudiante M9: Por las 6.

256 Mtra: ¿Largo por ancho?

257 Estudiante M9: Ajá, y después por las 6 caras.

258 Estudiante H6: No son iguales.

259 Estudiante H1: No son iguales las caras.

260 Estudiante H6: Es que ella quiere sacar un área.

261 Mtra: No, sí lo hizo bien. Pero no me está explicando.

262 Estudiante M8: No está explicando bien.

263 Mtra: No estás explicando bien ¿Qué hiciste? Si multiplicaste bien, pero no te has dado
264 cuenta de que no fueron las caras lo que multiplicaste.

265 Estudiante H6: yo sí, yo sí, yo sí.

266 Mtra: [Refiriéndose al estudiante H6 le pregunta:] ¿A ver qué multiplicó?

267 Estudiante H6: Este, largo por ancho.

268 Mtra: Largo por ancho y ese 6 a qué corresponde.

269 Estudiante H6: Por altura.

270 Mtra: A los pisos del edificio, no a las caras, largo, por ancho y luego por la altura, no por
271 las caras. A ver estudiante M8, ¿Qué hiciste Estudiante M8?, escuchamos a la Estudiante
272 M8.

273 Estudiante M8: Multipliqué 9 por 6, primero multipliqué nueve por 6 y lo que me salió lo
274 multipliqué por 6 y lo que me salió es el... [La interrumpe la profesora].

275 Mtra: Pero 9 por 6 qué, a qué corresponde, a qué medidas corresponde.

276 Estudiante M8: 54.

277 Mtra: No a qué medidas corresponde, ¿Por qué 9? ¿Qué medida es de 9? ¿Cómo se
278 llama la medida? ¿Cómo se llama?

279 Estudiante M8: Largo.

280 Mtra: El largo y luego el...

281 Estudiante H7: ancho.

282 Mtra: Ancho, y luego el...

283 Estudiante H1: La altura.

284 Mtra: La altura.

285 Mtra: [Vuelve con el equipo 7 y les pregunta lo siguiente:] A ver vamos a ver, ya tienen la
286 figura? [Refiriéndose a los demás equipos les dice:] vayan sacando la figura C.

287 Estudiante H5: ¿Cómo?

288 Mtra: Como quieras sacarla, la figura C. El volumen, está muy difícil.

289 Estudiante H5: Para mí sí.

290 Mtra: ¿Por qué? A ver ¿Por qué está difícil? A ver dice este el Estudiante H5 que está
291 muy difícil la figura C, ¿Alguien ya sacó la C?

292 Estudiante H6: Yo maestra, yo ya la saqué.

293 Mtra: ¿Está muy difícil sacar el volumen de la figura C?

294 Estudiante H5: Sí.

295 Estudiante H6: No.

296 Mtra: A ver ¿Por qué no es difícil? ¿Por qué no es difícil?

297 Estudiante H6: [pasa al frente con su libro] no es muy difícil maestra, no es muy difícil
298 nada más es, este...

299 Mtra: Escuchamos al Estudiante H6.

300 Estudiante H6: no es muy difícil, nomás hay que completarlos y ya usar los... [Es
301 interrumpido por la profesora].

302 Mtra: [Al mismo tiempo que se acerca al equipo cuatro la profesora pregunta:] ¿Cuántas
303 medidas tiene esa, la figura C Estudiante H6, ¿Por qué no vez tu libro?, ¿Cuántas
304 medidas tiene la figura C?, ¿Cuántas figuras tiene marcadas? ¿Cuántas medidas?

305 Estudiante H10: Una.

306 Mtra: Nada más una ¿Qué podemos hacer para obtener la otra?

307 Estudiante H2: ¿Multiplicando?

308 Mtra: ¿Multiplicando? Pero si no tenemos medida, por qué lo vamos a multiplicar? [La
309 profesora saca un folder de cartulina de su estante y regresa con el estudiante H10].
310 ¿Tienes unas tijeras? Vamos a hacer la reglita medidora de cubos [la profesora recorta
311 una tira de cartulina]. Vamos a medir ésta, la única medida que tenemos, la voy a marcar
312 en esta reglita, esta va a ser mi reglita para medir las otras aristas. [Con la tira de cartulina
313 que cortó la profesora, hizo una regla graduada tomando como unidades de longitud los
314 segmentos que estaban marcados en una de las aristas del prisma, y con esa unidad de
315 medida obtuvo la medida de longitud que hacía falta en una de las aristas del prisma].
316 ¿Cuántas medidas tengo ahora?

317 Estudiante H5: 3.

318 Mtra: ¿Cuántas necesito para sacar el volumen? Pues nada más esas, entonces, ¿estaba
319 muy difícil? Y ¿Qué hicimos? Con nuestra reglita vimos cuántas veces cabe en cada una,
320 ahora saquen el volumen. [La profesora deja a ese equipo y pasa con el equipo 5
321 haciéndole la siguiente pregunta al estudiante H11]. ¿No sabes cómo Estudiante H11?
322 [La profesora coloca su tira de cartulina graduada que lleva en la mano y la coloca en el
323 libro para que el estudiante observe el número de veces que la unidad de medida cabe en
324 la arista que no especifica su longitud].

325 Estudiante H6: 210 maestra ya lo saqué.

326 Mtra: Ahora sí ¿Cuántas medidas tengo Estudiante H11?

327 Estudiante H11: Una.

328 Mtra: ¿Cómo que tengo una? Una, dos, tres, ¿Cuántas medidas necesito para sacar el
329 volumen? [La profesora deja al equipo 4 y pasa con el equipo 5] A ver ahora esta figura.

330 Estudiante H7: Ya maestra.

331 Mtra: Ahora sí saquen el volumen. ¿Cuántas medidas necesitan?

332 Estudiante H8: Seis medidas.

333 Mtra: ¿Seis medidas, para qué? [Al mismo tiempo que la profesora señala las aristas de
334 un prisma representado en el libro de texto, le pregunta al estudiante:] ¿Cuántas de estas
335 necesitamos ahí para sacarlas?

336 Estudiante H8: Tres.

337 Mtra: Tres, entonces... [Al mismo tiempo que la profesora señala con su mano el largo,
338 ancho y altura en el prisma que los estudiantes hicieron con hexaedros de plastilina, dice
339 lo siguiente:] largo, ancho y altura. ¿Cuánto tienes de largo?

340 Estudiante H8: 9.

341 Mtra: ¿Y de ancho?

342 Estudiante H8: 6.

343 Mtra: ¿Y de altura?

344 Estudiante H7: 6

345 Mtra: ¿Entonces?

346 [Los estudiantes comienzan a calcular el volumen por medio de multiplicaciones con los
347 datos que la profesora les ha ayudado a descubrir].

348 Estudiante H7. Ya maestra.

349 Mtra: [La profesora señala nuevamente el prisma que los estudiantes elaboraron con
350 cubos de plastilina y les indica con la mano, al mismo tiempo que le dice al equipo:]
351 volumen es todo esto, ahora, cuéntame el primer piso, ¿dónde está más claro? Aquí, el
352 primer piso del edificio, cuéntamelo.

353 Estudiante H7:

354 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54, 55.

355 Mtra: 55, uno, ¿55?

356 Estudiante H7. ¿Son 54 no?

357 Mtra: 2,4,6. [La profesora ha contado el número de hexaedros regulares colocados en dos
358 de las aristas del prisma, y dice lo siguiente:] 54 , 54 en un piso, 54 en otro, [Al mismo
359 tiempo la profesora va señalando con su mano cada uno de los niveles del prisma] 54, 54,
360 54, 54, A ver multiplica, ¿Es lo mismo o no?, ¿Ya está bien su figura o está mal? Volumen
361 es todo lo que está dentro, ustedes primero estaban sacando área lateral y luego área

362 total y ahora no sé que estaban haciendo porque no les salía. Ahora saquen el del C, yo
363 traía mi reglita medidora, pero no me acuerdo dónde la dejé, acá está. ¿Creen que les
364 pueda servir mi reglita?

365 Estudiante H8: ¿Cómo es así?

366 Mtra: A ver, no sé ustedes. [El estudiante H7 la toma y la coloca en su libro para medir
367 una de las aristas del prisma B, es evidente que el estudiante H7 no sabe cómo la utilizó
368 la profesora, por lo que la profesora la toma y la coloca en una de las magnitudes ya
369 dadas en el prisma C al mismo tiempo que les dice:] Esta medida corresponde a lo que ya
370 tienen ustedes, ¿Creen que les puede servir?

371 Estudiante H7: No o ¿sí?

372 Mtra: Ah, no sé, pues ve. [El estudiante la coloca nuevamente en el prisma B y no sabe
373 qué hacer por lo que la profesora interviene diciéndole:] es del C, no es de ese. (El
374 estudiante la deja al lado y parece que está observando el prisma C. [La profesora
375 nuevamente interviene para decirle:] Ve, te la presto, mide. [La profesora se percata de
376 que el estudiante H7 ha colocado mal la tira graduada y le dice:] desde el cero, desde ahí.

377 Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6.

378 Mtra: Ponle número para que no te equivoques, ahora de ¿cuántas medidas te faltan?

379 Estudiante H7: 1,2,3,4,5.

380 Mtra: Ponle, ahora de acá [La profesora señala la arista que no tiene marcadas las
381 unidades de medida de longitud].

382 Estudiante H7: 1,2,3,4,5,6,7. ¿7?

383 Mtra: 7 anótale ahí. Tienes tres medidas ¿Puedes sacar ya el volumen?

384 Estudiante H7: Sí.

385 Mtra: ¿Cómo lo vas a sacar?

386 Estudiante H7: Multiplico 5 por 7 por 6. ¿Ahora sí verdad?

387 Mtra: Préstame mi reglita la necesito para la Estudiante M10 [La profesora se dirige ahora
388 a todo el grupo] ¿Ya acabaron?

389 Estudiantes varios: Ya.

390 Mtra: ¿Cuánto fue?

391 Estudiante H1: 210.

392 Mtra: ¿Cuánto les salió allá Estudiante H11?

393 Estudiante H11: 210.

394 Mtra: [Se dirige al equipo 6] y aquí cuánto] y aquí ¿cuánto?

395 Estudiante H12: 180.

396 Mtra: ¿180? [Dirigiéndose al estudiante H11]

397 Estudiante H11: A mí, porque yo... [Lo interrumpe la profesora].

398 Mtra: No. Es en equipo. ¿Cuánto les salió? [Dos compañeras de equipo del Estudiante
399 H11 hacen gestos con la cara que denotan no haber hecho la actividad] ¿Toda vía no lo
400 hacen?

401 [El Estudiante H8 se acerca a la profesora para preguntarle respecto al resultado que
402 obtuvo].

403 Estudiante H8: lo que hicimos es que aquí [diálogo inaudible] este medimos... [El
404 Estudiante H8 es interrumpido por la profesora].

405 Mtra: Si midió con regla, no se dio cuenta que esto no equivale a un centímetro, es
406 menos de un centímetro, son como 8 milímetros, [la profesora nuevamente saca su tira
407 graduada y le muestra al Estudiante H11 lo siguiente:] por eso medí la misma que está
408 marcada en el libro y la ocupé aquí y la ocupé acá. Te la presto.

409 [La profesora ahora se acerca con el equipo del estudiante H9].

410 Mtra: A ver, 1,2,3,4,5,6,7 y 6, entonces por qué, este, te salió tan grandote, 1,2,3,4 [La
411 profesora borra los segmentos que el estudiante había marcado en la arista del prisma
412 que no tiene descrita una de sus magnitudes y le marca las que señala la tira graduada.
413 En seguida pide al Estudiante H8 que pase al pizarrón a resolver el ejercicio de la figura
414 C.] A ver, pasa Estudiante H10 y me explicas ahí, pasa y horita pasas tú [Refiriéndose al
415 Estudiante H7] rápido para salir al recreo.

416 Estudiante H10: Lo primero que multipliqué fue 6 por 5, después el resultado lo multipliqué
417 por 7 y da 37 por 7, [hace un gesto que significa que se ha equivocado y corrobora] digo
418 30 por 7, después salió 210.

419 Mtra: A ver hazlo.

420 [El estudiante escribe en el pizarrón $6 \times 5 = 30 \times 7 = 210$ y se retira. En seguida pasa el
421 Estudiante H7 y escribe en el pizarrón $7 \times 5 = 35 \times 6 = 210$]

422 Mtra: A ver escuchamos al estudiante H7.

423 Estudiante H7: Yo multipliqué largo por ancho que es 7 por 5 y me dio 35, y después por
424 altura que es por 6.

425 [Los estudiantes y la profesora salen al recreo].

- 426 Mtra: Completen la tabla.
- 427 [La profesora reproduce en el pizarrón la tabla que está en la parte inferior del libro de
428 matemáticas sexto grado, página 163].
- 429 Mtra: ¿A ver, ya? Así como están sentados van a resolver y llenar la tabla con los datos
430 que falten ¿Hacemos el primero, o ustedes solos? ¿Solos?
- 431 Estudiantes varios: Solos.
- 432 Estudiante H11: El primero.
- 433 Mtra: ¿Solos, o hacemos el primero? Rápido.
- 434 Estudiante H2: ¿Lo hacemos solos?
- 435 Estudiante M3: ¿Copiamos la tabla?
- 436 Mtra: No ya tienen la tabla, es el reto [La profesora se refiere a un apartado del libro en
437 cada una de las lecciones que se llama reto el cual se presenta a continuación].

Ancho	Largo	Altura	Volumen
4	6	9	
4	7	10	
7	10		350
	8	8	192

- 438 Estudiante H7: Ah la hacemos. ¿En parejas?
- 439 Mtra: En parejas, en equipo, así como están. [Hay 30 segundos de silencio] Aquí hay una
440 hoja, les he dicho que pueden hacer operaciones ahí.
- 441 Estudiante H6; ¿Maestra, $9 \text{ por } 2 = 32$?
- 442 Mtra: No, hay que aprenderse bien las tablas. ¿Ya, ya acabaron con la tabla? [La
443 profesora se dirige con la mirada al Estudiante H7 y le dice:] a ver pasa a hacer la primera
444 y checamos. ¿Quién pasa a hacer el que sigue?
- 445 [El estudiante H7 pasa y escribe 216 en el primer reactivo].
- 446 Estudiante H7: ¿Pongo todas?
- 447 Mtra. No, nada más la primera, el que sigue, ¿quién lo tiene, ya el equipo de la Estudiante
448 M6? [La Estudiante M6 levanta la mano y la profesora le dice:] pasa, Estudiante M6 ¿Ya
449 tienes uno? ¿Cuál tienes?
- 450 [La estudiante M6: pasa y escribe 280 en el segundo reactivo].
- 451 Mtra: El cuarto, Estudiante H6.

452 [Pasa el estudiante H6 a colocar el resultado de la cuarta línea. La profesora se percató de que la Estudiante M4 está utilizando la calculadora y le dice lo siguiente:]
453 de que la Estudiante M4 está utilizando la calculadora y le dice lo siguiente:]

454 Mtra: No sin calculadora, eso no se vale. A ver ¿Quién hizo la primera?

455 Estudiante H7: Yo.

456 Mtra: Pasa a decirme ¿qué hiciste?

457 Estudiante H7: Multipliqué 4 por 6 = 24, luego 24 por 9 = 216 [Al mismo tiempo escribe las
458 operaciones en el pizarrón $4 \times 6 = 24$ $24 \times 9 = 216$].

459 Mtra: ¿Por qué multiplicaron largo, ancho y altura Estudiante H7?

460 Estudiante H7: ¿Yo?

461 Mtra: Sí, ¿Por qué?

462 Estudiante H7: ¿Ancho y altura?

463 Mtra: Largo, ancho y altura ¿Por qué? Porque ese es el... ese es el volumen, esas son las
464 medidas que se necesitan para... calcular el volumen. Ahora Estudiante M6. Ya está ahí
465 hecha hija.

466 Estudiante M6: Pero voy a hacer la multiplicación.

467 Mtra: Ahora la Estudiante M6 va a explicar el otro, ¿Qué hizo la Estudiante M6?

468 Estudiante H7: Multiplicó.

469 Estudiante H6: Multiplicó largo por ancho por altura.

470 Mtra: Multiplicó largo por ancho y...

471 Estudiante H3: Por altura.

472 [El tercer reactivo lo contestó la Estudiante M4 y el cuarto reactivo lo resolvió el
473 Estudiante H6].

474 Mtra: En el tercero, por qué apareció ese 5 ahí, a ver estudiante M4.

475 [La estudiante M4 pasa y escribe en el pizarrón la operación $7 \times 10 = 70$]

476 Estudiante M4: primero multiplique 10 por 7 y salieron 70.

477 Mtra: Y el 10 por 7 ¿Por qué?

478 Estudiante M4: porque es el ancho y el largo.

479 Mtra: ¿El ancho y el largo 10 por 7?

480 Estudiante H7: No el largo y la altura.

481 Mtra: Largo y la altura, ajá.

482 Estudiante M4: Y después multipliqué por 5.

483 Estudiante H11: No es cierto, largo y ancho.

484 Mtra: Largo y ancho, sí es cierto, largo y ancho.

485 Mtra: Y Por qué multiplicaste por 5, ¿cómo supiste que era por 5? A ver ¿por qué?

486 Estudiante M4: Porque fui multiplicando.

487 Mtra: ¿Fuiste multiplicando por 1, por 2, por 3, así hasta que diste con el 5? ¿Sí? [La
488 profesora voltea hacia el equipo 6 y pregunta:] ¿Ustedes qué hicieron allá ¿ustedes
489 hicieron lo mismo todos?

490 Estudiantes varios: Sííí.

491 Mtra: [La profesora se dirige al equipo 4]. ¿Y ustedes qué al final? En el penúltimo, en
492 este de 5, también les salió 5?

493 Estudiante M8: Sí.

494 Mtra: Pero ¿Qué hicieron?

495 Estudiante M8: Multipicamos.

496 Mtra: Estuviste multiplicando ¿Qué?

497 Estudiante M8: 10 por 7.

498 Mtra: ¿10 por 7 primero y luego por 1, por 2, por 3, por 4? ¿hasta que les salió 350?
499 ¿quién hizo el último?

500 Estudiante H6: Yo.

501 Mtra: Explícanos por qué le pusiste ahí 8. Ah 3. El 8 ya estaba.

502 [El estudiante primero escribe en el pizarrón $8 \times 8 = 64$]

503 Estudiante H6: y fui multiplicando por 1, por 2, por 3...

504 Mtra: Ha fuiste probando. ¿Alguien sabe cómo lo podríamos haber hecho también?

505 Estudiante H7. ¿Dividiendo?

506 Mtra: [Moviendo la cabeza en señal de estar de acuerdo] Operaciones contrarias. Ya lo
507 sabemos utilizar, operaciones contrarias. ¿Verdad?

508 Estudiante H6: sumando.

509 Mtra: ¿Cómo sumando Estudiante H6?

510 Estudiante H6: 64 más 64, más 64...

511 Mtra: ¿64 más 64, más 64?

512 Estudiante H6. ¿Pero no sería más fácil multiplicar?

513 Mtra: Pues sí es más fácil multiplicar.

514 Mtra: A ver damos vuelta para hacer el ejercicio. Lee por favor este, Estudiante H11.

515 Escuchamos al Estudiante H11.

516 Estudiante H11: Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa, el vendedor le propone los siguientes modelos.

517

518 Mtra: Ahí están los dos modelos.

519 [Los modelos de peceras que se presentan en esta actividad son la pecera A en forma de

520 un hexaedro regular cuyas aristas mide 25 cm. Y la pecera B de forma rectangular cuyas

521 aristas miden 30 cm, 20 cm y 26 cm.]

522 Estudiante H11: ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla?

523 Mtra: ¿Cómo?

524 Estudiante H11: ¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla?

525 Es la B.

526 Mtra: Ahí están los dos modelos, ¿por qué la B? ¿porque está más grandota?

527 Estudiante H6: por las medidas.

528 Estudiante H11: Ajá por las medidas.

529 Mtra: A ver, pero una cosa, a ver otra cosa, a ver ¿Cuánto?...

530 Estudiante H7: Vamos a comprobar.

531 Mtra: Vamos a comprobar exactamente si es la B. Sacar, ¿qué tengo que sacar?

532 Estudiante H7: Largo por ancho por la altura.

533 Mtra: Largo por ancho por la altura, ¿qué es? ¿Qué es largo por ancho por la altura, qué

534 es lo que vamos a obtener?

535 Estudiante H7: El volumen.

536 Mtra: El volumen, de la pecera A y de la pecera B. [La profesora se dirige al Estudiante

537 H11]. ¿Estudiante H11 ya? Vamos a comprobar lo que dicen, a ver si es cierto.

538 Estudiante H10: Ya.

539 Mtra: Falta la B. A simple vista podríamos decir que sí, pero a ver.

540 Estudiante H6: Ya, ya maestra y sí estamos en lo correcto.

541 Mtra: ¿En lo qué?

542 Estudiante H6: Sí estamos en lo correcto.

543 Mtra: Entonces, vamos a darles tiempo que terminen, [La profesora se acerca al
544 estudiante H9 y observa lo que está haciendo y en seguida le dice lo siguiente:] por qué
545 multiplicaste por 6?

546 Estudiante H9: ¿Cuál?

547 Mtra: Esta multiplicación.

548 Estudiante H9: Pues ésta.

549 Mtra: ¿25 por 6?

550 Estudiante H9: Ajá.

551 Mtra: ¿Por qué por 6? ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen? Yo no veo
552 ningún 6, veo las 3 medidas, pero no hay ningún 6.

553 [Hace un diálogo el Estudiante H9 pero es inaudible]

554 Mtra: Se equivocó. [La profesora sigue observando lo que el Estudiante H9 está haciendo
555 y le dice lo siguiente:] no es por cara, estás sacando otra vez área lateral y total, [El
556 estudiante cambia el 6 por el 5 y la profesora le dice:] tampoco es por 5, ¿Eh dónde está
557 una medida de 5 dime? [El estudiante H9 cambia el número 5 por el 3, la profesora le
558 dice:] tampoco es 3, ¿Dónde hay alguna medida que sea 3. Hay tres medidas ¿Cuáles
559 son?

560 Estudiante H9: 25 por 25.

561 Mtra: Entonces ¿Por qué escribes 25 por 3?

562 Estudiante H9: Entonces es 25 por 25.

563 Mtra: Sí, son tres medidas.

564 [Hay una interrupción de la clase por cuestiones administrativas de la supervisión escolar
565 de un minuto] [La profesora en seguida continúa con el Estudiante H9].

566 Mtra: ¿Ahora si ya te diste cuenta? Son 3 medidas, las 3 medidas que están ahí, largo,
567 ancho y altura, ahora sí.

568 [La profesora deja al Estudiante H9 y ahora se dirige a todo el grupo].

569 Mtra: ¿Ya? ¿Cuánto salió?

570 Estudiante H11: Sí, estamos en lo correcto.

571 Mtra: ¿Estamos en lo correcto? ¿Cuál es la que necesita más agua para llenarla?

572 Estudiantes H11 y Estudiante H6: La B.

573 Mtra: La B, ¿Por qué?

574 Estudiante H6: Porque multipliqué 30 por 20 y luego lo que me salió lo multipliqué por 26.

575 Mtra: ¿Y por eso necesita más agua?

576 Estudiante H6: Sí. Porque saqué el volumen.

577 Mtra: ¿Ha porque sacó el volumen y?

578 Estudiante H6: Y lo que saqué lo convertí en litros, en mililitros.

579 Mtra: Y sí necesitamos más agua para el B. porque su volumen es mayor. A ver, leemos
580 el cuadrito Estudiante H8.

581 Estudiante H8: El volumen de un cuerpo está relacionado con el espacio que ocupa, el
582 volumen se calcula en unidades cúbicas, se llaman así porque en el cálculo intervienen
583 tres dimensiones (largo, ancho y altura); así, se pueden tener metros cúbicos, decímetros
584 cúbicos, centímetros cúbicos o milímetros cúbicos, entre otros.

585 Mtra: Sigue estudiante M7 por favor.

586 Estudiante M7: A una juguetería llegaron 70 cajas con juguetes de forma cúbica, las cajas
587 miden 124 cm por 64 cm por 94 cm y cada juguete tiene 30 cm de arista ¿Cuántos
588 juguetes llegaron a la juguetería?

589 Mtra: ¿Trajeron su calculadora?

590 Estudiantes varios: Síííí.

591 Mtra: Ha pues horita no la van a utilizar.

592 Estudiantes varios: Haaaa.

593 Mtra: No, para la multiplicación no, para la división si la utilizamos. Y a ver primero, a ver,
594 ¿Qué tengo que hacer?

595 Estudiantes Varios: Multiplicar.

596 Mtra: ¿Qué multiplico?

597 Estudiantes varios: 124 por 64 por 94.

598 Estudiante H7: Ya lo tengo.

599 Mtra: No, sin calculadora.

600 Estudiante H7: Ya lo tenía.

601 Mtra: No, ya lo tenía no, rápido sin calculadora. ¿Ya, ya acabaron? Sin calculadora.

602 Estudiante H6: Ya maestra.

603 [La profesora se acerca con el Estudiante H9 y le pregunta:

604 Mtra: Estudiante H9 ¿Qué está multiplicando?

605 Estudiante H9: Éste por éste y luego el resultado por éste.

606 Mtra. Mmm, Sí.

607 Estudiante H6: Ya lo hice y me salieron muchos, muchos números.

608 Mtra: Sí, esta es una cantidad grandecita.

609 Estudiante H6: me salieron millones.

610 Mtra: Y después ¿Qué tenemos que hacer?

611 Estudiante H12: Dividir.

612 Mtra: ¿30 en una cajotota? ¿Qué hacemos? Caber, ¿Cuántas veces puede caber? ¿Qué

613 operación nos indica? El ¿Cuántas veces puede caber? 30 por 30 por 30, y luego vamos

614 a ver cuántas veces cabe, éste de 30, por 30, por 30 en una cajotota. ¿Qué operación

615 es?

616 Estudiante H6: División.

617 Mtra: [La profesora mueve la cabeza en señal de estar de acuerdo y dice:] para eso les

618 pedí la calculadora, porque esta división sí está grande. [La profesora se dirige al

619 estudiante H9 y le dice:] ya sacaste el volumen del juguete?

620 Estudiante H9: Ya.

621 Mtra: ¿Dónde está ese juguete? No, este es el de la caja, anótale ahí que es el de la caja

622 para que sepas de qué sacaste, ahora vas a sacar el volumen del juguete, [Toma el

623 hexaedro y le señala las aristas al mismo tiempo que le dice:] 30, cada arista tiene 30, 30,

624 entonces ¿Qué se supone que es? Este también ¿cuánto mide?

625 Estudiante H9: 30.

626 Mtra: ¿Y de la altura? ¿entonces? Pero tiene que ser 3 medidas. Es como el de 25, 25 y

627 25. Ahora ¿Qué va a ser?

628 Estudiante H9: 30.

629 Mtra: Y... ¿Cuántas medidas tengo que tener, cuántas tiene? Es que tapaste, préstame tu
630 goma, tapaste una. [El estudiante escribe en su cuaderno 30×3 y la profesora le dice:].
631 Noo, otra vez por 3, no en vez de 25.

632 Estudiante H9: son 30.

633 Mtra: Está mal. ¿Entonces? ¿Cuánto? 30 por 30 [El estudiante H9 escribe 30×3 y la
634 profesora dice:] 30 por 30, ahora. [El Estudiante H9 escribe $30 + 30$] no, no se trata de
635 sumar, por (X) [la profesora se refiere a que debe multiplicar] ándale así para que se te
636 haga más fácil, [El Estudiante H9 multiplica 30×30 .

637 Estudiante M8: Ya maestra son 27 000.

638 Mtra: No porque hay que dividir, ahora ve ¿cuántas veces cabe este de 30 por 30 en la
639 cajotota.

640 [Se acerca el estudiante H8 y pregunta lo siguiente:]

641 Estudiante H8: [toma el cubo de cartulina que tiene la profesora y señalando cuatro de
642 sus caras le pregunta:] ¿Maestra lo multiplicamos por cada una de sus caras?

643 Mtra: Se supone que es como éste [La profesora señala la pecera de 25×25 que está
644 representada en el libro y le dice al estudiante H8]. Noo, se supone que es como éste,
645 pero en vez de 25 es 30.

646 Estudiante H8: 30 por 30 por 30.

647 Mtra: Ándale.

648 [El estudiante H8 se va a su lugar y la profesora continúa con el Estudiante H9].

649 Estudiante H9: ¿Cuánto me Salió?

650 Mtra: ¿Cuánto te dio?

651 Estudiante H9: 900

652 Mtra: Pero nada más tienes dos medidas, nada más multiplicaste 30 por 30, ahora ¿Qué
653 te falta? Tienes que multiplicarlo por la siguiente medida.

654 Estudiante H9: ¿900 por 30?

655 Mtra: [Mueve la cabeza en señal de aprobación] 900 por 30. ¿Ya vé?

656 [Se acercan los estudiantes H7 y el Estudiante H6 con la maestra llevando en la mano su
657 calculadora con el resultado que acaban de obtener, le preguntan lo siguiente:]

658 Estudiante H7: ¿Termina en 04?

659 Estudiante H6: ¿Termina en 04?

660 Mtra: Pero nada más, este, no hasta 10: décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos,
661 cienmilésimos, millonésimos, qué será, billonésimos. Nada más déjenlo hasta milésimos o
662 hasta centésimos.

663 Estudiante H6: ¿Entonces 27. 62 centésimos?

664 Estudiante H7: ¿Hasta cienmilésimos?

665 Mtra: No, hasta décimos, centésimos, más centésimos.

666 Estudiante H6: ¿62 centésimos?

667 [La profesora se dirige al Estudiante H10 y estudiante H8 y les pregunta lo siguiente:]

668 Mtra: ¿Sí les salió igual? ¿Cuánto te salió?

669 Estudiante H10: Claro que no.

670 Mtra: ¿Por qué? Es que no se multiplica por el... ¿Qué hace Estudiante H8? 30 por 30
671 por 30, ¿Cuánto te da?

672 Estudiante H8: 27 000.

673 [La profesora se percata de que el estudiante H10 ha multiplicado 90 X 30 y le dice lo
674 siguiente:].

675 Mtra: 900 por 30, no 90. ¿Ya vez? Sumaste 30 por 30 por 30, 90.

676 Estudiante H1: El estudiante H8 [se refiere a uno de sus compañeros] Él me dijo que así.

677 Mtra: Pues sí. ¡No, que no te diga! Tú me fuiste a preguntar y me dijiste: ¿Multiplico 30
678 por 30 por 30? Sí. Y sumas.

679 Estudiante H10: ¿Es con un cero verdad?

680 Mtra: No, para 30 por 30 es un cero más.

681 [La profesora ahora se dirige al estudiante H7].

682 Mtra: ¿Ya? ¿cuánto les salió allá?

683 Estudiante H7: Ya le dije.

684 Mtra: Ah, sí. ¿Todos tienen la misma?

685 Estudiante M5: No.

686 Mtra: ¿No? ¿por qué?

687 Estudiante M5: Porque nosotros lo estamos dividiendo.

688 Mtra: ¿Dividiendo qué?

689 Estudiante M5: Eso.

690 Mtra: A ver ¿Qué dividieron?

691 [Hay cinco segundos de video inaudible] [La profesora ahora se dirige al estudiante H10
692 para preguntarle lo siguiente:].

693 Mtra: ¿Qué es lo que hiciste?

694 Estudiante H1: En 30, por 30, por 30 igual a 27 000.

695 Mtra: ¿Pero ya multiplicaste las otras tres medidas? Vamos a ver cuántas veces cabe el
696 cubo chiquito en el grande.

697 [La profesora ahora se dirige al Estudiante H8 con la siguiente expresión:].

698 Mtra: ¿Ya? ¿estudiante H8, ya lo hiciste?

699 Estudiante H8: No tengo calculadora.

700 Mtra: ¿Por qué no te sentaste con alguien que tenga calculadora?

701 Estudiante H1: Te presto la mía.

702 [El estudiante H10 le muestra el resultado en su calculadora a la profesora y la profesora
703 le contesta:]

704 Mtra: No Estudiante H10 ¿qué haces? A ver aquí. [La profesora llama al Estudiante H10
705 al escritorio]. ¿Qué hiciste? que voy viendo.

706 Estudiante H6: Maestra ya me salió.

707 [La estudiante M3 se acerca con la profesora para pedirle que le revise su resultado. La
708 profesora le dice a la Estudiante M3 lo siguiente:]

709 Mtra: A ver aquí, aquí mejor en el pizarrón.

710 [La profesora le pregunta al Estudiante H6:].

711 Mtra: ¿Cuánto te salió?

712 [Ahora se dirige a la Estudiante M5].

713 Mtra: Primero la multiplicación 30 por 30 por 30, ándale.

714 Estudiante H6: 27.6290

715 Mtra: 30 por 30, por 30 [La estudiante M5 Escribe en el pizarrón $30 \times 30 = 900$] ahí está,
716 por... [La estudiante escribe $900 \times 30 = 27000$] Ese es el juguete, la caja del juguete, a
717 ver ¿Dónde está el volumen de la caja grande? ¿Cuánto es el volumen de la caja grande?
718 Ahí dice, La caja tenía 124 cm. Por 64, por 94. 124, por 64 y el resultado va a ser por 94.

719 [La estudiante escribe en el pizarrón $124 \times 64 =$ [obteniendo como resultado 7 936.
720 Posteriormente escribe: $7\ 936 \times 64 = 507\ 904$].

721 Estudiante M5: Ya maestra.

722 Mtra: Ahora por eso les dejé usar la calculadora, hay que ver ¿Pero esa multiplicación
723 está bien Estudiante H6?

724 Estudiante H6: A ver déjeme ver ¿Cuál? 64×124 , no, está mal

725 Mtra: No, no está bien la multiplicación [La profesora se pone a revisar las
726 multiplicaciones que ha hecho la estudiante M3 en el pizarrón y descubre que la
727 estudiante ha multiplicado 124×64 y el resultado nuevamente lo multiplicó por 64].
728 ¿Pero por qué este resultado por 64 otra vez, si es 94, con razón no le sale, dije 94... 64,
729 94, por eso. El 64 ya lo tienes.

730 [La estudiante M3 escribe $7\ 936 \times 94$ pero se fastidia y termina por dejar de hacer la
731 operación].

732 Mtra: Ahora fíjense, ¿Ya acabaron hora sí?

733 Estudiante H9: No.

734 Mtra: Ah. Ahora si 70 cajas acomodadas forman un prisma rectangular, según tienen 70
735 cubos ¿Cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho, cuántas al fondo y cuántas de
736 altura?

737 Estudiante H7. Está difícil.

738 Mtra: No, no está difícil. Es como éste [se refiere al ejercicio que acaban de hacer]. Pero
739 nada más tenemos el resultad. No tengo largo, ni ancho, solamente...

740 Estudiante H7: Altura.

741 Mtra: Noo, 70. La profesora borra los número que estaban escritos en la tabla que utilizó
742 para un ejercicio anterior y escribe el 70 en la columna de volumen? Hey solamente tengo
743 70. ¿Qué por qué me da setenta?

744 Estudiante H6: 7 por 5 = 35×2 .

745 Mtra: ¿Ancho?

746 Estudiante H6: 7.

747 Mtra. ¿Ancho?

748 Estudiante H6: Sí, por 5.

749 [La profesora Escribe en la tabla 7 para el ancho, 5 para el largo y 2 para la altura].

750 Mtra: Y otra.

751 Estudiante H6: Ah yo también sé.

752 Mtra: ¿Qué otra?

753 Estudiante H4: 7 por 10 por 1.

754 Mtra: ¿Otra?

755 Estudiante H7: 7 por 1 por 10.

756 Mtra: ¿Otra?

757 Estudiante M6: 5 por 7 por 2.

758 Estudiante H6: Es lo que yo le dije hace un rato.

759 Mtra: No es cierto.

760 Estudiante H6: Sí.

761 Mtra: Claro que no.

762 Estudiante M3: Ya maestra.

763 Mtra: ¿Ya? ahora contesten en su libro.

764 Mtra: A ver ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería? Primero todos los juguetes,
765 ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería?

766 Estudiante M6: 27 millones cuatrocientos... [Es interrumpida por la profesora].

767 Mtra: No.

768 Estudiante M3: 745 984.

769 Mtra: ¿Cuántos juguetes llegaron? El resultado de su división. ¿Nadie lo tiene?

770 Estudiante H4: No sale.

771 Mtra: Sí sale.

772 Estudiante H4: No sale.

773 Mtra: Sííí.

774 Estudiante M2: No sale.

775 Estudiante H3: No sale.

776 Estudiante H11: Sale... 90 y...

777 Estudiante H6: No.

778 [La profesora revisa lo que hizo la estudiante M3 y le dice que se siente que horita hacen
779 la división con la calculadora].

780 [Se acerca la Estudiante M7 y le muestra su libro con un resultado que está pidiendo la
781 profesora].

782 Mtra: [Observa el resultado y dice:] 27.62 [Moviendo la cabeza en señal de aprobación].
783 Sí, ¿Cuántos juguetes llegaron a la juguetería?

784 Estudiante H11: 27. 62.

785 Mtra: 27 punto 62. Ahora sí, la caja, las 70 cajas acomodadas, ¿Ya estudiante H3? A ver.

786 [El Estudiante H3 ha escrito en la tabla 7 para el ancho, 0 para el largo y 10 para la altura]
787 hay, nada de, Por favor, ¿nada de largo? ¿Cómo puede ser? Y además todo número
788 multiplicado por cero, te da cero. 7 por 0, 0 por 10, 0. Siéntate ya Estudiante H3. [La
789 profesora vuelve a leer la pregunta que está en el libro] si 70 cajas acomodadas forman
790 un prisma, un prisma rectangular, ¿Cuántas cajas fueron acomodadas a lo ancho?

791 Estudiante H7: 5.

792 Mtra: ¿A lo largo, de fondo?

793 Estudiante H6: 7.

794 Mtra: ¿Y de altura?

795 Estudiante H6: 2.

796 Mtra: ¿De altura 2?

797 Estudiante H4: Sí.

798 Estudiante H6: 5, 7, 2.

799 Mtra: 5,7, 2 y ¿Cuánto nos da de volumen?

800 Estudiante H7: 70.

801 [La profesora señala el cuadro en el que colocaron las diferentes formas de hacer un
802 prisma con las magnitudes posibles para el ancho, largo y altura de un prisma con
803 volumen de 70 unidades cúbicas.

804 Mtra: Y ahí tenemos todas las posibles alturas, largos, y anchos, ahí, ¿sí?

805 Mtra: ¿Ya, todo mundo ya tiene completa su tabla?

806 Estudiantes varios: Ya.

- 807 Mtra: Entonces, a ver, recordando ¿Cuántas medidas necesitamos para el volumen?
- 808 Estudiante H6: Tres.
- 809 Mtra: Tres ¿Cuáles son?
- 810 Estudiantes varios: Largo, ancho y altura.
- 811 Mtra: ¿Cuáles son?
- 812 Estudiantes varios: Largo, ancho y altura.
- 813 Mtra: Largo, ancho y altura. ¿Qué es el volumen?
- 814 Estudiante H6: Lo que está dentro.
- 815 Estudiantes varios: Lo que le cabe.
- 816 Mtra: ¿Lo que le cabe a quién?
- 817 Estudiantes varios: A una figura, a un prisma.
- 818 Mtra: A un prisma, a un cuerpo, no figura.
- 819 Estudiante H6: A un cuerpo geométrico.
- 820 Mtra: Y en este caso estamos hablando de los...
- 821 Estudiantes varios: Prismas.
- 822 Mtra: ¿Podemos sacar volumen a las pirámides?
- 823 Estudiante H3: No.
- 824 Mtra: ¿No?
- 825 Estudiantes varios: Sííí.
- 826 Mtra: Sí, pero después lo vamos a ver.

