



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
**PROGRAMA EDUCATIVO DE PSICOLOGÍA EDUCATIVA**  
**UNIDAD AJUSCO**

**RETROALIMENTACIÓN A DOCENTES DE PRIMARIA  
SOBRE ESTRATEGIAS USADAS EN PROBLEMAS DE  
COMPARACIÓN DE RAZONES**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**LICENCIADA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA**

**PRESENTA:**

**TISBE JAQUELINNE SOLÍS CORONA**

**ASESORA DE TESIS: DRA. SILVIA ALATORRE FRENK**



**MÉXICO, D.F; NOVIEMBRE DEL 2010**

## **DEDICATORIAS**

### ***A mis padres María y Salvador:***

*Que siempre me han brindado amor, confianza, apoyo y otras tantas cosas que no terminaría de contar, que han sido la base para convertirme en una persona de provecho y lo han sido sin escatimar esfuerzo alguno.*

*Gracias por creer en mí, por estar conmigo en todo momento. También quiero decirles que este logro no sólo es mío, es una meta que alcanzamos juntos y marca el inicio de un sinnúmero de ellas.*

*Con respeto y admiración.*

### ***A mis hermanos Javier y Lydía:***

*Gracias por dejarme compartir alegrías y tristezas junto a ustedes, que serán momentos inolvidables, y porque al tenerlos a mi lado he recibido enseñanzas, las cuales me han permitido guiarlos en su camino.*

*Agradezco su apoyo incondicional, su confianza y su amor.*

### ***A mis abuelitas Esperanza y Guadalupe:***

*A pesar de adelantarse en la travesía de la vida antes de que yo alcanzara este sueño; pero junto a mí está su esencia. Juntas compartimos noches en vela, alegrías y desilusiones,*

*Gracias por haberme amado, cuidado, estar al pendiente de nuestra familia, por motivarme a no dejarme vencer, por tenerme entre sus brazos, por dejarme escuchar esas experiencias de vida, que no sólo dejan recuerdos sino enseñanzas.*

### ***A mi amiga Mariana Flores:***

*Matizo el haber encontrado en mi camino a una persona que me brindó su apoyo incondicional que tuvo como resultado construir un trabajo notable, profesionalmente hablando; sin embargo, enfatizo el regalo de su amistad, misma que considerare un tesoro incomparable, gracias.*

## **DEDICATORIAS**

***A la Dra. Sílvia Alatorre:***

*No hay palabras suficientes que expresen mi gratitud por todas sus atenciones para la realización de este trabajo, que representa para mí no sólo un logro profesional sino también personal.*

*Por aquellas horas de trabajo sin importar que día fuera, por sus palabras de aliento para seguir cuando alguien se marchó dejando miles de recuerdos, por las clases de ortografía y redacción, por dejarme escuchar sus experiencias.*

*Gracias por motivarme para alcanzar nuevos objetivos, por creer en mi trabajo.*

*Con cariño y respeto a una excelente profesora y ser humano.*

***Al Mtro. Cuauhtémoc Pérez:***

*Agradezco su apoyo, su tolerancia, su colaboración y las palabras de aliento para alcanzar este objetivo. Que a pesar del tiempo no dejó de creer en mí, por compartir su profesionalismo y sus enseñanzas. "*

*Por haberme exigido las tareas y convertido en una persona responsable.*

*Con cariño y admiración.*

***"Por último quiero agradecerle a todas aquellas personas que me acompañaron a lo largo de este camino"***

# ÍNDICE

## RESUMEN

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<i>JUSTIFICACIÓN</i> .....	3
<i>OBJETIVO GENERAL</i> .....	5
<i>ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO</i> .....	6
<b>1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS DEL DOCENTE EN EDUCACIÓN PRIMARIA</b> .....	9
<i>1.1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS</i> .....	9
1.1.1. Formación inicial del docente en matemáticas .....	12
1.1.2. Actualización docente en servicio. El caso de las matemáticas.....	15
<i>1.2. TIPOS DEL CONOCIMIENTO DEL DOCENTE</i> .....	18
1.2.1. Las categorías de Shulman .....	18
1.2.2. Conocimiento del contenido de proporcionalidad .....	20
<i>1.3. LA RETROALIMENTACIÓN COMO PARTE DEL PROCESO FORMATIVO</i> .....	22
1.3.1. Importancia de la retroalimentación en la comunicación .....	23
1.3.2. Retroalimentación en la comunicación pedagógica .....	24
1.3.3. Retroalimentación en la formación docente .....	24
1.3.4. Retroalimentación en un sistema de Microenseñanza.....	25
1.3.5. La retroalimentación como una herramienta en el estudio chileno .....	27
<i>1.4. UNA REFLEXIÓN FINAL SOBRE EL TEMA</i> .....	28
<b>2. PIAGET: EL DESARROLLO COGNITIVO</b> .....	31
<i>2.1. DESCRIPCIÓN DE LOS ESTADIOS</i> .....	33
2.1.1. Estadio sensorio motor (0-2 años).....	33
2.1.2. Estadio preoperatorio (2-7 años).....	33
2.1.3. Estadio de las operaciones concretas (7 -11 años) .....	34
2.1.4. Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante).....	35

2.2. CARACTERÍSTICAS DEL ESTADIO DE LAS OPERACIONES FORMALES.....	35
2.2.1. Propiedad funcional .....	35
2.2.2. Propiedad formal .....	38
2.2.3. El razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales .....	40
<b>3. EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL .....</b>	<b>43</b>
3.1. ALGUNAS DEFINICIONES.....	43
3.1.1. Los distintos problemas de razonamiento proporcional .....	45
3.1.2. Tipos de problemas de comparación de razones .....	47
3.2. EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN LOS MATERIALES DIRIGIDOS AL DOCENTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA .....	49
3.2.1. Conceptos.....	53
3.2.2. Enfoques didácticos para la proporcionalidad.....	55
<b>4. METODOLOGÍA.....</b>	<b>59</b>
4.1. PARTICIPANTES.....	60
4.2. TÉCNICA.....	61
4.3. INSTRUMENTO .....	61
4.3.1. Contextos.....	62
4.3.2. Estructuras numéricas .....	64
4.4. CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS .....	65
4.4.1. Centraciones.....	66
4.4.2. Relaciones .....	68
4.4.3. Estrategias compuestas.....	72
4.4.4. Clasificación según el estatus de corrección .....	73
4.5. NIVELES DE DIFICULTAD .....	76
4.6. TÉCNICA Y MATERIALES PARA LA SEGUNDA ENTREVISTA.....	76
4.7. PROCEDIMIENTO .....	79
4.7.1. Procedimiento en la primera entrevista.....	80
4.7.2. Procedimiento en la segunda entrevista .....	81
4.8. METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	83
4.8.1. Metodología para el análisis cuantitativo .....	84
4.8.2. Comportamiento de acuerdo al nivel de dificultad .....	85
4.8.3. Análisis cualitativo de la primera entrevista .....	88

4.8.4. Análisis de la segunda entrevista.....	89
<b>5. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>	<b>91</b>
5.1. <i>RESULTADOS POR NIVELES DE DIFICULTAD Y POR CONTEXTO</i> .....	91
5.1.1. Resultados por niveles de dificultad.....	91
5.1.2. Resultados por contextos .....	93
5.2. <i>CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS SOBRE LAS ENTREVISTAS y SOBRE LA PRESENTACIÓN DE RESULTADOS</i> .....	93
5.3. <i>MAESTRA M1</i> .....	97
5.3.1. Primera entrevista.....	97
5.3.2. Segunda entrevista .....	100
5.3.3. Análisis global .....	106
5.4. <i>MAESTRA M2</i> .....	107
5.4.1. Primera entrevista.....	108
5.4.2. Segunda entrevista .....	113
5.4.3. Análisis global .....	120
5.5. <i>MAESTRA M3</i> .....	122
5.5.1. Primera entrevista.....	122
5.5.2. Segunda entrevista .....	128
5.5.3. Análisis global .....	135
5.6. <i>MAESTRA M4</i> .....	136
5.6.1. Primera entrevista.....	137
5.6.2. Segunda entrevista .....	140
5.6.3. Análisis global .....	146
5.7. <i>MAESTRA M5</i> .....	148
5.7.1. Primera entrevista.....	149
5.7.2. Segunda entrevista .....	153
5.7.3. Análisis global .....	157
5.8. <i>VISIÓN GLOBAL</i> .....	158
5.8.1. Análisis global de la primera entrevista.....	158
5.8.2. Análisis global de la segunda entrevista .....	160
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>163</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>177</b>

<b>ANEXOS</b> .....	179
<b>ANEXO 1</b> .....	180
<b>ANEXO 2</b> .....	184
<b>ANEXO 3</b> .....	185
<b>ANEXO 4</b> .....	188
<b>ANEXO 5</b> .....	198
<b>ANEXO 6</b> .....	201

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo fue conocer las estrategias que utilizan cinco maestras de Educación Primaria al resolver ciertos problemas de razonamiento proporcional y darles una retroalimentación al respecto. Para ello se aborda primero un marco teórico, en donde se estudian antecedentes desde varias perspectivas (Formación y Actualización del docente en Educación Primaria, función de la retroalimentación en la formación del docente, Desarrollo Cognitivo según Piaget y Razonamiento Proporcional). Se plantearon a cinco docentes varios problemas de comparación de razones, originados en una investigación previa (Alatorre, 2004) y se analizaron sus respuestas de acuerdo con esa misma metodología, clasificándolas en varias categorías de estrategias. Para la segunda entrevista, en la que se les dio una retroalimentación, se planteó un protocolo específico.

Una vez que se identificaron las estrategias empleadas por los cinco sujetos se analizaron por niveles de dificultad, por contextos y por sujeto. Este trabajo se ocupa de analizar los resultados obtenidos por sujeto. Los resultados analizados por niveles de dificultad y contextos se presentan en Flores (2010).

En general, se lograron los objetivos planteados para la retroalimentación sobre las estrategias aplicables a estos problemas. El trabajo culmina con una propuesta de estrategia didáctica para la formación de los docentes, así como para la enseñanza de temas de razón y proporción en primaria.



# INTRODUCCIÓN

El informe que se presenta es un estudio realizado con cinco maestras de nivel primaria, estructurado en dos partes, cada una de las cuales se basa en una entrevista. En la primera parte se exploró el tipo de estrategias que utiliza cada maestra al resolver problemas que implican para su resolución correcta la utilización del razonamiento proporcional; estos problemas son de comparación de razones, y fueron retomados del instrumento de la tesis doctoral de Alatorre (2004). La segunda entrevista consistió básicamente en una retroalimentación dada a cada una de las maestras entrevistadas; para ello se presentó a las maestras las estrategias aplicables para resolver correctamente los problemas que se les habían planteado, así como algunas estrategias incorrectas comunes. Posteriormente se le mostró a cada una las respuestas que había dado y se le invitó a dar nuevas respuestas cuando la estrategia que había utilizado había sido incorrecta.

El tema de razonamiento proporcional es de gran importancia en el nivel primaria, no sólo porque con él se cierra la educación matemática en este nivel, sino también por ser un contenido básico para que los alumnos puedan continuar el aprendizaje de contenidos matemáticos y también de las ciencias naturales, entre ellos los de la física y la química, en el nivel de secundaria.

El hecho de que en esta investigación a quien se considera relevante estudiar sea a los maestros, se debe a que son éstos quienes al transmitir ciertas estrategias a sus alumnos, pueden llegar a hacerlo de manera incorrecta o no considerar todas las alternativas o generar confusiones que puedan llegar a presentárseles a ellos y a los mismos alumnos. Por ello, las estrategias correctas e incorrectas utilizadas por el docente al resolver problemas de comparación de razones pueden ser un indicador del dominio que tenga de este contenido y podría llegar a suponerse que también es la manera en que lo transmite a sus alumnos. Por lo tanto es importante hacer estudios que arrojen información acerca de este tema.

El análisis de la formación que el docente ha recibido a lo largo de su preparación sobre qué estrategias utilizar para el proceso de enseñanza de este tema puede determinar el porqué del uso más frecuente de ciertas estrategias y también contribuir a mostrar ciertos sesgos en su formación tanto inicial como continua. Pero a la vez, los resultados pueden permitir vislumbrar alternativas didácticas para la enseñanza de problemas que requieran de un razonamiento proporcional.

Para identificar las estrategias usadas por estas maestras, se les realizó una entrevista semiestructurada basada en cinco contextos diferentes, con la posibilidad de presentarles por cada contexto trece diferentes arreglos numéricos que tienen distintos niveles de dificultad. Aunque tanto los contextos como los arreglos numéricos se explicarán con detalle más adelante, aquí se puede plantear un ejemplo. En una tarjeta se presentan sendos dibujos de dos jarras (A y B) en las que se confecciona agua de jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua, por ejemplo en la A se mezclan dos vasos de concentrado con uno de agua, y en la B se mezclan tres vasos de concentrado con dos de agua. Se pregunta entonces: ¿en cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor? Para responder a esta pregunta el sujeto elige una de las tres opciones de respuesta, lado A, lado B o da igual, y después explica por qué eligió esa opción. Es decir lo que se necesitó para esta primera parte de la investigación era que las maestras justificaran su elección; esta justificación permitió conocer qué estrategia habían utilizado. Para este análisis se utilizó la videograbación de sus procedimientos.

La justificación de las respuestas fue la forma por medio de la cual se determinó el tipo de estrategia que las maestras estaban utilizando (análisis cualitativo) según la clasificación determinada por Alatorre (2004). Estas estrategias a su vez fueron clasificadas según un estatus de corrección mediante el cual se asignan puntos, lo que da pie a un análisis cuantitativo.

Para la segunda parte de esta investigación se les proporcionó una explicación sobre los tipos de estrategias aplicables en los problemas de

comparación de razones, según Alatorre (2004). Posteriormente se les proyectaron las respuestas incorrectas o incompletas que dieron durante su primera entrevista, para que ellas mismas consiguieran corregir su respuesta. Como en el caso de la primera entrevista, todo lo que sucedió en la segunda parte fue videograbada para realizar un análisis.

## **Justificación y objetivos**

Las razones que motivan a realizar esta investigación son las siguientes:

- La importancia de la construcción de nociones relacionadas con el tema de proporcionalidad en educación primaria y su valor para adquirir otros conocimientos en niveles subsecuentes.
- El conocimiento del contenido matemático por parte del docente como una posible variable para llegar a una mejor comprensión de procesos de enseñanza-aprendizaje de nociones que lleven a desarrollar un razonamiento proporcional.
- La relevancia de conocer las estrategias que usa el docente considerándolas como parte de sus conocimientos para resolver problemas de comparación de razones que requieren un razonamiento proporcional, involucrando por tanto su formación inicial y su formación continua.

Los argumentos que fundamentan estos motivos son:

Se debe considerar que la aplicación del razonamiento proporcional para la resolución de muchos problemas se presenta en la vida diaria de las personas; por ejemplo, en los precios de productos, porcentajes, recetas de cocina, etc., que a pesar de la frecuencia de su uso, son generalmente formas de razonamiento cuya enseñanza está enfocada de forma mecánica al algoritmo de la regla de tres (SEP, 1992).

Hay por tanto temas sobre matemáticas que se inician en educación primaria y cuyo éxito de aprendizaje en este nivel permitirá al estudiante avanzar en la comprensión de conceptos con los que se enfrentará en los siguientes niveles educativos. Esto es lo que sucede con nociones como razón y proporción, los cuales se pretende desarrollar en los niños en primaria y que resultan ser un cimiento para la adquisición de futuros conceptos fundamentales en su aprendizaje.

La incompreensión de temas como razón y proporción contribuye al mal empleo de conocimientos de la aritmética escolar, como el manejo de problemas multiplicativos (Ruiz y Lupiáñez, 2009). Así mismo contribuye a distorsionar y delimitar conceptos que se abordan en secundaria y en el nivel medio superior, que suelen ser más formales, como en el caso de la Física en secundaria, en donde se usan fórmulas que están basadas en una suposición de proporcionalidad. Por ejemplo, “el alargamiento de una barra de metal es proporcional al cambio de su temperatura” (SEP, 1992). En el nivel medio superior, un caso en el que la proporcionalidad tiene una aplicación es el estudio de funciones.

En el Libro de Texto de la SEP de matemáticas para sexto grado de primaria (SEP, 2001) el tema de proporcionalidad es uno de los más frecuentes, lo cual refleja su relevancia como tema fundamental para abordar en clase.

El conocimiento específico que posean los docentes sobre estrategias para problemas que requieren resolverse correctamente con este razonamiento no sólo afecta el nivel de comprensión y aprendizaje de sus alumnos, sino también la forma en que el docente razona y transmite dichas estrategias en el aula. Por tanto se pensaría que entre más conocimientos posea un docente sobre estrategias para este tipo de problemas le resultaría más fácil resolverlos y así mismo enseñarlos.

Convendría que los docentes reflexionaran acerca de cómo ellos mismos enfrentan y resuelven problemas que requieren de un razonamiento proporcional,

si como lo hacen es correcto o no, y que conozcan otras estrategias para resolverlos.

Morales y Roldán (2007) argumentan que es indispensable que el docente que imparte a nivel primaria conozca y use diferentes estrategias de solución como parte de su conocimiento del contenido. Argumentan que para evitar el fracaso escolar del estudiante, un maestro debe considerar las diferencias cognitivas de cada sujeto partiendo del conocimiento de diversas estrategias que es posible utilizar al resolver problemas de comparación de razones, para lo cual es indispensable que el docente, sin importar el nivel que atienda, conozca y use diferentes estrategias de solución como parte de su conocimiento del contenido.

Como los conocimientos del docente sobre estrategias para resolver este tipo de problemas son un factor sobre el éxito de la enseñanza de este tema en primaria, es importante considerar la formación que para dicho contenido ha recibido el docente en su formación inicial y actualización permanente.

En esta investigación se le da un papel primordial al conocimiento del docente, ya que sus conocimientos pueden ser un factor que ayude a explicar por qué muchas iniciativas para la mejora en la calidad de la educación no han dado buenos resultados y que se mejore la formación matemática de los estudiantes.

“Los profesores son, por tanto, agentes imprescindibles para modificar pautas culturales que reproducen el modelo de enseñanza tradicional y para ignorar o abordar los problemas que dicho modelo genera” (Porlán, 2001, pág.9).

El objetivo general del trabajo es conocer las estrategias usadas por los maestros al resolver problemas de comparación de razones en cinco contextos diferentes, darles una retroalimentación al respecto, y a partir de ello hacer propuestas para el tratamiento didáctico del tema.

Por contexto se entiende: la “historia” que acompaña un problema matemático, como en el caso del agua de jamaica citado arriba.

Por otra parte, los objetivos específicos de la investigación son:

- Identificar el tipo de respuestas por maestra, según la clasificación de Alatorre (2004).
- Hacer con cada maestro un proceso de intervención basado en una retroalimentación sobre sus respuestas.
- Registrar la reacción de las maestras al conocer algunos tipos de estrategias aplicables a los problemas de comparación de razones.
- Realizar la comparación a nivel cualitativo entre algunas respuestas incorrectas de la primera sesión y las respuestas dadas por las maestras en la segunda sesión.

## **Organización del documento**

La tesis está organizada en un resumen, un apartado introductorio donde se incluyen la justificación y los objetivos de la investigación y en cinco capítulos más, de los cuales los tres primeros conforman perspectivas sobre el marco teórico utilizado.

En el Capítulo 1, se presentan los temas de formación inicial y continua de los maestros de primaria de México sobre todo en lo referido a los contenidos de matemáticas. De igual forma se abordan las categorías de Shulman (1986) sobre el manejo del contenido por parte del profesor, y por último se analizan aspectos de la formación que los docentes han recibido del contenido de proporcionalidad desde su preparación como docentes hasta su actualización. En la parte final de este capítulo se presenta una investigación realizada por investigadores chilenos sobre la función de la retroalimentación en la formación del docente.

En el Capítulo 2, se aborda la teoría de Piaget en cuanto al desarrollo cognitivo del sujeto, abarcando los cuatro estadios o períodos de desarrollo y

enfaticando el razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales.

En el Capítulo 3 se habla sobre el tema de razonamiento proporcional. Se revisan algunas definiciones sobre este tema, se abordan los distintos problemas de razonamiento proporcional, y las dos formas de clasificación de los problemas de comparación de razones: 1) por contexto: problemas de tasas y problemas de mezcla simple o probabilística y 2) por la estructura numérica. También se abordan los materiales que han sido dirigidos al docente de educación primaria sobre el razonamiento proporcional y los enfoques didácticos para este tema.

En el Capítulo 4 se presenta el método que se usó en la investigación con las maestras de educación primaria para las dos entrevistas realizadas. Para la primera entrevista se presenta la técnica que se llevó a cabo, así como las características del instrumento y la forma en que se utilizó (Alatorre, 2004). Además se presenta la clasificación de las estrategias, el estatus de corrección de éstas y los niveles de dificultad de las estructuras numéricas. También se indica en este capítulo la metodología de análisis de resultados de cada maestra iniciando con la clasificación de sus respuestas en estrategias y con la puntuación correspondiente según Alatorre (1994, 2004). A partir de esos resultados se hace un análisis cuantitativo que lleva a clasificar las respuestas según la forma general del comportamiento de los sujetos y un segundo análisis que se realizó de forma cualitativa. En cuanto a la segunda entrevista, se organizó en tres partes: primero una explicación sobre las estrategias aplicables para este tipo de problemas, luego una proyección de una versión editada de su primera entrevista durante la que le pidió una nueva respuesta a algunas preguntas, y finalmente un comentario sobre la enseñanza de estos problemas.

En el Capítulo 5 se expone de manera breve los resultados sobre el efecto de los distintos niveles de dificultad y de los distintos contextos en las respuestas dadas por las docentes, presentados en Flores (2010). Estos resultados se muestran porque forman parte de esta investigación. Posteriormente se presentan los resultados de ambas entrevistas realizadas con cada maestra, expuestos en

tres momentos. En el primero se exponen las estrategias que las docentes utilizaron durante sus primeras entrevistas analizadas de forma cualitativa y cuantitativa. En un segundo momento, se presenta lo acontecido en la segunda entrevista y por último se expone un análisis global de ambas entrevistas realizadas. Finalmente se cierra este capítulo con una visión global de las dos sesiones realizadas a las docentes.

Por último se exponen a manera de conclusión diversas reflexiones. En primer lugar se retoman los resultados del análisis efectuado por Flores (2010) en cuanto a las diferencias en los resultados obtenidos por estas docentes entre los distintos contextos y entre los distintos niveles de dificultad, aunque ahora se hace mayor énfasis en lo que respecta a cada una de las docentes. En segundo lugar se resume las estrategias utilizadas por las docentes, tanto las incorrectas como las correctas; aquí se enfatiza el uso (a veces sólo parcialmente correcto) de la estrategia que Alatorre (2004) ha denominado “estrategia de igualación”. Posteriormente se hace un análisis global de la sesión de retroalimentación y del efecto que tuvo en las maestras. En seguida se habla de la implicación de la teoría Piagetiana dentro de esta investigación. Finalmente, se hace una propuesta para la enseñanza del tema basada justamente en la estrategia de igualación; como esta estrategia puede servir tanto para los alumnos de la primaria como para los docentes, esto lleva a sugerencias acerca de los procesos de formación inicial o continua de los maestros.



# **CAPÍTULO 1. FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS DEL DOCENTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

En este capítulo se habla sobre la formación inicial y actualización de maestros de educación primaria en México. En primer lugar, como referencia, se mencionará lo que señala la Secretaría de Educación Pública (SEP) a través de varios documentos sobre formación inicial y actualización magisterial para la enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, se mencionan aspectos de formación en matemáticas para un desarrollo profesional del docente en el conocimiento del contenido matemático. En tercer lugar, se verán aspectos de la formación que los docentes han recibido con respecto al contenido de proporcionalidad desde su preparación como docentes hasta su actualización. En el último apartado se plantea una reflexión sobre los aspectos anteriormente mencionados.

## **1.1 Formación y actualización docente en matemáticas**

El Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica del Sistema Educativo Mexicano (ANMEB) en 1992, fue una reacción ante el evidente y progresivo deterioro de los logros educativos del país. En dicho Acuerdo el papel del docente se visualizó como factor protagónico para realizar un cambio en los procesos y resultados de la educación. Con esto se generó una transformación de nuevas dimensiones para la educación básica. Uno de los factores directamente afectados fue la formación inicial de maestros; la consecuencia inmediata se observó con la aparición de la propuesta de trabajo pedagógico de enfoque constructivista (Zorrilla, 2002).

Este autor dice que para lograr una práctica pedagógica desde el constructivismo, se reformularon planes y programas para la educación primaria,

se diseñaron libros de texto gratuitos, se produjeron materiales de apoyo para las tareas docentes y se implementaron nuevos modelos para la formación inicial y permanente del profesorado, en los que se presenta y se propone discutir elementos teóricos y metodológicos, que siguen actualmente vigentes.

Latapí (2003) coincide con Zorrilla en que, desde una perspectiva nacional, la formación y la actualización del magisterio han sido temas en Programas Sectoriales de la SEP y aún así, no se han hallado soluciones satisfactorias para realizar el cambio en los procesos y resultados de la educación.

Actualmente, en el Programa Sectorial de Educación 2007-2012 (SEP, 2007), se puntualiza que para mejorar la calidad de la educación, se requiere de la capacitación de los docentes. Para el caso de la enseñanza de las matemáticas también se plantea el aumento de docentes capacitados y de la creación de materiales, así como de talleres para mejorar la calidad de su enseñanza de esta disciplina.

Se enfatiza por tanto, a través de la actualización de programas de estudios y sus contenidos, la mejora en los procesos de formación y capacitación docente en matemáticas. Esto debe fundamentarse en las necesidades de los docentes, siempre respondiendo a los objetivos del currículo de educación primaria. Lo anterior se refleja, por ejemplo, en las intenciones de la formación inicial y la actualización del magisterio.

El objetivo de la formación inicial del futuro docente es prepararlo con habilidades intelectuales y competencias profesionales que le permitan conocer e interpretar las principales características del medio, su influencia en la educación de los niños, los recursos que pueden aprovecharse y las limitaciones que impone; este conocimiento será la base para adaptar los contenidos educativos y las formas de trabajo a los requerimientos particulares de cada región (SEP, 2002a).

Para la actualización del docente, la Coordinación General de Actualización y Capacitación para Maestros de Educación Básica en Servicio dirige un conjunto

de actividades formativas destinadas a los profesores en servicio, en funciones docentes, directivas o de apoyo técnico-pedagógico. Con dichas actividades, se persigue poner al día y promover la adquisición del conjunto de saberes profesionales necesarios para mejorar su práctica y generar una enseñanza de calidad. Los saberes profesionales para enseñar son los contenidos, las disciplinas, los enfoques y los métodos de enseñanza, las habilidades didácticas y el desarrollo de los valores y las actitudes que permiten sostener una labor docente o directiva enfocada en el aprendizaje y la formación de los alumnos, además del desarrollo personal de las habilidades intelectuales básicas para el estudio autónomo y la comunicación (SEP, 2003).

Por tanto se considera a la formación inicial, la actualización y el desarrollo profesional de los docentes como factores en proyectos para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares. Martínez (2006) señala que los tres factores anteriormente mencionados se han cuestionado por su insuficiente impacto en el desarrollo del conocimiento profesional necesario en los docentes y para mejorar su práctica, así como la enseñanza de las matemáticas.

Martínez agrega que generalmente se considera innecesario tener un conocimiento profesional muy profundo para enseñar las matemáticas elementales. Visualizarlo así genera en los docentes una práctica empírica e intuitiva de esta disciplina, en la que se enfatizan los aprendizajes superficiales y no los fundamentales. Así mismo este autor coincide con Rico (citado en Martínez, 2006), quien argumenta que la mala organización y el carácter estructural de la formación de profesores de matemáticas repercuten en la calidad de la enseñanza que reciben los escolares y afecta el nivel cultural, científico y técnico de los ciudadanos.

Thurston, Grant y Topping (citados en Ruiz y Lupiáñez, 2009) señalan que al sumar los escasos conocimientos sobre ciencias de algunos docentes en la escuela primaria con la poca confianza que tienen para impartir estas materias, se obtiene una combinación que indudablemente influye en la manera en que el estudiante enfrenta el aprendizaje.

### 1.1.1 Formación inicial del docente en matemáticas

En esta parte de la formación del docente sólo se hace mención al plan de estudios 1997 de la Licenciatura en Educación Primaria de la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM), ya que no hay un programa unificado en las escuelas normales del país. En este plan están designados dos cursos llamados Matemáticas y su Enseñanza I y II para el segundo y tercer semestres. Cada uno de estos cursos cuenta con cuatro bloques temáticos y un total de 108 horas, que se imparten en 6 horas por semana (SEP, 2002b).

Los cursos se relacionan con los contenidos de matemáticas de educación a nivel primaria, y el temario se muestra a continuación:

#### Matemáticas y su Enseñanza I

Bloque I. Aprender matemáticas al resolver problemas

Bloque II. Los números naturales y el sistema decimal de numeración

Bloque III. Las cuatro operaciones básicas con números naturales

Bloque IV. La geometría

#### Matemáticas y su Enseñanza II

Bloque I. La medición

Bloque II. Los números racionales

Bloque III. Procesos de cambio

Bloque IV. Tratamiento de la información, predicción y azar

Estos cursos están organizados en torno a los contenidos de matemáticas del currículo de educación primaria. En SEP (1998) se propone que el tiempo para su estudio se distribuya en seis horas semanales en tres sesiones de dos horas,

ocupando el mayor tiempo posible en sesiones de taller. En ellas se trabaja en equipos, realizando actividades como resolver o analizar situaciones problemáticas, en las cuales se pretende que los estudiantes amplíen y profundicen su conocimiento matemático, elaboren procedimientos de solución de problemas, no necesariamente formales, y que analicen procedimientos empleados por los niños.

Los bloques de los cursos establecen dos tipos de contenidos: los dirigidos a la formación en matemáticas del estudiante para profesor y los destinados a reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria, su sentido y su estructura. En los cursos se separan los propósitos de la formación matemática del profesor de aquellos de reflexión acerca de la enseñanza a los niños. El propósito de la formación de los próximos maestros pretende ofrecer oportunidades para profundizar y consolidar los conocimientos básicos acerca de las matemáticas (sobre los contenidos básicos de la disciplina) con el fin de que el estudiante logre reconocer y estructure los contenidos de primaria y secundaria.

Por cada bloque se sugiere bibliografía, material de audioteca y videoteca de la escuela normal.

A los alumnos se les proporciona, para estos cursos de matemáticas, un paquete didáctico de tres libros titulados "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Este paquete didáctico de Matemáticas es componente del Programa Nacional de Actualización Permanente para maestros de educación básica en servicio, elaborados por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 1995). Los materiales que en él se incluyen son destinados a maestros que laboran en los planteles de educación primaria de los distintos niveles, grados y asignaturas. Los maestros que obtengan la acreditación del curso que corresponde a este paquete didáctico de Matemáticas verán su efecto indirecto en el puntaje para la Carrera Magisterial y otros mecanismos de estímulo profesional.

La evaluación de los alumnos en la BENM considera por igual los aprendizajes de los contenidos que conforman cada bloque; los referidos a las matemáticas y los relativos a la enseñanza y aprendizaje en la primaria.

Al evaluar los aprendizajes de los alumnos en los contenidos de matemáticas se espera que ellos puedan utilizarlos en la resolución de problemas, que los definan y que expresen explícitamente sus propiedades.

Con respecto a la evaluación de la enseñanza y aprendizaje en primaria, se espera que los alumnos den ejemplos variados de situaciones didácticas relativas a diversas nociones matemáticas, utilizando variables que los hagan complejos o simples dependiendo de los grados escolares y que logren anticipar procedimientos que sean más probables que utilicen los niños de primaria frente a esas situaciones, así como los posibles errores.

Se pretende, a través de estos cursos, que los alumnos logren los siguientes propósitos:

- Consolidar el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprender los distintos significados que adquieren al aplicarlos en situaciones diversas y en resolución de problemas.
- Conocer las características del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que enfatiza la construcción de significados a partir de la resolución de situaciones problemáticas.
- Conocer y aplicar elementos de didáctica de las matemáticas para analizar situaciones de enseñanza y su relación con los procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en los niños.

Algunos autores plantean críticas sobre esta primera etapa de preparación del magisterio. Por una parte se han manejado como insatisfactorios o incompletos algunos de los requisitos de ingreso a la formación. En los requisitos de ingreso no se tiene como objetivo conocer el perfil vocacional del aspirante, ni

sus conocimientos previos disciplinares. Valiente (1998, pág. 58) señala que es muy importante que estos elementos se tomen en cuenta, debido a que “las últimas generaciones de alumnos aceptados en nuestras escuelas formadoras de docentes son bachilleres que carecen del antecedente pedagógico obligado, cosa que es un verdadero lastre pues tampoco traen consigo un bagaje estándar de conocimientos matemáticos de los cuales partir con buen nivel”.

Esta observación va en el mismo sentido de Fullan y Hargraves (citados en Martínez, 2006), quienes señalan que el requisito más difícil de los lineamientos que un docente comprometido con el cambio educativo debe seguir es el referido a la vocación; para estos autores este factor es de suma importancia en la tarea educativa, más que en otras profesiones.

Por otra parte hay también una serie de cuestionamientos a los materiales de apoyo diseñados para apoyar a los docentes. Valiente (1998) señala que los materiales no indican al docente cómo construir en forma práctica el conocimiento, no proporcionan ejemplos comprensibles, ni se dice cómo realizar un avance, un plan, ni qué recursos utilizar. Asimismo, comenta que la bibliografía propuesta es de difícil acceso y algunos libros contienen información sobre formación matemática que no concuerda con el modelo constructivista.

Por lo tanto si los cursos de Matemáticas y su Enseñanza I y II establecen como propósito general que los estudiantes para maestro tengan oportunidades de profundizar y consolidar el conocimiento que tienen de las matemáticas, resulta difícil de creer que se llegue a cumplir satisfactoriamente este propósito, por el poco tiempo asignado para estudiarlas. Se debe considerar también la carga requerida para atender las otras materias, lo cual dificulta aún más consolidar los conocimientos matemáticos que se requieren para enseñar esta disciplina.

### *1.1.2 Actualización docente en servicio. El caso de las matemáticas*

A partir del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica se generaron modelos de formación permanente del profesorado. El objetivo es

que éste logre una práctica constructivista a través de programas y cursos de instancias muy diferentes, entre ellas escuelas normales de diversos tipos, universidades pedagógicas, instituciones universitarias, sistemas a distancia, dependencias federales y estatales e instituciones privadas. Sin embargo la principal instancia para esta instrumentación son los Centros de Capacitación y Actualización del Magisterio (CECAM). El docente no está obligado a tomar los cursos y muchas veces su elección se dirige más a lograr puntajes, acomodarse a sus horarios, cumplir con un requisito, y no a su actualización y mejoramiento de su práctica. Este sistema se encuentra directamente vinculado con el esquema de carrera magisterial.

Algunas de las críticas u opiniones que han manifestado diversos autores acerca del sistema de actualización docente en servicio se listan a continuación:

- Algunos programas de actualización y fortalecimiento académico, como el Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales y el Programa Nacional para la Actualización Permanente de los Maestros de Educación Básica en Servicio (Pronap), se han cuestionado debido a que ofrecen objetivos restringidos (Latapí, 2003).
- Los programas de actualización y su enfoque tienen un escaso impacto sobre la docencia y la calidad de la educación. Por ello se requiere revisarlos a la luz de las experiencias y evaluaciones (Bransford, citado en Latapí, 2003).
- Los cursos del sistema de actualización no abordan contenidos de interés para la enseñanza de las matemáticas, ni las necesidades de los profesores, y mucho menos la problemática de su implantación en el aula. Este sistema funciona para mejorar los ingresos del magisterio y no como un sistema de evaluación; además, no existe evidencia de que influya en el mejoramiento de prácticas docentes ni, por tanto, en la calidad de la educación (Martínez, 2006).



- Los cursos de instancias oficiales para la capacitación y actualización del profesorado incurren en los siguientes errores: 1) la selección de temas es realizada por personas que no son las que van a recibir la formación; 2) en pocos casos, las ideas y las prácticas implementadas tienen un seguimiento; 3) los cursos tratan raramente las necesidades y preocupaciones individuales de los participantes; 4) no hay un reconocimiento general de las diferencias en las dimensiones positivas y negativas en el sistema al que han de regresar pues en los cursos participan docentes de escuelas o zonas muy distintas; y 5) no existen bases conceptuales para planear y ejecutar cursos que aseguren su efectividad (Fullan, citado en Martínez, 2006).

Al hablar de actualización docente se debe reflexionar sobre las formas en las que aprende el maestro, pues lo hace continuamente, ya que para su profesión necesita constantes renovaciones en las disciplinas que enseña, tanto para su difusión como para su apropiación. Debe considerarse como un proceso permanente, para que el docente realmente logre consolidar estos conocimientos.

¿Cómo aprenden los maestros? Al respecto, Latapí (2003) señala que el docente debe empezar por analizar sus propias necesidades de aprendizaje, lo cual contribuiría a elegir una oportunidad de actualización, que no fuera con el objetivo de un puntaje sino por la posibilidad de crecimiento profesional. Por su parte, Llinares (1996) considera que es importante, al hablar de actualización en matemáticas, considerar el conocimiento, las concepciones, las creencias y los procesos de pensamiento de los profesores como un punto de referencia desde la psicología cognitiva.

## 1.2 Tipos de conocimientos del docente

En esta sección se tratará, por una parte, la visión de Shulman (1986) acerca de los conocimientos de los maestros y, por otra, más específicamente lo referente al conocimiento que según la SEP tienen los maestros acerca de los contenidos sobre proporcionalidad.

### 1.2.1 Las categorías de Shulman

En la literatura se habla sobre la carencia en el manejo del contenido en la formación del profesor. En su artículo clásico sobre el tema, Shulman (1986) señala que la persona que enseña contenidos debe demostrar conocimiento de dicho contenido como requisito de la enseñanza. Por tal razón, resulta importante conocer cuáles son las fuentes de conocimiento de los maestros, por ejemplo, las estrategias de resolución de problemas, cómo llegó a adquirir tal conocimiento y cómo lo usa en su práctica diaria.

Así mismo, Shulman realiza las siguientes preguntas que según él tienen que ver con el conocimiento de contenido del docente:

¿Cómo el contenido se ha transformado desde el conocimiento del maestro en el conocimiento que se enseña?

¿Cómo las formulaciones particulares de ese contenido se relacionan con lo que los estudiantes llegan a conocer? ¿Cómo lo construyen equivocadamente?

Shulman llamó a la ausencia de un enfoque de contenido el problema del “paradigma perdido”. No obstante indica que el énfasis actual está en cómo los maestros administran aulas, organizan actividades, estructuran tareas, etc. Plantea que no hay referencias acerca del contenido de las lecciones que se enseñan, comenta que desde la formación inicial y profesional de los maestros surgen preguntas como ¿de dónde vienen las explicaciones que dan los maestros? ¿Cómo es que los maestros deciden qué enseñar, cómo lo

representan, cómo se les puede preguntar a los maestros acerca de ello y cómo trabajar con problemas de mal entendimiento? Indica que estas preguntas se plantean pero desde la perspectiva de los aprendices. Shulman aclara que su investigación no intenta denigrar la importancia del conocimiento de la comprensión pedagógica o la habilidad en el desarrollo de un maestro, sólo que para juntar estos aspectos de las capacidades de un maestro se requiere considerar tanto los aspectos del contenido de la enseñanza, como la atención dada a los procesos de enseñanza.

Distingue para este fin tres categorías de conocimiento de contenido:

- a) El conocimiento del contenido matemático (MCK, por sus siglas en inglés). Este conocimiento implica la organización del contenido en la mente del maestro, lo que implica mucho más del mero conocimiento de los hechos y los conceptos del campo. Este conocimiento requiere de la comprensión de las estructuras sustantivas y sintácticas de la materia: las estructuras sustantivas son las diversas maneras en que los conceptos básicos y los principios de la disciplina se organizan para incorporar hechos, y las estructuras sintácticas son el conjunto de maneras en las que se establece si algo es cierto o falso, válido o no válido (Schwab, citado en Shulman, 1986).
- b) El conocimiento del contenido pedagógico (PCK, por sus siglas en inglés). Habla de la forma particular del conocimiento del contenido que toma parte en los aspectos más relacionados con su enseñanza. Se incluyen temas que regularmente se enseñan más en el área que se imparte, las formas más útiles de representar estas ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, etc. Es decir, se habla de las maneras de representar y formular el tema para que otros lo comprendan. También aborda lo que hace al aprendizaje de un determinado tema fácil o difícil, las diversas estrategias para reorganizar el entendimiento de los aprendices, y del mismo modo, cuándo las concepciones y las concepciones previas de

los estudiantes de diferentes edades y procedencias pueden ser o no erróneas.

- c) El conocimiento curricular. Este conocimiento incluye el rango completo de programas designados para la enseñanza de temas particulares en un determinado nivel, sus materiales, sus características e indicaciones para su uso. Estos programas son herramientas de enseñanza que presentan un contenido particular y que evalúan qué tan adecuado es el desempeño de los estudiantes. Por lo tanto se espera que un maestro posea conocimientos de las alternativas que son disponibles para la instrucción, considerando el aspecto vertical de ese conocimiento curricular, es decir los tópicos y temas que han sido y serán enseñados en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela y los materiales que van con ellos.

### *1.2.2 Conocimiento del contenido de proporcionalidad*

El desconocimiento del contenido que enseña el docente es fuente de gran parte de sus limitaciones para diseñar y desarrollar procesos didácticos más significativos (Martínez, 2006). Esto es de gran importancia que se tome en cuenta si se desea mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Durante la formación del docente en la licenciatura de educación primaria, se inicia el estudio del contenido de proporcionalidad en el bloque III “Las cuatro operaciones básicas con números naturales” del curso Las Matemáticas y su Enseñanza I (SEP, 1998). El resto de los tópicos relativos a este tema se encuentran en el curso de Matemáticas y su Enseñanza II (SEP, 2002a). En primer lugar, en el bloque II “Los números racionales” en el apartado sobre multiplicación por una fracción, y posteriormente en el bloque III “Procesos de cambio”, donde se estudian explícitamente situaciones sobre magnitudes proporcionales y se abordan nociones relacionadas como razón, porcentaje y escala. Finalmente se introduce la noción de función y su representación en el

plano cartesiano, y se define la relación de proporcionalidad como una función lineal.

Los propósitos de este último bloque buscan que, a través de sus actividades, los estudiantes:

- Distingan las magnitudes proporcionales de aquellas que no lo son y analicen los procedimientos que se generan en función de las magnitudes o en función de los números que se utilizan.
- Analicen la pertinencia de usar el valor unitario, la regla de tres u otro procedimiento al resolver problemas de proporcionalidad.
- Utilicen e interpreten tablas de dos columnas y gráficas relacionadas con problemas de proporcionalidad.
- Analicen algunos casos de proporcionalidad inversa y de proporcionalidad múltiple.
- Conozcan la relación entre la función lineal y las situaciones de proporcionalidad directa.
- Conozcan el proceso evolutivo del razonamiento de los niños en situaciones de proporcionalidad.
- Conozcan, de manera general, la forma en que las situaciones de proporcionalidad se van haciendo complejas a lo largo de la primaria (SEP, 2002a).

El material designado para este bloque es el Paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte* (SEP, 1995), en el que se abordan los siguientes temas:

- Las magnitudes proporcionales y las magnitudes no proporcionales;

- La variable “magnitudes del mismo tipo-magnitudes distintas” y los procedimientos de solución que se generan (razón interna y razón externa);
- La variable “tipo de números” y los procedimientos que se generan;
- La relación proporcional entre magnitudes de distinto tipo. El caso de las magnitudes derivadas (velocidad, densidad). Cantidades intensivas y cantidades extensivas;
- El porcentaje;
- La proporcionalidad “múltiple”;
- La proporcionalidad “inversa”;
- Los contenidos de proceso de cambio a lo largo de la escuela primaria; y
- El desarrollo de la noción de proporcionalidad en los niños.

### **1.3 La retroalimentación como parte del proceso formativo en docentes: una investigación chilena**

Para obtener información sobre la formación del docente no sólo es necesario realizar un diagnóstico y confirmar que posee los conocimientos básicos para abordar la enseñanza dentro del aula; también es necesario conocer su desenvolvimiento dentro de la misma (Papic y otros, 1986). Para esto entonces se pueden observar dos situaciones: el manejo de los contenidos y la interacción profesor-alumno, lo que incluye características que influyen en el proceso de la comunicación, como los comportamientos verbales, aspectos metodológicos y la interacción no verbal.

Esta observación permite que los maestros conozcan su desempeño en estos aspectos y también conozcan sus fallas. Para ello se emplea una técnica llamada “sesión de retroalimentación o sesión de espejo”, que es vista desde el

proceso de la comunicación pedagógica y en la formación docente, y en la que se tiene como recurso el uso del video, como factor de auto análisis para el desarrollo de las habilidades docentes.

### 1.3.1 Importancia de la retroalimentación en la comunicación

El propósito de la comunicación implica la emisión de un mensaje con la intención de influir o afectar la conducta humana y se establece cuando hay emisor y receptor, en una interacción recíproca (Papic et al. 1986).

El denominado “feedback o retroalimentación” es una parte muy especial de esa interacción. El término proviene específicamente del campo de la cibernética y de la teoría general de sistemas mencionan los autores. La retroalimentación comprueba la efectividad de los mensajes entre un emisor y un receptor, y también reorienta las futuras acciones.

En esta relación de emisor y receptor, existen los siguientes niveles de interacción (*Ibid*):

- Una relación física, que ocurre cuando dos personas están conversando y cada quien está centrada en su propio mensaje.
- Una acción–reacción dentro de la interacción, que ocurre cuando el mensaje enviado tiene como objetivo influir en el comportamiento de otros. La retroalimentación permite determinar si este propósito se está cumpliendo o si se tendría que redireccionar (establecer otro medio para lograr el objetivo).
- Una empatía entre los involucrados en el proceso, que ocurre cuando una de las dos personas infiere los estados internos del otro comparándolos con su propia disposición. Esto se conoce también como “ponerse en el lugar del otro”.
- Una interdependencia, que consiste en una interacción o asunción recíproca de papeles o funciones. El objetivo de la interacción es estar al

mismo nivel con el otro para que ambas personas conozcan sus mutuas necesidades y la comunicación sea un proceso dinámico.

### *1.3.2 Retroalimentación en la comunicación pedagógica*

Como se había mencionado anteriormente, el proceso de la comunicación es la interacción existente entre el emisor y el receptor. Y para el proceso de enseñanza-aprendizaje la comunicación se encuentra en la relación profesor-alumno con el objetivo del aprendizaje de contenidos. Parte de esa interacción es la retroalimentación.

El propósito de la retroalimentación desde el punto de vista del aprendizaje del alumno es la función de “refuerzo” que le permite reconocer su grado de dominio de los contenidos, para cumplir objetivos de aprendizaje. Desde el punto de vista del docente, le permite conocer el desempeño de sus alumnos. Esta interacción que se da dentro del aula le permite al docente reorganizar su comunicación para reforzar al alumno si es necesario.

### *1.3.3 Retroalimentación en la formación docente*

El docente ha sido capacitado para llevar a cabo objetivos, hacer planeaciones de enseñanza-aprendizaje, utilizar diferentes instrumentos de evaluación y emplear algunas técnicas metodológicas. De esta manera se observa que toda su acción se centra en su propia actuación y con esto se podría decir es sólo un informador de contenidos. Por ello es importante tratar de formar docentes que desarrollen sus habilidades y su forma de comunicarse adecuadamente dentro del aula para que logren una interacción efectiva.

El papel que tiene la retroalimentación es conocer la efectividad positiva o negativa de su mensaje, para poder reorientar sus futuras acciones y alcanzar los objetivos establecidos.



En la práctica docente es necesario conocer el desempeño que ha desarrollado y para el maestro, en este caso, la retroalimentación se plantea así: la información que se proporciona a una persona sobre la calidad de su actuación docente (Papic y otros, 1986).

Para que el docente pueda corregir sus deficiencias comunicativas o de conocimiento y manejo de contenidos, se le puede estimular de manera positiva sobre su desempeño o hacerle saber, si es el caso, que debe esforzarse por corregir sus errores.

Otra manera de manifestarle si tiene estas deficiencias es mostrarle “la imagen de sí mismo” que suele ser muy diferente a su propia percepción o a la percibida por otros. En este proceso la retroalimentación le infunde la duda de su propio desempeño, al emitir juicios sobre sus conocimientos, sobre las técnicas empleadas, sobre su desempeño y sobre sus formas de evaluación, entre otras tareas.

#### *1.3.4 Retroalimentación en un sistema de Microenseñanza*

La microenseñanza es un procedimiento de laboratorio, cuyo propósito es simplificar la complejidad del proceso normal en el salón de clases. Y la situación de enseñanza se ve reducida a tiempo y número de alumnos para que el docente pueda practicar capacidades específicas que han sido registradas en diversos instrumentos y permiten la retroalimentación profesor-alumno. También la retroalimentación es vista en la microenseñanza como un proceso para adquirir conductas docentes.

En el caso de la microenseñanza, la retroalimentación se define como “la información que se proporciona a una persona sobre la calidad de su actuación docente” (Ibid) . Este enfoque es para obtener futuros profesores que trabajen sobre objetivos dirigidos a alcanzar un aprendizaje, y contribuye a analizar su comportamiento como docente y la comunicación dentro del aula.

Dentro del proceso de la retroalimentación se pueden utilizar los siguientes elementos (Ibid):

- Hacer un registro de las conductas a observar (por ejemplo la conducta no verbal: cada gesto, expresiones faciales y movimientos corporales que realiza), que sirven para informarle al participante sobre su conducta ante la tarea específica. Se observa también la influencia que ejercen los dichos de terceras personas sobre las acciones del individuo; por otra parte, de forma paralela existe en el individuo la influencia de las circunstancias del medio que lo rodea, y se considera que un ambiente tranquilo crea una comunicación positiva.
- Hacer grabaciones en una cinta de audio, que permita registrar la interacción verbal; por ejemplo, la organización, la autoexpresión y el contenido. Esta grabación permite también que el participante se escuche (aunque al principio puede implicar un factor de desconcierto por el desconocimiento de su propia voz). Pero no cubre la observación de otros aspectos importantes que se están dando dentro del aula o el lugar donde se desarrolle.
- Hacer una videograbación, que permite tener un registro de las actividades desarrolladas. Para el supervisor, presenta como ventajas la observación de la interacción verbal y no verbal dentro del área de trabajo para un análisis, y como desventaja es que podría presentarse un mínimo grado de alteración de docente (que lo inquiete que lo estén grabando).

A través de esto la retroalimentación le permite al participante conocer su comportamiento, tener una percepción de su propia imagen, y le revela qué habilidades tiene o carece: toma conciencia de sí mismo. El reconocimiento de aspectos positivos por el supervisor hace que el docente tenga confianza respecto de lo realizado.

Por otro lado se hace también la observación del hecho de que el supervisor señale comportamientos que considera como inadecuados provoca en el docente inseguridad o inestabilidad. Pero si el supervisor le manifiesta al docente que debe enfrentarlo con confianza, el docente se tranquilizará y manifestará un compromiso de superación. La capacidad de autoanálisis del docente mejora.

En este sentido el supervisor o conductor de la entrevista es un orientador para las conductas futuras que presente el docente. Se puede decir que el video constituye una fuente importante en la retroalimentación.

### *1.3.5 La retroalimentación como una herramienta en el estudio chileno*

Los docentes del Departamento de Tecnología de la Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile, conjuntamente con metodólogos de enseñanza del castellano e idioma extranjero, realizaron una sesión de retroalimentación para medir las habilidades comunicativas en el proceso de enseñanza aprendizaje conducida por un supervisor; las herramientas que utilizaron fueron las pautas de observación y la videograbación (Papic y otros, 1986).

Los aspectos que se registraron fueron:

- Cómo se emite un mensaje (dar instrucciones, preguntar y exponer).
- Cómo se emiten los mensajes no verbales (gestos, movimientos, desplazamientos, tono de voz y silencios).
- Cómo se recibe un mensaje: escuchar activamente (estar atento, demostrar comprensión), crear un ambiente (creer en la persona y en sus posibilidades, aceptar sentimientos, limitaciones y ponerse en el lugar de otro), recibir la retroalimentación (que puede ser con fines de verificación o de refuerzo).

Estos registros se observaron a través de la videograbación, realizada por el propio investigador sin recurrir a servicios técnicos. Se le explicó al participante el objetivo de la sesión de espejo.

En esa sesión, se revisa el video junto con el participante para realizar conjuntamente una observación de su “propia imagen”, para señalarle aspectos relevantes y las deficiencias que manifestaba, con el fin de estimular al docente para que mejore su propia actuación. En este proceso la llamada sesión de espejo o retroalimentación en primera fase logró su objetivo: los docentes tienen la posibilidad de mejorar aquellos errores existentes, así como también perfeccionar los aciertos obtenidos. Colateralmente, la sesión espejo sirve para que el supervisor se observe y corrija desaciertos y afirme aciertos.

En la presente investigación se utilizó una metodología similar a la de la investigación realizada por los chilenos, que se comentará más adelante en el capítulo cuatro.

#### **1.4 Una reflexión final sobre el tema**

El considerar el papel del docente para remediar y mejorar los resultados en la calidad de la educación, debería implicar el análisis de su formación y actualización.

En cuanto al análisis de la formación inicial del docente en matemáticas, se considera importante que los docentes consoliden y profundicen sus conocimientos acerca de las matemáticas, aunque algunos de los medios para cumplirlo lleguen a ser insuficientes. Ejemplo de ello es el número reducido de horas establecidas en los actuales cursos de Matemáticas y su Enseñanza para abarcar el estudio de la propuesta curricular de educación primaria y el material asignado para estudiarlo, agregando que en los semestres en los que se cursan, los estudiantes llevan también cursos para enseñar otras materias. También se ha de considerar que la elaboración del material con el que se pretende preparar a

los futuros docentes no fue destinada a ellos. El paquete didáctico contiene la mayoría de las actividades para el estudio de dichos cursos.

Es de importancia valorar que se pretende utilizar materiales, dirigidos a la actualización docente, para la formación inicial. Sin embargo, no son lo mismo los alumnos de 2° y 3° semestres de la licenciatura de educación primaria que inician precisamente en estos semestres actividades en la escuela primaria (tareas de enseñanza), que los docentes que se encuentran frente a grupo día a día, y que tienen más experiencia y un dominio diferente de la disciplina.

La actualización de los docentes debería tratarse como una preparación necesaria para que los docentes puedan desarrollarse profesionalmente, es decir que les proporcione herramientas y ciertos conocimientos que les ayuden a prepararse a cambios que se den a través del tiempo y no sólo les ayuden a enfrentarse a problemáticas actuales o del pasado. Estos conocimientos deben generarse a través de investigaciones didácticas, de estudios sobre el aprendizaje y de políticas de la educación. Con todo esto no se debe olvidar que no es conveniente sólo considerar estos aspectos, ya que eso lleva a reducir las horas de formación específica de las matemáticas, lo que es una medida incorrecta porque “para transmitir cualquier saber concreto, lo primero de todo es tenerlo” (De la Torre, E., Díaz, y Guerrero, S., 2006).

Algunos puntos de análisis que contribuirían para mejorar la actualización del docente son:

- Considerar que lo aprendido por el docente toma parte en su enseñanza.
- Que el docente reflexionara acerca de los conocimientos que posee y lo que sería importante que conociera, para que le resultara ser más fácil y efectiva su labor de enseñanza.
- Cuáles son las necesidades de aprendizaje sobre las disciplinas que enseña.

- Que el docente reconociera que el conocimiento que posea sobre estrategias de solución de problemas (conocimiento del contenido) puede resarcir obstáculos en los aprendizajes de los estudiantes.

El conocer los puntos anteriores coadyuvaría a elaborar planes y programas de apoyo actualizados para la preparación de los docentes, basados en sus necesidades.

El análisis de la formación y actualización del docente tal vez contribuiría a identificar aspectos relacionados que permitan comprender cómo el estudiante aprende.

## CAPÍTULO 2. PIAGET: EL DESARROLLO COGNITIVO

La psicología del desarrollo plantea que la formación de la inteligencia y el conocimiento tienen una organización a través de estructuras variables en los aspectos motor, social y afectivo, en dimensiones individuales y sociales, las cuales se presentan como una serie de etapas de desarrollo.

El desarrollo orgánico y psíquico del ser humano consiste en una marcha al equilibrio de menor a mayor grado; de ese modo, el desarrollo mental es continuo y pasa por una serie de construcciones que generan estructuras variables con sucesivos equilibrios, los cuales aseguran el paso de un nivel al siguiente. Ahora bien,

La información que surge del exterior (del medio) se integrará en un esquema ya existente en el individuo; a este proceso se le conoce como asimilación de información y, consecutivamente, tiene el objetivo de cambiar los procesos mentales cuando un nuevo objeto o idea no encaja de manera significativa en los esquemas ya existentes. De este modo, con la información recibida del exterior, el individuo tendrá que realizar una modificación en su respuesta-acción frente al(los) objeto(s) o situaciones que enfrenta de manera permanente; a este proceso se le denomina acomodación” (Piaget, 2002).

La teoría que desarrolló Piaget enfatiza que

El conocimiento es un conjunto de informaciones que se interrelacionan haciendo vínculos que permiten almacenarlo, recuperarlo y hacer uso de él. Así, con el modelo de estructura cognoscitiva operatoria se explica la forma de pensar de los individuos operatorios. Por ello se dice que el individuo integra de modo ordenado la información del exterior, la asimila y la usa para dar respuesta ante el objeto, que acomoda el esquema de acción (Piaget, 1978).

La acción que realice un individuo ante un objeto siempre revelará una *necesidad*; esta *necesidad* forzarán un desequilibrio, para posteriormente volver a obtener un equilibrio; cuando esa *necesidad* (del exterior o interior) quede satisfecha, entonces se dirá que el individuo se encuentra en equilibrio.

La teoría de equilibración es el modelo al que Piaget recurre para explicar la forma en que un individuo hace el proceso de adquisición de conocimiento, visto

como un proceso de adaptación con equilibrio. El propósito es, entonces, explicar cómo se producen dichas operaciones.

Estas estructuras de conjunto requieren estar en un sistema de equilibrio, pero para llegar a ese estado de equilibrio, la acción del individuo (mental o motora) tiene que producir un desequilibrio, consecuentemente se compensará y necesitará de un mecanismo regulador para lograr un equilibrio. Piaget (citado en Carretero y Martín, 1997)

Esto ocurre de la siguiente manera:

- De un esquema de acción a un objeto exterior. Son los esquemas del individuo ya existentes con acontecimientos externos.
- De un sistema de acción a otro esquema de acción. El individuo hace una coordinación entre el grupo y el objeto; se establece ya un equilibrio.
- La diferenciación e integración de esquemas en uno más general. El individuo observa que en los grupos A, B y C existen objetos de diferente tamaño, pero crea un nuevo grupo donde generaliza que esos tres grupos pertenecen a uno solo.

Por lo tanto el individuo construye operaciones a partir de una interacción con los objetos que encuentra en su medio, obteniendo como resultado un conocimiento nuevo. El individuo podrá hacer una reconstrucción de las acciones y objetos que se encuentren presentes dentro de su sistema, es decir; que el sistema de equilibrio se refiere cuando al individuo se le presenta un nuevo conocimiento el individuo lo recibirá, lo procesará, lo ordenará y lo utilizará. Un ejemplo de ello es cuando al niño se le presentan las vocales, manifestándole sus características comunes (pertenecen al mismo grupo) y propias (fonéticas y su trazo) el niño las incluirá como un nuevo conocimiento.

El estudio del desarrollo psíquico de las funciones cognoscitivas plantea relaciones entre el organismo y el medio a través de etapas secuenciadas que



tienen características muy especiales; dichas etapas se integran y son necesarias para que cada una sea el resultado que precede a la anterior.

Este enfoque caracteriza cuatro estadios o periodos de desarrollo con ciertas estructuras cognitivas específicas que todo individuo humano construye sucesivamente gracias a mecanismos externos e internos. A continuación se presenta una descripción breve de esos estadios.

## **2.1 Descripción de los estadios**

### *2.1.1 Estadio sensorio motor (0-2 años)*

El individuo manipula objetos, utiliza percepciones y movimientos organizados en “esquemas de acción”; así, esta inteligencia coordina acciones sin por ello tener representaciones o pensamiento. Dentro del estadio de los primeros hábitos motores, se adquieren conductas condicionadas y se forman hábitos de movimiento consolidadas con ayuda de la experiencia.

“Durante los dos años, aproximadamente, que dura este estadio se generan cuatro procesos fundamentales: la construcción de las categorías del objeto y del espacio, de la causalidad y del tiempo, como categorías de acción pura, para después pasar a ser nociones del pensamiento” (Piaget, 1995).

### *2.1.2 Estadio preoperatorio (2-7 años)*

Es también llamado el estadio de la inteligencia intuitiva, porque en él aparece el lenguaje y se modificarán las estructuras afectivas e intelectuales del individuo. Debe tenerse en cuenta que los esquemas anteriores le permitirán al niño recrear sus acciones pasadas en forma de relato y anticipar sus necesidades por medio del lenguaje.

Este proceso se manifiesta en cuatro momentos. El primero es a través de la interacción del individuo hacia el medio y el adulto. En la segunda situación, el individuo ya domina el lenguaje y con éste podrá explicarse a sí mismo y explicar a los demás sus propias acciones y anticipar sus conductas futuras. El tercer momento es cuando el individuo desarrolla una inteligencia práctica, con la cual se observa la manipulación directa de los objetos que se encuentran en su medio. Posteriormente adquirirá una experiencia que lo llevará a una interiorización y consecuentemente a la intuición. Finalmente se encuentra la socialización que parte de la correspondencia entre el desarrollo afectivo y las funciones intelectuales. A través del desarrollo afectivo se distinguen los sentimientos individuales (simpatías y antipatías), los cuales son expresados por un sentimiento moral intuitivo, que posteriormente, una vez trastocados en intereses y valores son expresados por un pensamiento intuitivo general.

### *2.1.3 Estadio de las operaciones concretas (7 -11 años)*

Durante este periodo el individuo realizará operaciones que expresará de diversas maneras; una conclusión de estas manifestaciones es que una acción es dependiente de otra; es decir, toda acción que ejecuta el individuo está dentro de una estructura organizada y no puede desvincularse. La siguiente característica es la reversibilidad. Esto hace referencia a una acción ejecutada por el individuo que puede efectuarse en doble sentido o dirección (directa e inversa).

En consecuencia, las operaciones que realice el individuo se caracterizarán porque están relacionadas entre sí y a la vez son independientes de las demás. “Utiliza estructuras lógico-matemáticas como modelos para describir las estructuras cognitivas que constituyen las operaciones”. (Piaget, citado en Carretero y Martín, 1997). Con esto se puede describir el proceso por el cual el individuo atraviesa para pasar de una estructura a otra.

El individuo adquiere la capacidad de agrupar, conservar, clasificar, también adquiere la noción del espacio, del tiempo y velocidad, causalidad y azar, y logra entre otros, el concepto de número.

#### *2.1.4 Estadio de las operaciones formales (12 años en adelante)*

Cuando el individuo llega a la etapa de la adolescencia presenta cambios físicos, afectivos y cognitivos. Antes de llegar a esta etapa el individuo mostró un progreso que consistió en el tránsito de la manipulación del objeto, a la acción inmediata y, finalmente, la interiorización de esa acción. Ahora bien, el individuo tiene como objetivo pasar de la acción a la operación (reconstruir una acción con el pensamiento): es el paso de la centralización a la descentralización.

Señalado por Piaget éste es el último proceso por el cual atraviesa el individuo para lograr un pensamiento lógico sobre conceptos abstractos e hipótesis, así como también concretos en su desarrollo cognitivo.

## **2.2 Características del estadio de las operaciones formales**

El pensamiento del individuo se caracteriza ahora por dos tipos de propiedades, que son las funcionales y formales, que se describen a continuación.

### *2.2.1 Propiedad funcional*

Representa las formas o estrategias para abordar y tratar los problemas planteados. Éstas se distinguen en tres situaciones. Una de ellas se refiere a cuando se opera sobre lo real y lo posible; el individuo hará explícita su estrategia para resolver una tarea o un problema planteado y lo comprobará dentro de su vida cotidiana mediante la experimentación, por último lo analizará para obtener sus propias conclusiones.

La segunda situación se distingue porque se hacen todas las relaciones posibles; es decir, el individuo deberá apartarse de lo real y situarse en el plano de la posibilidad, de la cual elaborará una hipótesis. Combina todas las relaciones posibles entre objetos o factores, ideas o proposiciones; para esto es necesario realizar operaciones de clasificación o de relaciones de orden.

Esta nueva forma de razonar llevará al individuo a una lógica hipotético – deductiva, en la que el individuo realizará la abstracción de sus creencias y la de los demás. Esto es visto de la siguiente manera:

- El individuo descarta aquellas hipótesis simples, cuando reconoce que lo son, y deja aquellas hipótesis que comprueba mediante la práctica; estas hipótesis podrán volverse posteriormente teoría.
- El individuo comprende lo que está sucediendo en un hecho y hace la abstracción de que el hecho se puede comprobar sin tener que llevarlo a la práctica. Por ejemplo, se le presentan dos recipientes llenas de agua en el mismo nivel y se le pregunta qué sucedería si se introdujera un barco de papel; el individuo, sin tener que realizar la acción, conoce la respuesta.
- El individuo confirma una hipótesis realizando el análisis y la comprobación de acción de las variables que intervinieron.

Según Inhelder y Piaget, “El comportamiento de los individuos supone a veces que poseen la capacidad de formular hipótesis, pero no son capaces de comprobarlas adecuadamente, pues no aíslan a los factores entre sí, ni los llegan a combinar de todas las formas posibles” (citado en Carretero, 1997).

Finalmente (tercera situación) el individuo para poder afirmar o negar su hipótesis, utiliza una operación de carácter proposicional, razona sobre ella al hacer una operación proposicional, ya sea implicación (si o entonces), disyunción (uno u otro), exclusión (o), o incompatibilidad (uno y no el otro).

El individuo actúa sobre la acción (hace una operación sobre otra operación) mientras que el individuo del periodo anterior piensa la acción sobre los datos-hechos que tiene presentes. El razonamiento del individuo tendrá también como herramienta al lenguaje, pues habrá adquirido la posibilidad de formular más proposiciones (hacer más frases) y poder combinarlas o relacionarlas.

Con el pensamiento deductivo el individuo hace afirmaciones sobre acontecimientos (va de lo general a lo particular); el individuo podrá inferir una conclusión a partir de varias proposiciones. Entonces (*Ibid*):

- El razonamiento del individuo se da con una proposición molecular (unión de varias preposiciones atómicas) que parte de dos premisas para obtener una conclusión.
- Cuando un objeto “cae” sobre una categoría general (subsumir), el individuo clasifica de manera inmediata, por ejemplo: todos los animales vertebrados son diferentes a los animales invertebrados, pero las dos clasificaciones se encuentran en sólo una: “los animales”.
- El individuo argumentará, dará razones por algo que va a hacer y se le exigirá que dé razones.
- Por último la lógica del individuo servirá para encontrar razones a sus acciones.

Para ejemplificar este primer avance del pensamiento del individuo, se tiene el problema del péndulo: ¿Qué variable determina el número de oscilaciones del péndulo, el peso, la longitud del hilo, la altura en la que se dispone al hacer el empuje o la fuerza que se utiliza al hacer el empuje?

Para determinar una solución, el individuo estructurará su pensamiento de una manera sistemática. Concebirá todas las relaciones posibles entre las variables y los factores del problema planteado, con los cual formulará una

hipótesis, finalmente realizará una comprobación mediante la manipulación del material.

### 2.2.2 Propiedad formal

La segunda propiedad formal del pensamiento del individuo se caracteriza por la capacidad de los individuos para operar simultáneamente con las siguientes cuatro operaciones mentales o llamado grupo de INRC:

- Identidad (I): no cambia una proposición establecida.
- Negación (N): cambiar una variable por su contrario.
- Reciprocidad (R): la variable cambiada tiene que producir el mismo efecto que la anterior.
- Correlación (C): consiste en regresar la variable anterior.

Piaget e Inhelder las utilizan porque opinan que los adolescentes son capaces de resolver los problemas que suponen no sólo la realización de operaciones lógicas como la implicación, la disyunción, la exclusión y otras, sino también los que implican estructuras o sistemas más amplios que contienen las citadas operaciones (Carretero y Martín, 1997).

Cuando se combinan de dos en dos esas cuatro operaciones lógicas, se tienen 16 combinaciones que se muestran en el siguiente cuadro.

	<b>I</b>	<b>N</b>	<b>R</b>	<b>C</b>
<b>I</b>	I	N	R	C
<b>N</b>	N	I	C	R
<b>R</b>	R	C	I	N
<b>C</b>	C	R	N	I

**Grupo INRC (Tomado de Fiol y Fortuny, 1990).**

Por ejemplo, la negación (N) y reciprocidad (R) dan una correlación (C); esto es  $NR=C$ ; dicho de otra manera, la negación de una reciprocidad es una correlación.

Esa combinatoria de las 16 operaciones binarias forma un grupo de Klein, que tiene ciertas propiedades matemáticas:

Se considera que el grupo de Klein cumple con las siguientes propiedades: a) la operación realizada es interna, porque al operar elementos del grupo se obtiene un elemento de este grupo; b) que cada elemento es inverso de sí mismo; c) existe un elemento idéntico; y d) se cumple con la propiedad asociativa; finalmente el grupo de INRC actúa sobre las 16 proposiciones lógicas (Fiol y Fortuny, 1990).

El discurso del individuo se distingue en este estadio por ser racional y convincente; también explicará el porqué de una acción, basado en un fundamento lógico.

El individuo podrá combinar entre sí objetos o factores, ideas o proposiciones que intervienen en una situación cuya relación efecto–causa se desconoce, de manera completa y sistemática. Y tendrá la capacidad para concebir todas las relaciones posibles entre los elementos de un problema.

Los esquemas operatorios formales del desarrollo cognitivo se caracterizan porque el individuo combina objetos y proposiciones de todas las maneras posibles, comprende que existe una igualdad entre las acciones realizadas y que éstas pueden compensarse o anularse, también reconoce que existe un equilibrio entre la primera y la segunda variable (acción y reacción) y adquiere las nociones de probabilidad, de correlación y de compensaciones multiplicativas.

En este estadio se marca un desarrollo importante en los procesos del pensamiento; éstos son más complejos porque el individuo comprende y utiliza conceptos abstractos, utiliza operaciones matemáticas, prescindiendo de objetos concretos, utiliza fórmulas, fracciones, proporciones, decimales, etc.

### 2.2.3 *El razonamiento proporcional en el estadio de las operaciones formales*

Piaget estudió diversos aspectos y presentaciones del concepto de proporcionalidad. A partir de 1946 estudia el movimiento y la velocidad; la noción de proporción interviene cuando se trata de comparar dos movimientos siendo distintos los espacios recorridos y los tiempos empleados. En 1951 estudia con Inhelder el desarrollo de la noción de azar en el niño; la idea de probabilidad aparece, por ejemplo, cuando se atribuye el mismo valor a dos casos favorables sobre cuatro posibles o a tres casos favorables sobre seis posibles. Piaget, (citado en Fiol y Fortuny, 2000) se enfocan en el estudio de las funciones, y entre ellas el de la función lineal, estudiada en unos ejemplos hoy ya clásicos (peces que comen según su longitud), considerando primero ejemplos de magnitudes discontinuas, y en segundo lugar, de magnitudes continuas.

La razón principal para el estudio de las proporciones en el dominio espacial es que, según Piaget, el análisis de los estadios es mucho más fácil que en el terreno no geométrico. Y esto ya que antes de saber razonar sobre figuras semejantes, el individuo tiene que saber discernir, sólo por simple percepción, si determinadas figuras están en la misma razón o no. Así afirma: “la génesis de la proporción se tiene que buscar en la percepción de las figuras” (Piaget, citado en Fiol y Fortuny, 2000).

La probabilidad es el resultado de la unión de la noción combinatoria y la proporción. El individuo plantea una serie de las acciones probables y no probables que puedan suceder en un evento. La proporción, por otro lado, es considerar conjuntamente dos variables, y viendo qué cambios ocurren en una cuando se modifica la otra. Se habla de proporcionalidad cuando esos cambios son de naturaleza multiplicativa (no aditiva); por ejemplo la velocidad y tiempo.

La proporción implica dos variables simultáneamente, lo cual implica un razonamiento matemático con esquemas operatorios formales. Se puede tratar de



proporcionalidad espacial (figuras semejantes), velocidades métricas (km/hr), probabilidades, relaciones cualitativas, etc. Esto se verá más específicamente en el Capítulo 3 “Razonamiento proporcional”.

Con respecto a los problemas de proporcionalidad que involucran cuatro números, una de las cosas que según la teoría Piagetiana distinguen al estadio de las operaciones concretas del estadio de las operaciones formales es que en el estadio anterior al estadio formal el individuo sólo puede comparar una pareja de números, mientras que en el estadio de las operaciones formales el individuo, como puede realizar acciones sobre las acciones, puede comparar parejas de parejas de números.

Es importante mencionar que Piaget trabajó exclusivamente con individuos menores de edad; en la presente investigación los participantes son mayores de edad. Una pregunta que es posible plantearse es si los supuestos recién mencionados de la teoría Piagetiana acerca de la resolución de problemas de proporcionalidad se cumplen o no.



## CAPÍTULO 3. EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

El primer estudio sobre razonamiento proporcional fue realizado por Inhelder y Piaget (citados en Sanz, Pozo, Pérez y Gómez, 1996). Estos autores señalaron que el razonamiento proporcional es uno de los ocho esquemas formales, el cual se alcanza en el periodo de operaciones formales conformando una estructura cognitiva general. Agregan que al alcanzar este esquema, el sujeto estaría capacitado para resolver cualquier tarea proporcional independientemente del contenido.

### 3.1 Algunas definiciones

Lesh y otros autores describen al razonamiento proporcional como

[...] una forma de razonamiento matemático, [que] involucra un sentido de covariación, comparaciones múltiples y la capacidad para almacenar y procesar mentalmente varias proporciones de información. El razonamiento proporcional tiene mucho que ver con la inferencia y la predicción, e involucra métodos de pensamiento tanto cualitativos como cuantitativos (citados en Alatorre, 2004)

Se entiende que “una razón es una pareja ordenada de números o de valores de magnitud” (Freudenthal, citado en Alatorre, 2004). Los problemas de razonamiento proporcional implican cuatro números, agrupados en dos parejas de razones. Cada razón está formada por un antecedente y un consecuente. Siempre se expresa en primer lugar el antecedente (a) y en segundo el consecuente (c), como a:c; pero la determinación de cuál de los dos números involucrados en una razón es el antecedente y cuál es el consecuente depende de la pregunta que se plantea.

Véase un ejemplo: supóngase que en el patio de una escuela A hay 2 niños jugando en un área determinada con una baldosa, y en una escuela B hay 5 niños jugando en 3 baldosas del mismo tamaño a la anterior, como se ilustra en la siguiente figura:

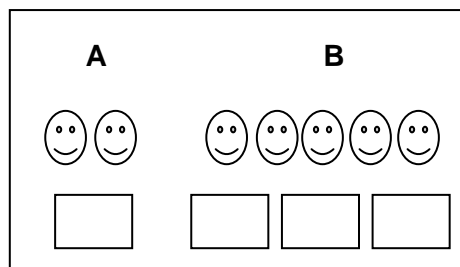


FIGURA 1

En este problema se tiene los siguientes números: 2, 1, 5, 3. Dos de ellos se refieren a una magnitud (la cantidad de niños) y los otros dos se refieren a otra magnitud (la cantidad de baldosas). Además, dos números se refieren a uno de los “objetos” que se comparan y los otros dos al otro (en este caso los dos “objetos” son las dos escuelas).

Se pueden plantear dos preguntas en este contexto:

1) ¿Dónde están más apretados los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

- + Mientras más niños, más apretados están los niños.
- Mientras menos baldosas, más apretados están los niños.

Entonces, en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

- + El antecedente son los niños.
- El consecuente son las baldosas.

Y las razones son:

Para la escuela A, 2:1

Para la escuela B, 5:3

2) ¿Dónde tienen más espacio los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

- + Mientras más baldosas, más espacio tiene cada niño.
- Mientras menos niños, más espacio tiene cada niño.

Entonces en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

- + El antecedente son las baldosas.
- El consecuente son los niños.

Y las razones son:

Para la escuela A, 1:2

Para la escuela B, 3:5

### 3.1.1 Los distintos problemas de razonamiento proporcional

Los problemas de razonamiento proporcional se clasifican según Alatorre (2004) en dos tipos:

Problemas de valor perdido. También son llamados de cuarta proporcional. En estos problemas se da por sentado que hay una proporcionalidad; es decir, las dos razones son iguales. Pero se desconoce uno de los cuatro números. Por ejemplo: si se sabe que 3kg de maíz cuestan \$24, ¿cuánto costarán 5kg de maíz? Esto se puede expresar así: 3 es a 24 como 5 es a  $x$ ; es decir  $3:24::5:x$ . Otra manera de plantear la información es en un arreglo como el que aparece en el recuadro.

3	\$24
5	\$ x

Para solucionar el problema se pueden utilizar varias estrategias. Por ejemplo, se puede encontrar la razón unitaria, es decir; para conocer el precio de 1kg de maíz, se realiza la siguiente operación  $\$24 \div 3 = \$8$  y después multiplicar este resultado por 5 para encontrar el precio de los 5kg,  $\$8(x)5 = \$40$ . Otra estrategia es la conocida regla de tres:  $x = 5(x)24 \div 8 = 40$ .

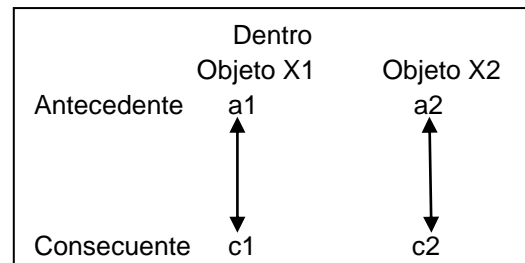
Problemas de comparación de razones. En estos problemas se presentan los cuatro números pero lo que se desea averiguar es si hay o no proporcionalidad

y, si no la hay, dónde es mayor la razón. Por ejemplo si 3kg de maíz cuestan \$24 y 5kg de trigo cuestan \$42, ¿qué está más barato, el maíz o el trigo? Ahora las dos razones a comparar son 3:24 y 5:42, y nos preguntamos cuál es mayor, o si son iguales. También se puede expresar con el siguiente arreglo (3,24) (5,42) o bien de esta manera, como se presenta en el recuadro:

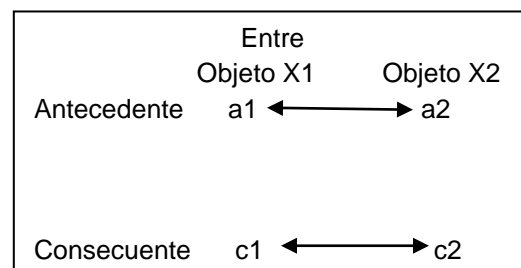
3	\$24
5	\$42

En general, se puede hablar de este esquema, como se vio en el Capítulo 2 sobre El desarrollo cognitivo según Piaget, para quien el razonamiento proporcional implica una acción sobre la acción, es decir la comparación de los resultados de dos comparaciones:

Por ejemplo, el sujeto considera dos objetos (A y B). En cada uno de ellos, encuentra dos clases de elementos. Con los cuatro elementos el sujeto hará comparaciones de una de las dos siguientes maneras.



1. Esquema dentro: el sujeto compara los antecedentes y consecuentes de un mismo objeto (a1 y c1 en el primero objeto y a2 y c2 en el segundo) y obtendrá resultados de estas comparaciones. Posteriormente el sujeto hará de nuevo una comparación de los resultados obtenidos de la primera comparación que realizó (ambos objetos).
2. Esquema entre: el sujeto compara sólo antecedentes y los consecuentes de ambos objetos (a1 y a2, ó c1 y c2) y obtendrá resultados de estas comparaciones. Consecutivamente el sujeto hará una comparación de los resultados de esas comparaciones (entre objetos).



Éste es el tipo de problemas que se trabajarán en la presente investigación. Las estrategias que permiten resolver los problemas planteados se verán más adelante.

### *3.1.2 Tipos de problemas de comparación de razones.*

Los problemas de comparación de razones se pueden clasificar según varias categorías (Nesher y Sukenik, citados en Alatorre, 2004); entre ellas se destacan:

- Clasificación según el **contexto**, es decir según el tipo de historia involucrada en el enunciado del problema.
- Clasificaciones según la **estructura numérica**, es decir según el tipo de números y según el tipo de relaciones entre los números que aparecen en el problema.

A continuación se explican las características de estas clasificaciones:

#### A) Por contexto

De acuerdo a Alatorre (2004), los contextos se pueden clasificar en:

##### *Problemas de tasas*

- Relacionan dos unidades de medida diferentes

Ejemplo: Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?

En el ejemplo anterior se observa que las unidades de medida de los términos de la razón son distintas: el antecedente (espacio recorrido) se mide en número de cuadras y el consecuente (tiempo empleado en recorrer el espacio) se mide en minutos. Otro ejemplo sería el de los niños y las baldosas.

*Problemas de mezcla.* También llamados razones de parte-parte-todo

- Relacionan dos unidades de medida iguales.

Se pueden distinguir dos tipos de esta clase de razones:

#### *Mezcla simple*

Ejemplo: En dos jarras (A y B) se elabora agua de jamaica con distintas cantidades de vasos de concentrado de jamaica y de agua simple. ¿En cuál jarra la preparación tiene el sabor más fuerte, o tienen el mismo sabor?

En el ejemplo anterior se puede ver que la unidad de medida de los términos de la razón es la misma: tanto el antecedente (jamaica) como el consecuente (agua) se miden en cantidad de vasos (Alatorre, 2004).

#### *Mezcla probabilística*

Ejemplo: En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos botellas y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?

En este ejemplo se puede ver que la unidad de medida de los dos términos de la razón es la misma: tanto el antecedente (azules) como el consecuente (amarillas) se miden en cantidad de canicas (Alatorre, 2004).

#### B) Estructura numérica

- Alatorre (2004) distingue 86 situaciones distintas de acuerdo con las relaciones entre los siguientes números de la pareja de razones:
- Los dos antecedentes.
- Los dos consecuentes.
- Los dos totales (antecedente más consecuente).



- Las dos diferencias (antecedente menos consecuente).
- Los dos cocientes parte-todo (antecedente sobre total).

Esas 86 situaciones se reclasifican a su vez en tres grandes categorías, denotadas Nivel I, Nivel II y Nivel III. Según Alatorre (2004), estas categorías son también categorías de dificultad creciente y se definen con base en las estrategias que pueden ser utilizadas para resolver exitosamente los problemas, por lo que se expondrán en el Capítulo cuarto de Metodología.

### **3.2 El razonamiento proporcional en los materiales dirigidos al docente de educación primaria**

Como se mencionó en el Capítulo 1, tanto la formación inicial como la actualización de los docentes de educación primaria se basan en los materiales de la SEP (1995). La definición ahí dada señala que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar una cantidad, la otra aumenta en la misma proporción. También se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente entre dos cantidades correspondientes es siempre constante (Capítulo II “Procesos de cambio”, pág. 109).

El capítulo mencionado está organizado en el análisis de tres temas; en ellos hay una serie de actividades “situaciones problemas” sobre situaciones de proporcionalidad en las que una magnitud varía en función de otra. Con estas actividades se busca que el docente amplíe sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos, a través de problemas que den sentido y muestren la utilidad de los conocimientos matemáticos y que reflexione sobre los procesos didácticos que pueden favorecer su adquisición.

En las siguientes páginas se muestran tres cuadros en donde se desglosan los temas para el contenido de proporcionalidad en el Capítulo II “Procesos de cambio”, con sus propósitos y algunas reflexiones sobre la didáctica.

<b>TEMA 1</b>		
<b>VARIACIÓN PROPORCIONAL Y NO PROPORCIONAL</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Los engranes y las vueltas</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*Análisis de variación proporcional no proporcional.</li> <li>*Representación gráfica.</li> <li>*Encontrar procedimientos y recursos para resolver los problemas de proporcionalidad directa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*Procedimientos de cómo calcular dobles, triples, mitades, cuartos, decimos, etc.; o sumar dos o más cantidades; para obtener datos faltantes en una tabla; son sencillos y permiten que los niños comprendan mejor la variación proporcional y sus propiedades.</li> <li>*Calcular el valor unitario, no es tan intuitivo, pero sirve al calcular dobles, triples, etc.</li> </ul>
2 <i>Los rectángulos</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*Análisis de una situación de razonamiento proporcional.</li> <li>*Conocer la complejidad conceptual, al confrontar distintas estrategias de solución.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*La manipulación de material y el trabajo en grupo favorece el intercambio de ideas, así como el análisis de los procedimientos que se usan.</li> </ul>
3 <i>Se hacen grandes, se hacen chiquitos</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*En la resolución de problemas confrontar el razonamiento proporcional con el aditivo, al comparar varias estrategias de resolución.</li> </ul>	
4 <i>Distintos razonamientos frente a un mismo problema</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*Análisis de diferentes niveles de razonamiento de niños al resolver un problema de proporcionalidad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*No hay una secuencia específica por la que deban pasar todos los niños. El razonamiento proporcional se desarrolla a lo largo de varios años, a través de numerosas experiencias.</li> </ul>
5 <i>Qué hacen los niños</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>*Que el maestro conozca los procedimientos iniciales de alumnos de 5° y 6° al resolver un problema de proporcionalidad, que implica el uso de operadores multiplicativos fraccionarios.</li> </ul>	

**TABLA 1 (Tomada de Flores, 2010)**

<b>TEMA 2</b>		
<b>EL PORCENTAJE</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Tres cuartos, tres de cada cuatro o 75%</i>	*Se analizan diferentes formas de expresar la relación entre una parte y un todo o entre dos partes.	*Las fracciones permiten expresar la relación entre una parte y un todo, ya que, hay situaciones en las cuales lo que interesa saber es qué parte es una cantidad de otra cantidad, y no tanto conocer el número de elementos de esa cantidad.  *Las fracciones, los porcentajes y las expresiones “x de cada y” permiten expresar qué parte de una cantidad es otra cantidad.
2 <i>¿Nos toca dar lo mismo?</i>	*Análisis de una lección de 6° cuyo propósito es estudiar la noción de porcentaje como fracción de una cantidad, en un contexto en la que interesa que unas cantidades sean proporcionales a otras.	*El porcentaje de una cantidad, se puede expresar como una fracción de la cantidad y se utiliza para establecer una relación proporcional.
3 <i>Algunas maneras rápidas para calcular porcentajes.</i>	*Resolución de problemas de porcentajes a través de procedimientos sencillos.	* Comparar porcentajes con las fracciones $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{3}$ , $\frac{1}{4}$ , $\frac{1}{5}$ , $\frac{1}{10}$ , ayuda a tener una idea del tamaño que indica un porcentaje y permiten también, en algunos casos, facilitar los cálculos.  *Para calcular porcentajes de una cantidad, muchas veces resulta práctico calcular el 10%.y el 1%.  *Para calcular el 10% de una cantidad se divide la cantidad entre 10, es decir corriendo el punto un lugar a la izquierda. Para calcular el 1% de una cantidad, al ser equivalente a la centésima parte de la cantidad, se obtiene dividiendo entre 100, es decir, corriendo el punto decimal dos lugares a la izquierda. Estas formas de calcular los porcentajes son prácticas para hacer cálculos mentales, pero no deben proporcionarse prematuramente. Es importante que previamente los alumnos comprendan el significado de esta noción, y la puedan aplicar en varios contextos.
4 <i>Otros problemas de porcentaje</i>	*Analizar algunas expresiones en las que se utiliza el porcentaje.	

TABLA 2 (Tomada de Flores, 2010)

<b>TEMA 3</b>		
<b>LA PROPORCIONALIDAD INVERSA</b>		
<b>Actividades</b>	<b>Propósitos</b>	<b>Reflexiones para el proceso didáctico</b>
1 <i>Entre más somos, menos nos toca</i>	*Distinguir dos tipos de variación proporcional: directa e inversa. *Analizar algunas propiedades de las magnitudes inversamente proporcionales.	*Dos magnitudes son inversamente proporcionales si cuando una aumenta, la otra disminuye en la misma proporción; también se puede decir que son inversamente proporcionales si al multiplicar las cantidades correspondientes, el producto es constante.
2 <i>Los materiales de trabajo</i>	*Resolver algunas actividades sobre la variación proporcional, de los libros de texto de Matemáticas de 4°, 5° y 6° grado.	El uso prematuro de fórmulas para resolver problemas de proporcionalidad directa evita la realización para desarrollar y comprender nociones importantes para estos procesos.

**TABLA 3 (Tomada de Flores, 2010)**

Cabe mencionar que en algunas actividades no se menciona nada sobre su reflexión para el proceso didáctico, ya que en ellas se le plantean al docente preguntas sobre cómo resolvió el problema, los procedimientos que considera sencillos para resolverlos, etc., debido a que son situaciones problemas con variaciones para que los niños puedan realizarlas. También hay actividades dirigidas para que el docente resuelva lecciones de los libros de texto de matemáticas utilizando varias estrategias, sugiriéndole que analice la dificultad de éstas y de las lecciones.

Otro material que se le proporciona al docente para trabajar el tema de proporcionalidad es la Guía para el maestro de 6° (SEP, 1992). Aunque este material no está elaborado para la formación y actualización del magisterio, se toma en cuenta pues contiene información relevante sobre lo que se supone que el docente debe conocer acerca de enfoques para desarrollar en el niño nociones importantes relacionadas con el concepto de proporcionalidad.

### 3.2.1 Conceptos

En la Guía para el maestro de 6° (SEP, 1992) se señala que la idea básica en la que se integra la proporcionalidad es la de comparación, y se menciona que se puede hacer una comparación cuantitativa de dos maneras:

Aditiva (por medio de la diferencia)

Multiplicativa (por medio de su cociente)

Las primeras actividades, que sirven de apoyo para construir la noción de razón, deben estar encaminadas a distinguir entre estos dos tipos de comparación.

Se aclara que ambas comparaciones son correctas y que se usa una u otra dependiendo de cuál es más apropiada en el contexto real; aunque se insiste en que la comparación aditiva no implica el establecimiento de una razón.

Se indica que la idea de comparación es fundamental, iniciándose en temas de suma y resta, con la noción de diferencia y que posteriormente en la multiplicación y la división, aparece la comparación del tipo: “¿cuántas veces cabe?”.

La comparación multiplicativa (sin residuo) lleva al concepto de fracción como comparación entre dos cantidades. Por ejemplo si se quiere comparar la forma de un rectángulo de 9 cm de ancho por 15 cm de largo con la de uno que mida 3 cm de ancho por 5 de largo, en el primero el ancho cabe  $15/9$  veces en el largo, y en el segundo cabe  $5/3$ . Como  $15/9=5/3$ , se puede concluir que ambas formas son similares

#### *Razón*

Las actividades que se proponen en la Guía para el maestro de 6° se encaminan a desarrollar el siguiente concepto de razón como “una comparación multiplicativa entre dos cantidades”. (SEP, 1992, p. 15)

La razón se puede representar como 9 de 15, 9 a 15 y 9:15. También se puede representar una razón como una fracción ( $9/15$ ). Aquí se está asociando a la razón un número fraccionario que se debe saber interpretar.

Cuando la razón relaciona una parte y su todo, esa interpretación es más o menos sencilla. Cuando la razón se relaciona parte con parte o relaciona cantidades de diferente medida, su interpretación es mucho más difícil debido a que la fracción en este caso se utilizaría como una comparación entre dos cantidades diferentes.

En una razón el orden de las cantidades es un punto muy importante. Al especificar una razón debe quedar muy claro qué cantidades intervienen en ella y en qué orden.

Las aplicaciones cotidianas del uso de la razón son las escalas y los porcentajes. Las escalas tienen la ventaja de que pueden visualizarse geoméricamente (pueden servir como una buena introducción al concepto de razón). Los porcentajes tienen la ventaja de que pueden utilizarse en contextos relacionados por el niño. Una idea para introducir porcentajes es que son razones equivalentes que están referidas a 100 unidades.

### *Variación*

La variación de una cantidad relativa a otra es cómo una cantidad puede depender de otra.

La variación proporcional es de las más simples, es la que aparece más en la vida cotidiana y por lo cual conviene estudiar sus propiedades más a fondo. Se debe saber diferenciarla de otro tipo de variaciones.

Una variación muy conocida es la que se utiliza en situaciones de compra y venta, entre el precio y la cantidad comprada.

Al igual que dobles y triples, la proporcionalidad transfiere también a la otra cantidad, mitades, terceras partes, o cualquier otro submúltiplo. Mientras que en la

variación aditiva ambas cantidades se incrementan, pero si una aumenta en tres unidades, la otra también aumentará en tres unidades.

Por lo tanto, lo que caracteriza una variación proporcional es que esta variación tiene la propiedad de transferir de una cantidad a la otra cambios multiplicativos como el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte, o bien cualquier otro múltiplo o submúltiplo.

### *3.2.2 Enfoques didácticos para la proporcionalidad*

Se pueden usar varios enfoques para resolver problemas de proporcionalidad. A continuación se presentan en la tabla 4 cuatro enfoques de proporcionalidad con información de sus ventajas y desventajas y su pertinencia para la enseñanza de la proporción en la primaria, que se marcan en SEP (1992).

Enfoques	Descripción	Ventajas	Desventajas	Enseñanza en primaria
<b>Uso de tablas y razonamiento pre-proporcional</b>	Se utiliza una tabla, la cual se va extendiendo con la ayuda de ir efectuando dobles, triples, mitades, etc.; y sumas de estas cantidades.	Esta estrategia se apoya en las propiedades más intuitivas de la proporcionalidad. Es el más fácil y desarrolla en el niño la noción de proporcionalidad		Se sugiere utilizar este enfoque como primera fase de la enseñanza de la proporcionalidad
<b>Razonamiento proporcional</b>	Se usa la constatación de la razón en forma de cociente que se tiene para cada pareja de datos de una variación proporcional.	Se utilizan varias técnicas como: a) Equivalencia de fracciones. b) Obtención del factor de proporcionalidad de 2 de los datos por medio del cociente entre ellos (debe mantenerse constante) y aplicándolo al otro dato (multiplicando).		
<b>Unitario</b>	Se utiliza la razón unitaria por medio de una división y después se multiplica por la cantidad deseada.		Utilizar la razón unitaria puede ser pesado e innecesario. No siempre la razón unitaria en un contexto real puede interpretarse fácilmente.	
<b>Algoritmo</b>	Implica el uso de la regla de tres y de los productos cruzados para resolver la incógnita. NOTA: En la presente investigación se considera que aquí debería decir "Implica el uso de la llamada regla de tres para resolver la incógnita en el caso de los problemas de valor perdido, y de los productos cruzados en el caso de los problemas de comparación."	El procedimiento, de dividir entre un número y multiplicar por el otro puede ser descubierto por los niños, siguiendo un razonamiento proporcional o el enfoque unitario.	Se trabaja de manera muy mecánica, lo cual se quiere evitar en este nivel elemental.	No se recomienda, pues implica el conocimiento de nociones de álgebra. Puede utilizarse como alternativa ante datos complicados en el problema.

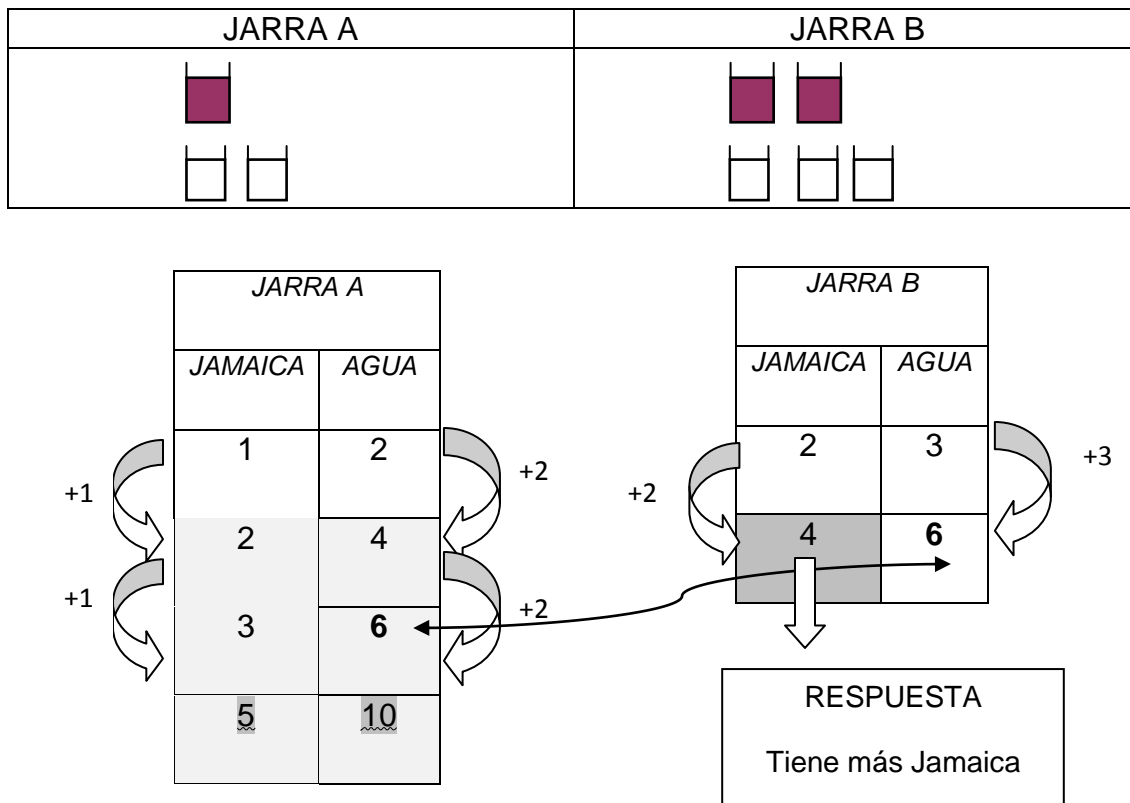
TABLA 4 (Tomada de Flores, 2010)



Con respecto a la información contenida en esta tabla se considera pertinente aclarar los siguientes puntos.

- 1) En algunos enfoques no se hace mención de sus ventajas o sus desventajas, así como de su enseñanza en educación primaria, puesto que no se señala en el documento dónde se obtuvo la información.
- 2) Cuando en los materiales de la SEP se habla de estrategias aditivas, se refieren al uso de la suma en tablas como la siguiente:

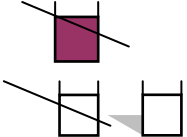
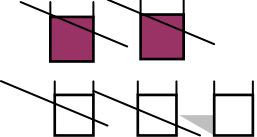
**Aditivo correcto: igualación**



(Tomado de Flores, 2010).

Sin embargo, en este documento, cuando se hable de estrategias aditivas se hará referencia al uso de la suma o la resta directamente en la situación, como en el siguiente esquema (ver Capítulo 4):

**Aditivo incorrecto**

JARRA A	JARRA B
	
$2-1=1$	$3-2=1$
RESPUESTA Da igual	

Tomado de (Flores, 2010).

## CAPITULO 4. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta el procedimiento metodológico que se usó en la investigación con maestros de educación primaria.<sup>1</sup> Se utilizó un instrumento en el que se plantearon problemas de razonamiento proporcional (problemas de comparación de razones y tasas), con el objetivo de conocer qué estrategias utilizan las maestras; se utilizó también un material que contenía información sobre los problemas de razonamiento proporcional.

Para describir las circunstancias de cada participante, se inició con una pequeña plática que nos permitió conocer algunos aspectos de la vida profesional de la maestra (los datos generales de las cinco docentes entrevistadas se encuentran en el Anexo 2). Después se trabajó en dos sesiones con cada una, de la siguiente manera.

En la primera sesión se realizó una entrevista semiestructurada, que permitió plantearle a cada maestra preguntas abiertas. Se le planteaban problemas de razonamiento proporcional y se le preguntaba sobre el procedimiento que había utilizado para llegar al resultado; esto posteriormente permitió clasificar la respuesta dada por la maestra en alguno de los tipos de estrategias de solución. En esa primera sesión se trabajó con un instrumento en donde se plantearon problemas en cinco contextos distintos y con trece estructuras numéricas diferentes

Después de haber analizado las estrategias de solución que emplearon las cinco maestras en la resolución de problemas de proporcionalidad según la propuesta de Alatorre (2004), se realizó una segunda sesión en un llamado “tiempo libre” (proporcionado por ellas, dentro de su área y horario de trabajo

---

<sup>1</sup> La metodología fue construida y se puede aplicar con cualquier docente de educación básica, sin importar sus características personales, en especial su sexo. Sin embargo, como en la investigación que aquí se reporta se trabajó con cinco mujeres, a partir de este momento se hablará de las maestras, en femenino.

laboral) y se planeó un protocolo (Anexo 3) que nos permitiera ajustarnos al llamado “tiempo libre”.

En esta segunda sesión a cada una de las maestras entrevistadas se les proporcionó una copia del siguiente material utilizado: Problemas de razonamiento proporcional y Banco de problemas de comparación de razones (Anexo 4), cuyo contenido será explicado más adelante; además se les entregó un CD que contenía la grabación de su primera entrevista.

Se planeó la entrevista con un lapso máximo de dos horas, por sus condiciones laborales y a pesar de que los objetivos eran muy amplios. Por una parte se les presentaron documentos de un contenido extenso y, por otra, se pretendía que las maestras observaran sus propias respuestas incorrectas durante la primera entrevista.

Sin embargo este horario fue limitado, no se logró debido a que las maestras atendían situaciones escolares y por lo tanto la duración de la mayoría de las entrevistas fue entre una hora y hora y media.

## **4.1 Participantes**

Se trabajó con cinco maestras de educación primaria pública, que laboran en diferentes escuelas pertenecientes al sector 33 ubicado en la delegación Tlalpan. Las maestras de educación primaria entrevistadas trabajan frente a grupo o se desempeñan realizando apoyo técnico pedagógico.

La selección de las maestras participantes fue proporcionada por la jefa del sector 33, Lilia María de la Paz Carreño. Es importante mencionar que la relación con la maestra Carreño está establecida dentro de un proyecto UPN-CONACyT denominado “Saberes matemáticos de maestros de primaria” bajo la coordinación de la Doctora Silvia Alatorre Frenk, quien también ha laborado impartiendo diversos talleres a los profesores del sector.

## 4.2 Técnica

La técnica que se aplicó a las maestras de educación primaria para las dos sesiones fue realizar una entrevista de corte clínico, la cual consiste en tener una conversación abierta tipo interrogatorio con el fin de descubrir algo sobre el pensamiento del participante.

Con esto se pretendió “no limitarse a registrar respuestas que da el sujeto a la pregunta que se le ha formulado, sino dejar que converse” (Claparède, citado por Alatorre, 1994). Ésta fue una forma directa de hacerle preguntas al sujeto con el fin de conocer su manera de razonar para llegar a la resolución del problema planteado.

El procedimiento consistió en utilizar preguntas preestablecidas y otras que se fueron formulando con base en sus respuestas; esta técnica de pregunta-respuesta y respuesta-pregunta, tiene como objetivo conocer el tipo de estrategia que utiliza el participante para resolver los problemas.

No todas las preguntas preestablecidas se le plantearon a las maestras, eso dependió del tipo de respuestas que éstas dieron en el inicio de cada contexto.

A través de las respuestas que cada una de las maestras fue dando, se le pudo cuestionar cuando su respuesta fue contradictoria o insuficiente para poder analizar la estrategia que estaba empleando.

Para la segunda entrevista se diseñó un protocolo que se encuentra en el Anexo 3 y que será descrito en la sección 4.6.

## 4.3 Instrumento

El instrumento que se utilizó para la primera sesión fue tomado de la tesis doctoral de Alatorre (2004). Este instrumento consta de 10 contextos (cuatro

problemas de comparación de tasas, cuatro de comparación de razones y 2 de comparación de particiones), con quince situaciones numéricas cada uno.

Para esta investigación sólo se retomaron 5 problemas de los siguientes contextos (como se indicó en los objetivos, contexto es “la historia” que acompaña un problema matemático; el contexto tiene efecto sobre las respuestas, como lo tienen, en el caso particular de problemas de razonamiento proporcional, la estructura numérica, el tipo de medidas -continuas o discretas-, y el nivel de familiaridad que posean los sujetos con el tipo de problemas):

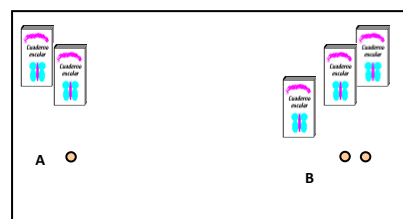
- Dos problemas de comparación de tasas (cuadernos y velocidad).
- Problemas de comparación de mezcla, dos de mezcla simple (jamaica y exámenes) y uno de mezcla probabilística (canicas).

Las preguntas se presentaron a las maestras en fichas de 5x8 pulgadas; la reproducción de las tarjetas se muestra en el Anexo 1. A continuación se presentan los contextos que se utilizaron, así como la estructura numérica de las preguntas planteadas.

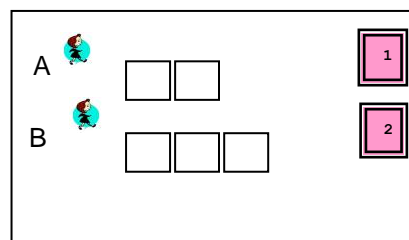
### 4.3.1 Contextos

#### *Dos problemas de comparación de tasas*

- C: *Cuadernos*. En dos tiendas (A y B) se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas). **¿En cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?**

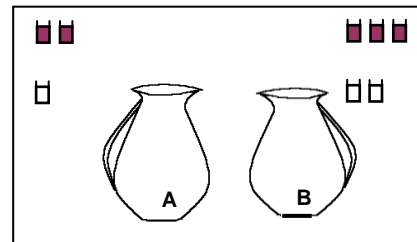


- V: *Velocidad*. Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). **¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?**

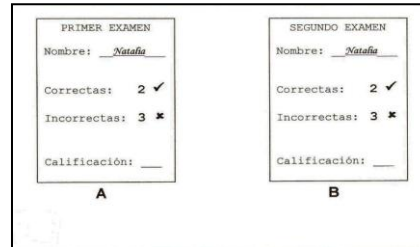


*Dos problemas de mezcla*

- J: *Jamaica*. En dos jarras (A y B) se confecciona agua de Jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua. **¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?**

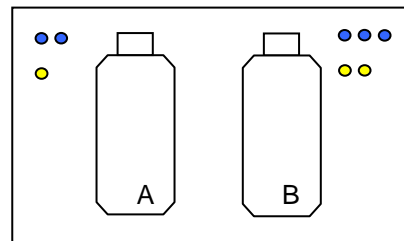


- E: *Exámenes*. Una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas. **¿En cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos?**



*Un problema de mezcla probabilística*

- B: *Botellas de canicas (urnas)*. En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. **¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?**



En los cinco contextos, los objetos, los antecedentes y consecuentes son los que se presentan en la tabla 5.

CONTEXTO	OBJETOS (A y B)	ANTECEDENTE	CONSECUENTE
Cuadernos	Dos tiendas	Cuadernos	Monedas
Velocidad	Dos niñas	Cuadras	Tiempo
Agua de Jamaica	Dos jarras	Jamaica	Agua
Exámenes	Dos exámenes	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Botella de canicas	Dos botellas	Canicas azules	Canicas amarillas

**TABLA 5 (Tomada de Alatorre, 2004)**

### 4.3.2 Estructura numérica

Cada uno de los cinco contextos dio lugar a una serie de trece preguntas, las mismas, según su estructura numérica, para cada uno. El instrumento por lo tanto cuenta con 65 preguntas. El total de preguntas que se le plantearon a cada persona dependió de las respuestas que iba dando a los primeros problemas de cada contexto, por lo tanto se hizo una selección del total de preguntas.

En todos los ejemplos gráficos recién presentados, el antecedente y el consecuente del lado A valen respectivamente 2 y 1, y los del lado B valen respectivamente 3 y 2. Una manera abreviada de representar esta información es mediante el arreglo (2,1)(3,2); este arreglo corresponde a la cuarta pregunta del instrumento.

La estructura numérica de las demás preguntas se presenta en la siguiente tabla:

PREGUNTA	ARREGLO
1	(2,3)(2,3)
2	(1,4)(3,2)
3	(2,3)(2,2)
4	(2,1)(3,2)
5	(3,3)(1,1)
6	(2,2)(3,2)
7	(3,3)(2,0)
8	(2,1)(4,2)
9	(2,5)(1,3)
10	(3,6)(1,2)
11	(5,2)(7,3)
12	(4,6)(2,3)
13	(3,2)(5,3)

**TABLA 6. Estructura numérica de los problemas  
(Tomada de Alatorre, 2004)**



Al analizar la estructura numérica de las preguntas de comparación de razones o tasas, Alatorre (2004) definió 86 situaciones distintas.

Posteriormente las agrupó en tres niveles de dificultad, según el tipo de estrategias que pueden aplicarse en cada situación. Estos niveles, denominados Nivel I, Nivel II y Nivel III en orden creciente de dificultad, se describirán en la sección 4.5.

#### **4.4 Clasificación de las respuestas**

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje el aprendiz adquiere ciertos tipos de conocimientos (sintáctico y semántico) y habilidades que lo llevan a comprender qué procedimiento utilizar para poder resolver una tarea determinada o un problema.

Se considera que el sujeto no dispone de un sistema de respuestas para resolver de forma inmediata un problema, con lo cual tampoco es un hecho que el sujeto no pueda resolver problemas que se le planteen más allá de lo que él podría resolver de acuerdo con su etapa de desarrollo cognitivo, nivel educativo, experiencias previas de aprendizaje con las que cuenta, sino que dependerá de cómo se le plantee el problema. (Parra, 1990).

Podemos agregar que la resolución no sólo depende de la forma del planteamiento sino de muchas otras variables.

Para que un estudiante pueda resolver un problema, deberá recoger la información relevante para determinar qué estrategia utilizará y posiblemente haga una transferencia de conocimientos de un contexto a otro contexto (de la vida cotidiana al ámbito escolar o viceversa). Por lo tanto se considera que las estrategias de aprendizaje son un proceso en la toma de decisiones (conscientes e intencionales) en las cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para completar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción (Monereo, 1998).

El siguiente apartado está dedicado a las posibles estrategias de solución de los problemas antes mencionados. Las estrategias utilizadas para estos problemas se clasificaron según el sistema creado por Alatorre (1994, 2004). Se presenta la descripción de las categorías.

En el instrumento de Alatorre (1994, 2004) se clasifican las estrategias en simples y compuestas; a su vez las estrategias simples pueden ser centraciones y relaciones. Todas las estrategias pueden ser clasificadas según su estatus de corrección.

#### 4.4.1 Centraciones

En estas estrategias de solución el sujeto se centra sólo en una de tres clases de elementos de arreglo: totales, antecedentes o consecuentes. El sujeto elige el objeto en el que hay más elementos (centración positiva) o en el que hay menos elementos (centración negativa) o bien, cuando es el caso, puede decir “da igual” (centración de igualdad).

Se representa de la siguiente manera:

CT. Centraciones en los Totales:

- {CT-}: El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es menor.
- {CT+}: El sujeto elige el objeto en el que la cantidad total es mayor.
- {CT=}: El sujeto dice que da igual, porque en los dos objetos hay la misma cantidad total.

CA: Centraciones en los Antecedentes:

- {CA+}: El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es mayor.
- {CA-}: El sujeto elige el objeto en el que el antecedente es menor.
- {CA=}: El sujeto dice que da igual, porque en los antecedentes de ambos objetos hay la misma cantidad de antecedentes en ambos objetos.

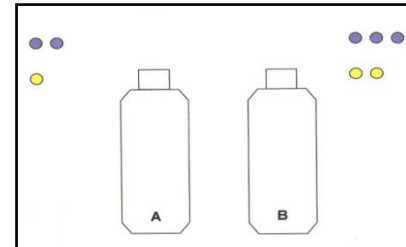
CC. Centraciones en los Consecuentes:

- {CC+}: El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es mayor.

- {CC-}: El sujeto elige el objeto en el que el consecuente es menor.
- {CC=}: El sujeto dice que da igual, porque en los consecuentes de ambos objetos hay la misma cantidad de consecuentes en ambos objetos.

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), representado en la siguiente figura 2 (contexto Botellas), las justificaciones que se podrían presentar son las de la tabla 7:



**FIGURA 2**

Decisión	Justificación	Estrategia	Explicación
A	porque tiene menos canicas	{CT-}	La cantidad total es menor
B	porque tiene más canicas	{CT+}	La cantidad total es mayor
B	porque tiene más canicas azules	{CA+}	El antecedente es mayor
A	porque tiene menos canicas azules	{CA-}*	El antecedente es menor
B	porque tiene más canicas amarillas	{CC+}*	El consecuente es mayor
A	porque tiene menos canicas amarillas	{CC-}	El consecuente es menor
*Estrategias poco comunes.			

**TABLA 7 (Tomada de Alatorre, 2004)**

- Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {CT=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque la cantidad total de canicas es igual.

- Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), la justificación {CA=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque tienen igual cantidad de canicas azules.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {CC=} que se podría presentar es la siguiente: da igual en ambas botellas, porque tienen igual cantidad de canicas amarillas.

#### 4.4.2 Relaciones

En las estrategias denominadas relaciones el sujeto considera paralelamente dos clases de elementos y establece una relación entre ellos; después compara los resultados de esa relación en las dos parejas formadas. La relación inicial puede ser una de orden, de adición-sustracción o proporcional.

En las relaciones de orden el sujeto compara si el antecedente está en ventaja, empate o desventaja, con respecto al consecuente.

Hay tres relaciones de orden posibles, que se muestran en la tabla 8.

<b>{RO+}</b>	El sujeto elige el objeto en que el antecedente está en ventaja, ( $a > c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ( $a < c$ ), o bien
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), o bien
	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en desventaja ( $a < c$ ).
<b>{ROe} *</b>	El sujeto elige el objeto en el que el antecedente empata con el consecuente ( $a = c$ ), cuando en el otro objeto el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ).
<b>{RO=}</b>	El sujeto dice que “da igual” cuando en ambos objetos el antecedente está en ventaja ( $a > c$ ) o bien, cuando en ambos objetos está en desventaja ( $a < c$ ).
*Estrategia poco común.	

**TABLA 8 (Tomada de Alatorre, 2004)**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (1,4)(3,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “la botella B porque tiene más canicas azules que amarillas, mientras que la otra tiene más canicas amarillas que azules”.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B porque tiene más canicas azules que amarillas mientras que la otra tiene igual de canicas azules que amarillas”.
- Cuando el arreglo es (2,3)(2,2), la justificación {RO+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque tiene igual cantidad de canicas azules y amarillas, mientras que la otra tiene menos azules que amarillas”.
- Cuando el arreglo es (2,2)(3,2), la justificación {ROe} que se podría presentar es la siguiente: “La botella A, porque tiene la misma cantidad de canicas azules y amarillas”.
- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RO=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en las dos botellas hay más canicas azules que amarillas”.
- Cuando el arreglo es (1,2)(2,3), la justificación {RO=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en las dos botellas hay más canicas amarillas que azules”.

El segundo tipo de relaciones corresponde a las relaciones sustractivas, en las cuales el sujeto compara el antecedente y consecuente, cuantificando la diferencia.

Este tipo de estrategia es de naturaleza aditiva o sustractiva. Hay tres relaciones sustractivas, que se presentan en la tabla 9:

<b>{RS+}</b>	El sujeto elige el objeto en que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es mayor.
<b>{RS-}*}</b>	El sujeto elige el objeto en el que el resultado de la diferencia antecedente menos consecuente es menor.
<b>{RS=}}</b>	El sujeto dice “da igual” porque en ambos lados las diferencias de antecedente menos consecuente son iguales.
* Estrategia poco común	

**TABLA 9 (Tomada de Alatorre, 2004)**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (4,1)(3,2), la justificación {RS+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella A, porque si se quitan parejas de canicas amarillas y azules, en A quedan 3 canicas azules y en B sólo 1 canica azul”.
- Cuando el arreglo es (1,4)(2,3), la justificación {RS+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque si se quitan parejas de canicas amarillas y azules, queda sólo 1 amarilla en la botella B y 3 amarillas en la botella A”.
- Cuando el arreglo es (2,1)(3,2), la justificación {RS=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque en ambas botellas la diferencia es la misma, hay una canica azul más que las amarillas”.

El último tipo de relaciones corresponde a las de proporcionalidad, que también parten de la comparación del antecedente y consecuente, pero ésta se realiza de forma multiplicativa.

En esta familia hay las siguientes categorías; se presentan en la tabla 10:

<b>{RP+}</b>	El sujeto elige el objeto en que el cociente (antecedente/consecuente) o (antecedente /total) es mayor (o algún mecanismo equivalente).
<b>{RP=}</b>	El sujeto dice que da igual porque en ambos lados los cocientes (antecedente/consecuente) o (antecedente/total) son iguales (o algún mecanismo equivalente).
<b>{RP'}</b>	Se produce un error aritmético.
<b>{RPS}</b>	El error aritmético es parcialmente aditivo (es decir, consiste en iniciar un reparto pero no repartir los residuos que quedan sino compararlos directamente).

**TABLA 10 (Tomada de Alatorre, 2004)**

Ejemplos:

- Cuando el arreglo es (1,3)(2,5), una posible justificación {RP+} que se podría presentar es la siguiente: “La botella B, porque en la botella A una de cada cuatro canicas es azul, mientras que a la botella B le faltaría una canica amarilla para estar igual”.
- Cuando el arreglo es (2,1)(4,2), una posible justificación {RP=} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque tanto en la botella A como en la B hay el doble de canicas azules que amarillas”.
- RP' no es, en si, una estrategia, sino un intento infructuoso de aplicar {RP} ó {RP=}. Por ejemplo, en el arreglo (1,3)(2,5) una posible justificación incorrecta es la siguiente: “ la botella B, porque en la botella A una de cada cuatro canicas es azul, o sea 25% que en la B cinco de cada siete son amarillas o sea 71% (antecedentes/totales vs consecuentes/totales)”.
- Cuando el arreglo es (1,3)(2,5), una posible justificación {RPS} que se podría presentar es la siguiente: “Da igual, porque si se forman grupos de una azul con dos amarillas, en la botella A se forma un grupo y queda una amarilla, y en la botella B se forman 2 grupos y también queda una amarilla”.

## 4.4.3 Estrategias compuestas

En estas estrategias de solución el sujeto considera dos o más estrategias simples, las cuales pueden ser asociadas de diversas maneras en una estrategia compuesta, en donde cada una puede ser dominante o dominada. Es decir, si E1 y E2 son dos estrategias, pueden formar cuatro posibles estrategias compuestas, que se explican en la tabla 11 y se ejemplifican en la tabla 12:

<b>{E1 &amp; E2}</b>	<b>Conjunción:</b> Tanto E1 como E2 llevan a la misma decisión y se apoyan mutuamente. Tanto E1 como E2 son dominantes
<b>{E1 <math>\neg</math> E2}</b>	<b>Exclusión:</b> E1 lleva a la elección de un objeto o a la decisión “da igual” y E2 lleva a la elección del otro objeto, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
<b>{E1 * E2}</b>	<b>Compensación:</b> E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la decisión “da igual”, pero E1 prevalece. E1 es dominante y E2 es dominada.
<b>{E1 <math>\perp</math> E2}</b>	<b>Contrapeso:</b> E1 lleva a la elección de un objeto y E2 lleva a la elección del otro objeto, y la decisión es “da igual”. Tanto E1 como E2 son dominadas.

TABLA 11 (Tomada de Alatorre, 2004)

<b>{E1 &amp; E2}</b>	(2,3)(1,8)	<b>{CA+ &amp; CT-}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules y además tiene menos canicas.
<b>{E1 <math>\neg</math> E2}</b>	(2,3)(1,2)	<b>{CA+ <math>\neg</math> CT-}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules, a pesar de que la botella B tiene menos canicas.
<b>{E1 * E2}</b>	(2,3)(1,4)	<b>{CA+ * CT=}</b> La botella A, porque tiene más canicas azules; y tienen la misma cantidad de canicas las dos botellas.
<b>{E1 <math>\perp</math> E2}</b>	(2,3)(1,2)	<b>{CA+ <math>\perp</math> CT-}</b> Da igual, porque aunque la botella A tiene más canicas azules, por el otro lado la botella B tiene menos canicas.

TABLA 12 (Tomada de Alatorre, 2004)



#### 4.4.4 Clasificación según el estatus de corrección

Ante cualquier arreglo numérico una de las estrategias  $\{RP+\}$  o  $\{RP=\}$  se puede aplicar siempre y se tratará de una estrategia correcta siempre y cuando se aplique sin errores. Por otro lado, hay estrategias que son algebraicamente equivalentes al resultado formal y que por lo tanto son correctas, pero que no siempre se pueden aplicar, sino sólo en algunos arreglos.

Estas estrategias se denominan “estrategias de comparación”; pueden ser estrategias simples o compuestas. Las primeras son las relaciones de orden  $\{RO+\}$ , y entre las segundas están las compuestas del estilo de la conjunción  $\{CA+ \& CC-\}$  (cada vez que en un objeto el antecedente es mayor y el consecuente es menor que en el otro, las razones en él son mayores que en el segundo).

Una segunda categoría son las potencialmente correctas: son aquellas que cuando la estructura numérica es tal que una composición correcta lleva a la elección de un lado (A o B), y un sujeto justifica la elección de ese lado sólo mediante una de las estrategias simples de la composición, cabe la posibilidad de que esté considerando el otro componente, pero no lo esté verbalizando.

En estos casos se dice que la justificación es una expresión potencialmente incompleta de una justificación correcta, por lo cual se resume que la estrategia es potencialmente correcta (Alatorre, 2004). Esto puede ocurrir en las preguntas 1, 2, 3 y 6 del instrumento. Finalmente las estrategias incorrectas son aquellas que cuando se pueden aplicar, no son algebraicamente equivalentes al resultado formal. Están incluidas en esta categoría la mayoría de las centraciones, la relación de orden de igualdad y todas las relaciones sustractivas.

Las siguientes tablas presentan las distintas clases de estrategias de acuerdo con su estatus de corrección. En la tabla 13 se presentan las estrategias correctas, potencialmente correctas e incorrectas para las preguntas 2, 3, 6, y 7

del instrumento, en la tabla 14 se presenta lo mismo para las preguntas 5, 8, 10, y 12, por último la tabla 15 presenta las preguntas 4, 9, 11 y 13.

**RESPUESTAS CORRECTAS, POTENCIALMENTE CORRECTAS E INCORRECTAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 6 y 7.**

Pregunta	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas potencialmente correctas		Respuestas incorrectas	
		Dec	Estrategias simples y compuestas	Dec	Estrategias simples	Dec	(Sólo se presentan las estrategias simples)
2	(1,4)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CT=}, {CA+ * CT=}, {CA+ & CC-}	B	{CA+}, {CC-},	A	{RS-}, {CA-}, {CC+}
						B	{RS+}
						=	{CT=}
3	(2,3)(2,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CC- * CA=}, {CT- * CA=},	B	{CC-}, {CT-},	A	{CT+}, {RS-}, {CA+}
						B	{RS+}
						=	{CA=}
6	(2,2)(3,2)	B	{RP+}, {RO+}, {CA+*CC=} , {CT+*CC=},	B	{CA+}, {CT+}	A	{CA-}, {CT-}, {RS+}, {ROe}
						B	{RS-}
						=	{CC=}
7	(3,3)(2,0)	B	{RP+}, {RO+}, {CC-}			A	{CA+}, {CT+}, {CC+}, {RS-}, {ROe}
						B	{CT-}, {CA-}, {RS+}

**TABLA 13 (Tomada de Alatorre, 2004)**

**RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS EN  
LAS PREGUNTAS 5, 8, 10 y 12 \***

Pregunta	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas	
		Dec	Estrategias simples y compuestas	Dec	(Sólo se presentan las estrategias simples)
5	(3,3)(1,1)	A	{RP=}	A	{CA+},{CT+},{CC+}
				B	{CA-},{CT-},{CC-}
				=	{RS=}
8	(2,1)(4,2)	=	{RP=}	A	{CT-},{CA-},{CC-},{RS-}
				B	{CA+},{CT+},{CC+},{RS+}
				=	{RO=}
10	(3,6)(1,2)	=	{RP=}	A	{CA+},{CT+},{CC+},{RS-}
				B	{CA-},{CT-},{CC-},{RS+}
				=	{RO=}
12	(4,6)(2,3)	=	{RP=}	A	{CA+},{CT-},{CC+},{RS-}
				B	{CA-},{CT-},{CC-},{RS+}
				=	{RO=}

**TABLA 14 (Tomada de Alatorre, 2004)**

**RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS EN  
LAS PREGUNTAS 4, 9, 11 y 13 \***

Preg	Arreglo	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas	
		Dec	Estrategias simples y compuestas	Dec	(Sólo se presentan las estrategias simples)
4	(2,1)(3,2)	A	{RP+}	A	{CT-},{CA-},{CC-}
				B	{CA+},{CC+},{CT+}
				=	{RO=},{RS=}
9	(2,5)(1,3)	A	{RP+}	A	{CA+},{CT+},{CC+},{RS-}
				B	{CA-},{CT-},{CC-},{RS+}
				=	{RO=}
11	(5,2)(7,3)	A	{RP+}	A	{CA-},{CT-},{CC-},{RS-}
				B	{CA+},{CT+},{CC+},{RS+}
				=	{RO=}
13	(3,2)(5,3)	B	{RP+}	A	{CA-},{CT-},{CC-},{RS-}
				B	{CA+},{CT+},{CC+},{RS+}
				=	{RO=}

**TABLA 15 (Tomada de Alatorre, 2004)**

\*En las preguntas de las tablas 14 y 15 no hay correctas que sean centraciones, estrategias compuestas ni respuestas potencialmente correctas.

## 4.5 Niveles de dificultad

Como se mencionó anteriormente, al analizar la estructura numérica de las preguntas de comparación de razones o tasas, Alatorre (2004) definió 86 situaciones distintas. Posteriormente las agrupó en tres niveles de dificultad, que definió de la siguiente manera:

- Un primer nivel (I), está conformado por las situaciones en las que pueden ser correctamente aplicadas, además de las relaciones de proporcionalidad  $RP+$  y  $RP=$ , las relaciones de orden  $RO+$  o bien algunas centraciones; es decir son situaciones que pueden ser exitosamente resueltas con estrategias de comparación. En el cuestionario que se aplicó en esta investigación, son de Nivel I las preguntas 1, 2, 3, 6 y 7 (ver tabla 13 del apartado 4.4.4).<sup>2</sup>
- En un segundo Nivel (II), se encuentran las situaciones de proporcionalidad en las que solamente son correctamente aplicables las estrategias  $RP=$ . Son de Nivel II las preguntas 5, 8, 10 y 12 del instrumento (ver tabla 14, del apartado 4.4.4).
- En un tercer Nivel (III), se ubican las situaciones en las que las únicas estrategias correctamente aplicables son las  $RP+$ . Son de Nivel III las preguntas 4, 9, 11 y 13 del cuestionario aplicado (ver tabla 15, del apartado 4.4.4).

## 4.6 Técnica y materiales para la segunda entrevista

Para la segunda sesión se diseñó un “Protocolo” (Anexo 3) que se llevó a cabo con las cinco maestras. Según el protocolo la entrevista se divide en tres

---

<sup>2</sup>También la pregunta 1 se planteó a las participantes, pero ésta no se utilizó para el análisis, ya que sólo se usó para asegurar que comprendiera el contexto.

partes (A, B y C) y para cada una se estableció un tiempo aproximado, respectivamente de 45, 45 y 30 minutos. A continuación se describen.

La parte A inicia con un breve comentario sobre las intuiciones. Se presenta el documento “Problemas de razonamiento proporcional” (Anexo 4). El contenido de este documento presenta una explicación breve de:

- Los dos tipos de problemas que implican un razonamiento proporcional: los problemas de valor perdido y los problemas de comparación de razones.
- Lo que es un antecedente y un consecuente.
- Los tres tipos de estrategias (estrategias correctas de comparación, estrategias correctas de razonamiento proporcional para situaciones de proporcionalidad y estrategias de razonamiento proporcional para situaciones de no proporcionalidad) que se pueden utilizar para resolver correctamente los problemas planteados durante la primera sesión. En esta parte del material la entrevistadora expone las diversas modalidades de estrategias RP: de igualación, agrupación, factores, de productos cruzados. A cada maestra se le indicará cuál de estas modalidades utilizó con más frecuencia y/o le resulta más intuitiva.
- La comparación de estrategias de distintos tipos, tanto correctas como incorrectas, en preguntas de los tres niveles.

La parte B consiste, propiamente, en una intervención basada en la retroalimentación sobre las respuestas que cada maestra había dado en su primera entrevista.

A su vez, dicha retroalimentación se basa en una proyección comentada del video obtenido en la primera entrevista. Previamente se había analizado el primer video de cada una de las cinco maestras entrevistadas y se había hecho una edición del mismo, con dos características:

- Se tomó exclusivamente la parte más representativa (en cuanto al tipo de estrategia utilizada) de las respuestas de cada maestra durante la primera entrevista. Esto, con el fin de ahorrar tiempo durante la proyección.
- Se reordenaron las respuestas. Durante la primera entrevista los problemas se habían planteado contexto por contexto y en la secuencia de las preguntas que se muestra en el apartado 4.3.2. En la edición se juntaron las respuestas a las preguntas con la misma estructura numérica pero en diferentes contextos, y asimismo se juntaron las respuestas a las preguntas del mismo nivel. El objetivo de este reordenamiento era promover la transferencia a partir de permitir que las maestras observaran las similitudes surgidas, por una parte, de la estructura numérica idéntica y, por otra, del mismo nivel de dificultad.<sup>3</sup>

Además de la edición del video, como parte de la preparación se elaboró un documento personalizado llamado “Preguntas por nivel de dificultad” (Anexo 5) cuyo contenido reproduce las fichas en el orden de la proyección. Tanto este documento como una copia en CD del video editado se le entregaron a cada una de las maestras.

Durante la segunda entrevista se realiza la proyección del video editado de la primera entrevista. Aunque en esta edición están todas sus respuestas, en la parte B de la segunda entrevista no se hace un análisis exhaustivo de todas ellas por falta de tiempo, sino que se hace énfasis en aquellas respuestas en las que la solución era inadecuada, ya sea porque la estrategia elegida era incorrecta, o porque la estrategia era adecuada pero había algún error en su aplicación, o porque la argumentación era incompleta, o porque había algún otro error que se deseaba señalar a la maestra.

En los primeros de estos casos, se suspende la proyección del video de la primera entrevista, y se le propone a la maestra que, con base en la explicación de

---

<sup>3</sup> Cabe aclarar que en las entrevistas de las primeras maestras el orden fue Nivel II, Nivel III, Nivel I, mientras que en las demás el orden fue Nivel I, Nivel II, Nivel III.

la parte A, intente otra respuesta. En los siguientes casos, dependiendo del tiempo transcurrido y del nivel de cansancio manifestado por las maestras, solamente se le señala a la maestra que hay respuestas que ella puede revisar por su cuenta, utilizando el video y el documento personalizado que se le ha entregado.

En la parte C se le presenta a cada una de las maestras un nuevo documento llamado “Banco de problemas de comparación de razones” (Anexo 6) cuyo contenido presenta dos tipos de catálogos: el primero contiene ocho contextos distintos de comparación de razones y dos más que no lo son.

En el segundo catálogo se presentan arreglos numéricos, clasificados en los tres niveles de dificultad. Combinando los contextos del primer catálogo con los arreglos del segundo las maestras pueden obtener una gran cantidad de problemas de diversos niveles de dificultad, que podrían utilizar dentro del aula. Esta última parte se finaliza con un breve comentario sobre la importancia de este tema dentro de la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria.

Por último, cabe señalar que esta segunda entrevista consiste en una intervención basada, por una parte, en los documentos que se les entregaron y fueron elaborados a partir del instrumento de la tesis doctoral de Alatorre (2004), y por otra, en la retroalimentación basada en el video.

Asimismo, es necesario señalar que toda la segunda entrevista también fue video grabada, por lo que se cuenta con las reacciones de las maestras tanto a las explicaciones proporcionadas como al primer video conteniendo sus respuestas iniciales.

#### **4.7 Procedimiento**

Como ya se mencionó, se realizaron dos entrevistas con cada maestra, y ambas fueron videograbadas. La relación entre ambas se puede ilustrar con el siguiente esquema:

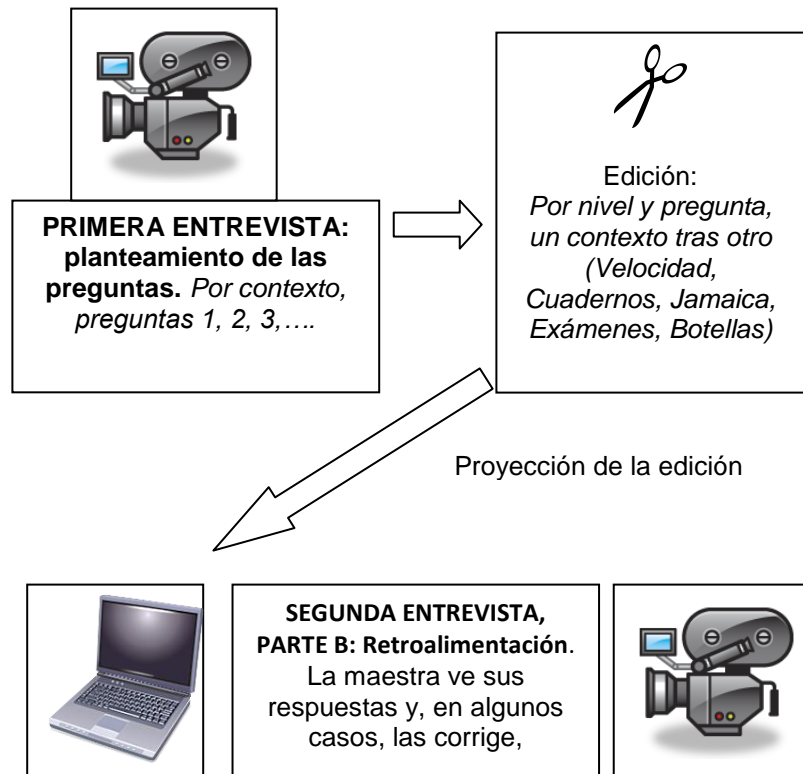


FIGURA 3

#### 4.7.1 Procedimiento en la primera entrevista

Para poder iniciar la primera entrevista se invitaba al e a que:

- Dijera lo que estaba en su mente, no guardándose lo que pudiera considerar como conjetura o idea vaga.
- Hablara en tono que se oyera.

La técnica que se empleó para la entrevista fue la siguiente:

- El entrevistador siempre trató de reducir su participación a un mínimo y se cuestionó a la maestra sólo cuando algo no quedaba claro.
- Para poder entender muy bien el proceso cognitivo que la maestra llevó a cabo, fue escuchada y observada para tener una idea razonable acerca de qué clase de operaciones mentales usaba para resolver los problemas.



- En este sentido la participación del entrevistador se redujo con frecuencia a preguntar en cada respuesta, cuando no era clara, ¿por qué?

En esa primera entrevista se le aplicó el instrumento presentado en tarjetas (ver Anexo 1), se le invitó a dibujar sobre ellas y también se le indicó que podría utilizar una calculadora cuando lo deseara.

Se inició con una pequeña conversación, de la cual se obtuvieron algunos datos generales, como: edad, grados escolares en los que ha impartido clases, si se encuentra laborando frente a grupo, si trabaja ambos turnos y sobre su historia laboral (ver Anexo 2). A cada una de las maestras se le asignó un número para identificarla, el cual corresponde al orden en el que fue entrevistada, lo cual se hizo con el objetivo de omitir su nombre. Así, en este documento las participantes se denominan M1, M2, M3, M4 y M5.

Posteriormente se abordó la entrevista con la aplicación del instrumento, iniciando con el contexto de agua de jamaica. Cada vez que se cambiaba de contexto se exponía el planteamiento general, y posteriormente se presentaban las fichas. Este procedimiento se aplicó para los cinco contextos.

No se preestableció un tiempo para que las maestras respondieran a cada una de las preguntas asignadas.

#### *4.7.2 Procedimiento en la segunda entrevista*

Después de la primera entrevista realizada a cada una de las maestras, se editó el video para extraer la parte más representativa de cada respuesta dada, con el fin de obtener los argumentos presentados arreglo por arreglo en cada uno de los cinco contextos.

Para la segunda entrevista el procedimiento que se llevó a cabo se apegó al protocolo planeado (Anexo 3), mismo que se describió brevemente en la sección 4.6. Ahora se planteará un poco más detalladamente.

La entrevistadora comenzaba haciendo un breve comentario a cada una de las maestras del porqué de una segunda entrevista, y también les explicaba los tipos de problemas de razonamiento proporcional que existen. Posteriormente la entrevistadora les entregaba y les explicaba a las maestras el contenido del documento “Problemas de razonamiento proporcional” (Anexo 4).

Posteriormente se les proyectaba un video de la primera entrevista editada, que contenía las respuestas que ella había dado anteriormente a las situaciones planteadas. Se le explicaba a cada maestra que las imágenes presentadas en el documento “Preguntas por nivel de dificultad” (Anexo 5) eran las tarjetas reproducidas de las preguntas planteadas durante la primera entrevista y que estaban acomodadas de manera horizontal todas las preguntas 7 de los cinco contextos (Cuadernos, Velocidad, Botellas, Exámenes y Jamaica) y sucesivamente se le presentarían todas las preguntas que pertenecieran a cada nivel.

Para poder dar inicio a la proyección del video se les explicaba a las maestras que el documento presentaba todas las preguntas indicando con sombreados de color si eran preguntas a las que habían respondido correctamente, o bien preguntas en las que les sugeríamos que intentaran otra manera de solucionarlas (esto, es sin decirles que habían sido respuestas incorrectas), o bien preguntas del instrumento que no les habían sido planteadas en la primera entrevista.

Este documento sirvió como guía para que las maestras siguieran el curso del video y también para que la entrevistadora detuviera la grabación para proponer que la maestra diera una respuesta alternativa: se le preguntaba ¿cómo lo podía resolver ahora? La intención de esto era promover que la maestra intentara utilizar alguna de las estrategias propuestas en el documento “Problemas de razonamiento proporcional” (Anexo 4).

En la última parte de la sesión se le explicaba a cada una de las maestras el documento llamado “Banco de problemas de comparación de razones” (Anexo

6) y la entrevistadora preguntaba sobre la importancia de este tema dentro de la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria.

Finalmente la entrevistadora invitaba a cada una de las maestras a revisar los contenidos de los documentos entregados y, si ellas consideraban que podían surgir dudas, a acudir con el equipo de trabajo para poderlas aclarar, enviando un correo electrónico.

De igual forma no se debe soslayar que una parte de la metodología utilizada en esta investigación, aquella relativa a la función de la retroalimentación a cada una de las cinco maestras que se realizó en la segunda entrevista, fue similar a la utilizada en la investigación chilena expuesta en el capítulo I.

#### **4.8 Metodología para el análisis de los resultados**

El análisis de los resultados se emprendió de dos maneras complementarias: un análisis cuantitativo y uno cualitativo. Estas dos maneras se llevaron a cabo para comparar los distintos contextos entre sí por una parte y los distintos niveles de dificultad entre sí por otra. Estas dos comparaciones se reportan en Flores (2010). En este trabajo se harán los análisis y comparaciones de los resultados obtenidos por cada una de las cinco maestras, tanto en sus respuestas a las preguntas planteadas durante la primera entrevista como en lo acontecido durante la segunda entrevista.

El análisis por cada maestra se realiza en cuatro etapas; las primeras tres a partir de la información recabada en la primera entrevista y la última a partir de lo ocurrido en la segunda entrevista. El análisis inició con la clasificación de sus respuestas en estrategias según Alatorre (1994, 2004). A partir de dicha clasificación se hicieron dos procedimientos. Uno de ellos de forma cuantitativa, para la cual se dio un valor de corrección a cada respuesta (ver apartado 4.8.1), y consecuentemente se clasificaron globalmente las respuestas de cada maestra en uno de diversos grupos (ver apartado 4.8.2). El segundo procedimiento se realizó

de forma cualitativa; se presenta en el apartado 4.8.3. Finalmente se analiza de manera cualitativa lo ocurrido en la segunda entrevista (ver apartado 4.8.4).

Cabe mencionar que todos los tipos de análisis que se presentan se complementan entre sí para obtener un mejor análisis del comportamiento de cada una de las cinco maestras.

#### *4.8.1 Metodología para el análisis cuantitativo*

De acuerdo con las distintas clases de estrategias que usaron las entrevistadas, en este trabajo se consideraron tres tipos de respuestas según su corrección: correctas, potencialmente correctas e incorrectas. Alatorre (2004) arguye que desde un punto de vista estricto, sólo se puede considerar como correctas las respuestas marcadas como tales, y por lo tanto son las únicas que deben considerarse para esa contabilidad.

Sin embargo agrega que desde un punto de vista menos estricto, también las respuestas denominadas “potencialmente correctas” podrían ser consideradas como correctas; en todo caso no son marcadamente incorrectas, aunque desde luego tampoco son “totalmente” correctas. Para esta autora la opción intermedia ha sido la construcción de un “Puntaje Índice de Corrección” (PIC) calculado de la siguiente manera:

- A cada respuesta correcta se le asigna un punto.
- A cada respuesta potencialmente correcta se le asigna medio punto. También se asigna medio punto a las respuestas con elección correcta (A, B o da igual) pero sin justificación clasificada en estrategias (por ejemplo, las descripciones).
- A cada respuesta incorrecta se le asigna cero puntos.

Para cualquier conjunto de respuestas se suman los puntos así obtenidos en el conjunto y se expresa la suma como un porcentaje del total de respuestas del conjunto.

El PIC es entonces un indicador del nivel de resultados correctos que alcanza una persona en diversos grupos de respuestas. El análisis cuantitativo que permite el PIC no es la única vía de análisis, sino un complemento para un análisis cualitativo acerca del tipo de estrategias utilizadas en cada grupo de respuestas. En la tabla 16 se señalan el tipo de respuestas correctas y potencialmente correctas que se pueden llegar a usar en cada nivel. Cabe aclarar que las estrategias que no aparecen en la tabla son todas incorrectas (por ejemplo, RO= aplicable en los Niveles II y III, o las estrategias RS+ y RS=, aplicables en todos los niveles).

Nivel	preg	CORRECTAS: valen 1			POTENCIALMENTE CORRECTAS: valen 0.5	
I	2	CA+&CC-	CA+*CT=	RO+, RP+	CA+	S/J Descripción  Siempre y cuando acompañen la respuesta correcta
	3	CC-*CA=	CT-*CA=	RO+, RP+	CC-, CT-	
	6	CA+*CC=	CT+*CC=	RO+, RP+	CA+, CT+	
	7	CC-				
II	5, 8, 10, 12	RP=				
III	4, 9, 11, 13	RP+				

**TABLA 16 (Tomada de Flores, 2010)**

#### 4.8.2. Comportamiento de acuerdo al nivel de dificultad

A partir de los valores PIC obtenidos por cada persona en las Niveles I, II, y III (ya sea por contexto o en forma global), Alatorre (2004) describió cuatro comportamientos típicos, que denominó A, B, C y D.

El comportamiento tipo A tiene las siguientes características (ver Figura 4):

- Valores relativamente altos en el Nivel I
- Valores bajos o muy bajos en el Nivel II

- Valores muy bajos en el Nivel III.

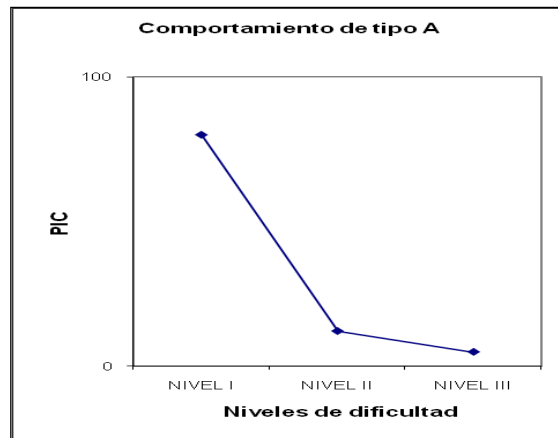


FIGURA 4

Las personas con comportamiento tipo A dan respuestas correctas de comparación en las preguntas del Nivel I, pero estas estrategias no permiten la resolución en el Nivel II ni en el III.

El comportamiento tipo B tiene las siguientes características (ver Figura 5):

- Valores altos en el Nivel I
- Valores medios en el Nivel II
- Valores bajos en el Nivel III

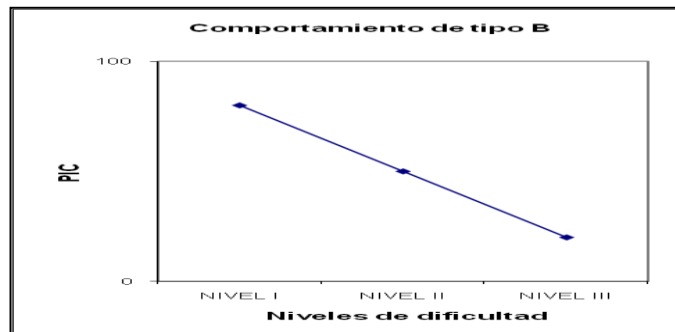
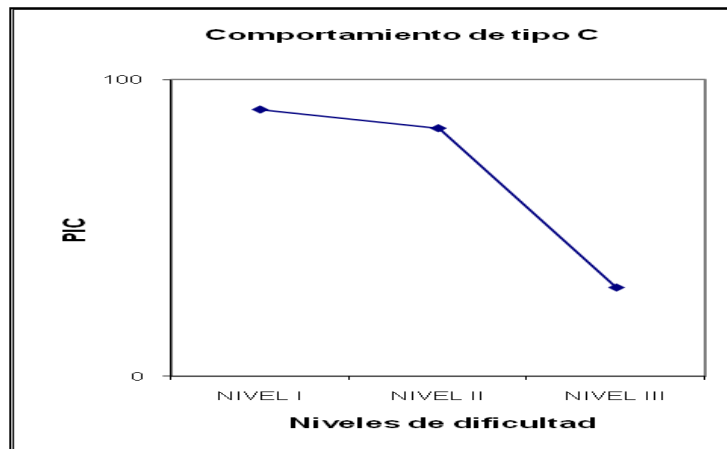


FIGURA 5

En este comportamiento los valores PIC en el Nivel de dificultad II están cerca de la mitad entre el Nivel I y el III, lo que hace que las gráficas sean cercanas a las líneas rectas. En este grupo se encuentran respuestas con un uso adecuado de estrategias de comparación en el Nivel I, y algunos usos de RP= en el Nivel II. Sin embargo, las aplicaciones de RP+ en el Nivel III son menos exitosas que las de RP= en el Nivel II.

El comportamiento tipo C tiene las siguientes características (ver Figura 6):

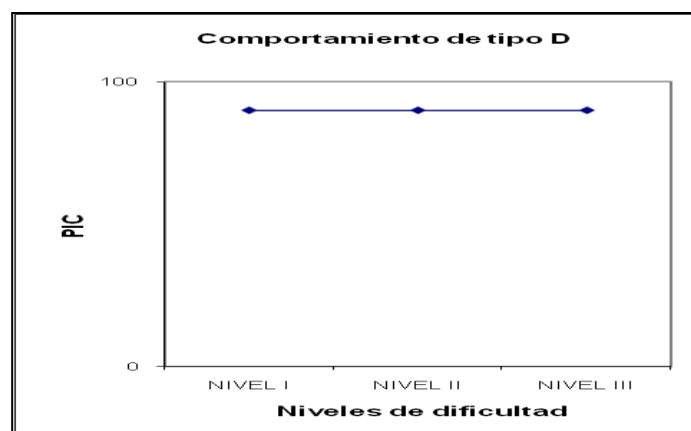
- Valores altos en el Nivel I
- Valores en el Nivel II prácticamente a la par con el Nivel I
- Valores relativamente bajos en el Nivel III

**FIGURA 6**

En este grupo se encuentran usos diferentes tanto en estrategias de comparación como de RP en el Nivel I y con la misma eficiencia en usos de RP= en el Nivel II, pero todavía se detectan algunas dificultades para el uso de RP+ en el Nivel III.

Finalmente, el comportamiento tipo D tiene la siguiente característica (ver Figura 7):

- Los valores que se alcanzan en los tres Niveles I, II y III son prácticamente los mismos, es decir, altos.

**FIGURA 7**

En estas respuestas no hay dificultad ni para aplicar estrategias de comparación en el Nivel I, ni para aplicar RP= en el Nivel II, ni para aplicar RP+ en el Nivel III.

En resumen, los cuatro comportamientos se presentan de acuerdo con los siguientes valores PIC, que representan la calidad de las respuestas:

COMPORTAMIENTO	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III
<b>A</b>	Altos	Bajos o muy bajos	Muy bajos
<b>B</b>	Altos	Medios	Bajos
<b>C</b>	Altos	Altos	Bajos
<b>D</b>	Altos	Altos	Altos

**TABLA 17 (Tomada de Alatorre, 2004)**

Estos cuatro comportamientos típicos surgen de lo cuantitativo, pero también dan información cualitativa. Se pueden entender como una graduación en la calidad de las respuestas, de la más baja (A) a la más alta (D).

#### 4.8.3 Análisis cualitativo de la primera entrevista

Este análisis se realizó a partir de las siguientes tablas:

Por cada maestra se llenó una tabla (ver tabla 18). En cada celda se escribió la clasificación de la estrategia utilizada.

MAESTRA “ ”						
NIVEL	PREG	CONTEXTOS				
		Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas
I	2					
	3					
	6					
	7					
II	5					
	8					
	10					
	12					
III	4					
	9					
	11					
	13					

**TABLA 18**



Así, las tablas y las gráficas permitieron realizar un análisis cualitativo y cuantitativo que se retroalimentaron mutuamente. Cabe señalar que el análisis cuantitativo no fue un análisis estadístico, ya que no se cuenta con muestras representativas ni de la población de maestros (ya que lo que se tiene es un estudio de casos) ni del conjunto de posibles respuestas de cada una de ellas. Así mismo, estas herramientas permitieron comparar los comportamientos de las distintas maestras, y verificar si los niveles de dificultad efectivamente funcionan como tales, cuáles son las estrategias más utilizadas en los distintos tipos de contextos, etc.

#### *4.8.4 Análisis de la segunda entrevista*

El informe que se muestra de la segunda entrevista fue realizado a partir del planteamiento del protocolo (Anexo 3) dividiendo la segunda entrevista en tres partes (A, B y C). Debe recalarse que el objetivo principal de esta segunda entrevista tenía un carácter más de intervención a través de una retroalimentación que de investigación. A pesar de ello, los videos de esta segunda entrevista pueden dar pie a un análisis que hasta cierto punto puede indicar la efectividad de la retroalimentación. Esto se reporta parte por parte enfatizando lo siguiente.

En la parte A, después de la explicación dada por la entrevistadora sobre las estrategias aplicables a este tipo de problemas de razonamiento proporcional, se hizo un registro sobre las opiniones que dieron las maestras al poder reconocer qué estrategia habían utilizado y si lo hicieron de manera correcta o incorrecta.

En la parte B se observó la reacción dada por cada una de las maestras entrevistadas después de haber visto cada respuesta incorrecta o incompleta de su primera entrevista. Esto sucedía en el momento en que la entrevistadora detenía la grabación y preguntaba “¿ahora cómo lo resolvería?” o “¿ahora cómo lo ve?”.

Al haber preguntado de esta manera a cada una de las maestras entrevistadas y obtenido una nueva respuesta nos manifestaba si la explicación

dada sobre las estrategias aplicables a estos problemas le había permitido hacer un auto análisis del procedimiento incorrecto o incompleto que había utilizado durante su primera respuesta, y si había podido corregirla. Además se pretendía conocer qué tipo de estrategia le era más fácil de manejar a cada una. El análisis se basa en ejemplos de algunas de las respuestas de las maestras en ambas entrevistas.

En la parte C se presenta el comentario que realizaron las maestras sobre la enseñanza de este tipo de problemas de razonamiento proporcional a los alumnos de tercero a sexto año de Primaria.

## **CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS**

Como se señaló en el capítulo anterior, el análisis de las respuestas de las profesoras en la primera y segunda entrevistas se realizó a través de la observación de los videos, lo que permitió extraer los argumentos o partes más representativas de sus respuestas y clasificarlas en un primer momento, y posteriormente conocer si la retroalimentación que se les dio en la sesión de espejo causó algún efecto en cada maestra. A cada maestra se le asignó un número que correspondía al orden en el que fueron entrevistadas: M1 a M5 (ver Anexo 2 “Semblanza de las maestras”).

El análisis de los resultados se realizó en dos momentos. En el primero de ellos se analizó el efecto de los distintos niveles de dificultad y de los distintos contextos en las respuestas de las maestras. En el segundo momento el análisis fue sobre cada una de las cinco docentes entrevistadas. El análisis del primer momento se encuentra reportado en Flores (2010); aquí se presenta un breve resumen de los resultados encontrados, y este trabajo se dedica al análisis del segundo momento.

### **5.1 Resultados por niveles de dificultad y por contexto**

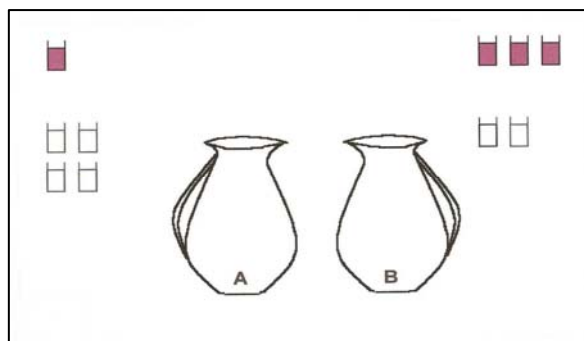
#### *5.1.1 Resultados por niveles de dificultad*

En este apartado se tratarán de manera global las regularidades más representativas encontradas en el uso de estrategias en los distintos niveles de dificultad.

Las cinco maestras entrevistadas obtuvieron un promedio PIC superior en el Nivel I de los tres niveles de dificultad de las preguntas. Una de las regularidades encontradas en las preguntas de este nivel fue que las maestras

utilizaron con frecuencia las estrategias de comparación, que son más fáciles que las RP.

Por ejemplo, en el contexto de Jamaica, ante la pregunta 2 con arreglo (1,4)(3,2) (ver la figura 8), una estrategia de comparación “dentro” puede ser RO+ con el argumento “B sabe más porque tiene más jamaica que agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua”, y una estrategia de comparación “entre” puede ser la centración compuesta CA&CC-, con el argumento “B sabe más porque tiene más jamaica que A y menos agua que A”. Otro hallazgo fue que las maestras usaron más centraciones compuestas en los problemas de tasas (Velocidad y Cuadernos) y más relaciones RO+ en los de mezcla (Jamaica, Exámenes y Botellas).



**FIGURA 8**

El Nivel II a las maestras les resultó un poco más complicado que el Nivel I probablemente por el hecho de que en este nivel las estrategias de comparación ya no son correctas; la pregunta donde a las maestras se les facilitó más utilizar la estrategia RP= fue en la 5. Los errores que se encuentran en este nivel corresponden a algunas estrategias de comparación y de relaciones aditivas RS+, que fueron utilizadas por algunas maestras.

La mayoría de los errores cometidos por las maestras se encuentran en el Nivel III; la pregunta que más se les dificultó a las maestras fue la 4. Comparando con el Nivel II, aumentó considerablemente el uso de estrategias de comparación y de relaciones aditivas RS+; sin embargo hay también una pregunta (la pregunta

9) en donde en los contextos de tasas RP+ es la única estrategia que utilizaron las maestras.

La cantidad de errores cometidos por las maestras con respecto a la cantidad total de respuestas en cada nivel, fue aumentando por nivel. Por ello los resultados obtenidos en los tres niveles de dificultad por las maestras entrevistadas actuaron de acuerdo a lo reportado por Alatorre (2004) porque obtuvieron promedios PIC decrecientes.

### *5.1.2 Resultados por contextos*

De acuerdo a los contextos se puede decir que en los tres niveles de dificultad a las maestras les resultó más fácil obtener mejores resultados en los contextos de tasas, mientras que los contextos de mezcla aparentemente les resultaron más complicados. Como se indicó arriba, una característica de las estrategias usadas por las maestras en el Nivel I es que usaron más centraciones (entre objetos) para los contextos de tasas, en cambio en los contextos de mezcla usaron más RO+ (dentro de objetos).

De los cinco contextos, el de Jamaica fue en donde globalmente las maestras obtuvieron el promedio PIC más bajo de todos los contextos, en los tres niveles de dificultad. Esto se debió quizá, a que fue el primer contexto que se les presentó, o que, como lo expresó la maestra M1, es un contexto muy familiar y no le prestan mucha atención.

## **5.2 Consideraciones metodológicas sobre las entrevistas y sobre la presentación de resultados**

En el apartado sobre el procedimiento (ver capítulo anterior), se indicó que para la primera entrevista las maestras no tendrían un tiempo definido para responder a cada pregunta que se les planteara, sin embargo para el tiempo total de la entrevista sólo se dispuso de dos horas para que las maestras contestaran a

las preguntas de los cinco contextos. Por el poco tiempo disponible se decidió que, para ahorrarlo y así mismo no cansar a las maestras, se realizarían las siguientes acciones:

- Como se indicó en los apartados sobre la técnica y sobre las estructuras numéricas, no todas las preguntas preestablecidas (65 preguntas en total) se plantearon a las maestras; eso dependió del tipo de respuestas que cada una fue dando a lo largo de cada contexto. Por ejemplo, cuando las primeras respuestas del Nivel II (estructuras numéricas 5, 8 y 10) y las primeras respuestas del Nivel III (estructuras numéricas 4 y 9) no fueron RP= o RP+, no se plantearon las últimas dos preguntas de cada uno de estos niveles
- No se les plantearon algunas preguntas intermedias si se observaba que un comportamiento era persistente, no importando si las respuestas eran correctas e incorrectas.
- En algunas ocasiones las maestras no justificaban sus respuestas y para no estar preguntando el porqué de su decisión se decidió dejar hasta ahí los cuestionamientos ya que en algunas preguntas, por ejemplo la 7, la decisión es demasiado obvia para algunos sujetos.

En dos entrevistas se cometieron ciertos errores. El primero se cometió con M1 a quien se le indujo a usar la estrategia RP+ en el contexto de Exámenes, debido a que se le preguntó por la calificación que tenía la niña en cada uno de los exámenes, cuando tal vez no era la intuición de la maestra. El segundo error se debió a un error técnico con la videograbación en la entrevista de M3, por tanto a la maestra se le plantearon por segunda vez sólo algunas de las estructuras numéricas de todos los contextos; en particular, como había contestado correctamente las preguntas del Nivel I, éstas en su mayoría ya no se le volvieron a plantear.

Los contextos fueron presentados a las maestras en el siguiente orden: Jamaica, Cuadernos, Botellas, Velocidad y Exámenes. Este orden podría indicar por qué las maestras tuvieron tantos errores en Jamaica (desconcierto) y el porqué de los errores en exámenes (efecto de cansancio).

Para la segunda entrevista se estableció un protocolo que pretendía que la sesión durara dos horas, pero esto no fue posible debido a que la entrevista se realizó en un horario laboral. Algunas maestras tuvieron que interrumpir la sesión en algunas ocasiones para tratar asuntos laborales y escolares.

La explicación que se les dio a las maestras sobre las estrategias correctas e incorrectas que se podían utilizar para contestar este tipo de problemas (parte A de la segunda entrevista), se hizo de manera concreta, sin entrar a detalle de los errores o respuestas incompletas que dieron las maestras.

Durante la presentación del video de cada maestra (parte B) para el Nivel I no fue necesario detener la grabación porque las maestras no tuvieron complicación alguna y para ahorrar tiempo. El tiempo que se le dedicó a los Niveles II y III por cada maestra fue considerable al tener que detener la grabación para que cada una de las maestras conociera su error, lograra entender por qué había sido incorrecta o incompleta en su caso su respuesta, y corrigiera esa estrategia.

En las siguientes secciones se presenta el análisis de los resultados de las entrevistas, enfocado a las maestras. Este análisis se presenta desde tres perspectivas por cada maestra.

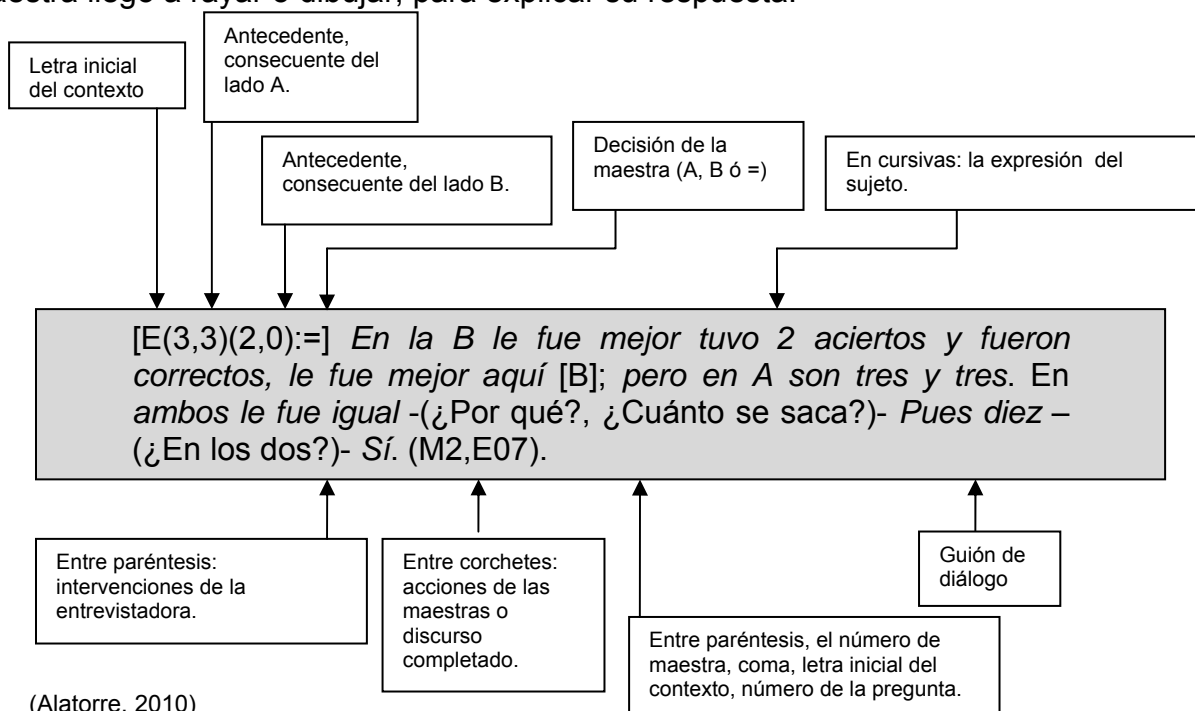
1. La primera perspectiva se centra en un análisis cuantitativo y un análisis cualitativo de sus estrategias utilizadas durante la primera entrevista.
2. La segunda perspectiva se presenta en los tres momentos de la segunda entrevista. El primero de ellos (la parte A) resume de manera breve lo que sucedió al inicio de la segunda entrevista. En un

segundo momento (parte B) se presenta lo que sucedió cuando las maestras conocieron sus estrategias incorrectas o incompletas en su caso y se les pidió que dieran un nuevo argumento para resolver dicha situación. En el tercer momento (parte C) se presenta el comentario que realizaron las maestras sobre la enseñanza de este tipo de problemas de razonamiento proporcional a los alumnos de tercero a sexto año de Primaria.

3. Por último se hace un análisis global de lo sucedido durante las dos entrevistas realizadas a cada maestra.

Para el análisis cualitativo de la primera entrevista y el análisis de la segunda entrevista en la parte B, se muestran ejemplos a través de un formato común (Alatorre, 2004) de las respuestas de las maestras. En algunas ocasiones, se reproducen las partes más significativas, ya que las maestras tardaban en dar sus respuestas, o bien eran repetitivas o descriptivas.

El formato se muestra a continuación con un ejemplo de respuesta. Cabe agregar que en ocasiones se acompaña a las respuestas con la ficha que la maestra llegó a rayar o dibujar, para explicar su respuesta.





### 5.3 Maestra M1

La maestra M1 tiene 34 años de edad, fue maestra ante grupo por 3 años, impartió dos años en 2<sup>do</sup> y un año en 1<sup>ro</sup> de primaria. Ahora está como apoyo técnico; al igual principio de esta labor trabajó con un grupo de 6<sup>o</sup> grado por seis meses, para cubrir a una maestra que se había ido.

La primera entrevista se realizó cuando se estaban impartiendo los talleres de Tamba y se le pidió una opinión sobre el único taller al que había asistido, “Decimales”. M1 comentó que era necesario tener una actualización sobre estos temas, y dijo que para ella fue una experiencia nueva para conocer un poco más y ayudar al alumno. Comentó que al tomar ese grupo de 6<sup>o</sup> se percató que los alumnos no sabían ubicar el punto decimal y ella pensó que los alumnos ya manejaban ese tema y tuvo que verlo de nuevo para poder resolver las dudas que los niños tenían.

En la actualidad la maestra labora en ambos turnos; en dicha actividad tiene dos años de experiencia. Las dos actividades que ha realizado en el contexto educativo le han gustado. Durante las entrevistas siempre tuvo una actitud positiva (alegre, entusiasta, etc.).

#### 5.3.1 Primera entrevista

La maestra M1 fue una persona muy dispuesta, atenta con el grupo de trabajo que llevó a cabo la entrevista. Cuando la entrevistadora le pedía de nuevo una explicación, M1 siempre respondía de buena manera. No hubo interrupciones durante la sesión, y tuvo una duración de 75 minutos.

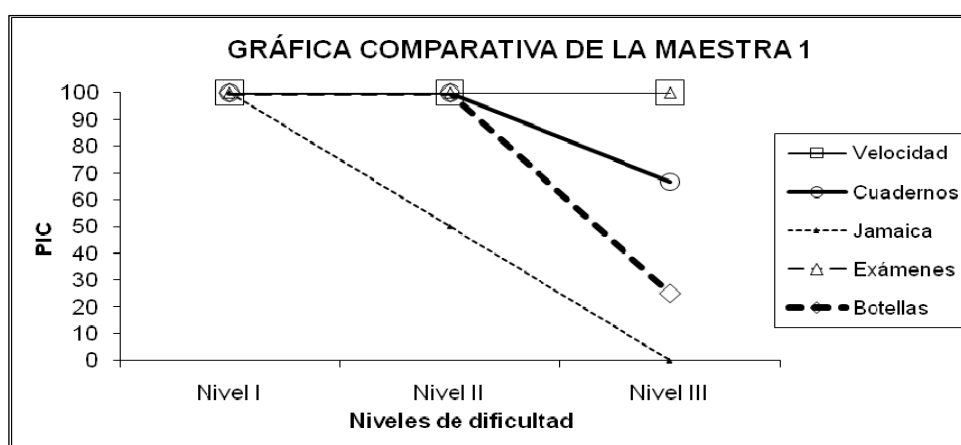
#### Análisis cuantitativo

En la tabla 19 se reporta los promedios PIC que obtuvo M1 en los tres niveles de dificultad en los cinco contextos del instrumento y en la Figura 9 se

muestra el comportamiento global que tuvo en los tres niveles de dificultad por contexto.

PIC	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas	TOTAL
Nivel I	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Nivel II	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	88.2
Nivel III	100.0	66.7	0.0	100.0	25.0	53.3
<b>TOTAL</b>	100.0	90.9	54.5	100.0	75.0	82.0
<b>TIPOS DE GRÁFICOS</b>	D	C	B	D	C	B

**TABLA 19**

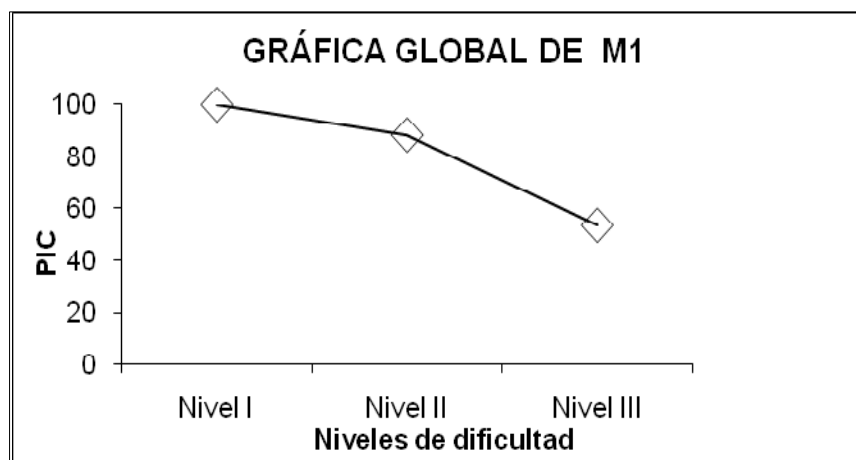


**FIGURA 9**

El tipo de comportamiento que presenta M1 en Velocidad y Exámenes es D, en Cuadernos y Botellas es C, finalmente en Jamaica es B. Es decir, sólo tuvo correctos dos contextos: uno de tasa (Velocidad) y otro de mezcla (Exámenes), sin embargo, para el segundo contexto hay que recordar que la estrategia RP fue inducida.

Para los contextos de Cuadernos (tasa) y Botellas (mezcla) los resultados obtenidos en los Niveles I y II son semejantes, aunque en el contexto de Cuadernos obtuvo un mejor resultado en el Nivel III que en el de Botellas. El contexto de Jamaica es en el que obtiene el promedio más bajo de todos los contextos; sólo el Nivel I le resultó ser igualmente fácil a los otros contextos, para el Nivel II obtiene la mitad del promedio PIC correspondiente al Nivel I (no reconoció las situaciones de proporcionalidad) y el Nivel III le resultó imposible.

En la Figura 10 se reporta el promedio global de M1 en los tres niveles de dificultad. Se observa que en el Nivel I obtuvo el mejor promedio en todos los contextos, en el Nivel II obtuvo un promedio mayor a 80 y las preguntas del Nivel III fueron las más difíciles de resolver al tener que utilizar sólo RP+ como estrategia: aquí obtuvo un promedio de 53.3.



**FIGURA 10**

El comportamiento global que obtiene M1 en los tres niveles de dificultad corresponde al grupo B, porque en el Nivel II obtiene resultados intermedios.

### Análisis cualitativo

En la Tabla 20 se muestran las estrategias que utilizó M1 para resolver las preguntas planteadas dentro de los tres niveles en los cinco contextos.

En el Nivel I utilizó adecuadamente como estrategia las centraciones y RO+, y en algunas ocasiones utilizó RP. Respecto al Nivel II utiliza RP=, pero le resulta complejo manejar RP+ como estrategia en el Nivel III. En el Nivel III se encuentran errores: además de un solo CA+ en el contexto de cuadernos, ella usó sobre todo relaciones aditivas RS+ y RPS en los contextos de Jamaica y Botellas. Sin embargo la maestra también tuvo dos intentos de RP en Botellas.

En los problemas de tasa (Velocidad y Cuadernos) la estrategia que utilizó más frecuentemente fue RP en los Niveles II y III, mientras que en el Nivel I la estrategia que utilizó fueron centraciones compuestas.

Para los problemas de mezcla encontramos la mayoría de errores en el contexto de Jamaica al utilizar estrategias aditivas y llegó a utilizar sólo dos veces RP, en el Nivel I recurre a las RO+ y alguna estrategia de centración.

En el contexto de Exámenes la estrategia que utilizó frecuentemente fue RP (de manera inducida); también las utiliza en el contexto de Botellas dentro del Nivel II. Los errores de este contexto se encuentran sólo en el Nivel III.

MAESTRA "M1"						
NIVEL	Preg	CONTEXTOS				
		VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
I	2	CA+&CC-	CA+&CC-	RO+	RP+	RO+
	3	CC-*CA=	CA-*CA=	RO+	RP+	RO+
	6	CA+*CC-	CA+*CC=	RO+	RP+	RO+
	7		CC-	CC-		CC-
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8	RP=	RP=	RS+		RP=
	10		RP=	RS+		RP=
	12	RP=	RP=	RS+	RP=	RP=
III	4	RP+	CA+	RS=	RP+	RP'
	9	RP+	RP+	RS+		RP'
	11	RP+	RP+	RPS		RPS
	13				RP+	RP+

**TABLA 20**

### 5.3.2 Segunda entrevista

El escenario en el que se desarrolló la entrevista fue muy ruidoso (tenían una grabadora con alto volumen, había una plática de otras maestras, y fue durante el recreo). La entrevista tuvo una duración de una hora y media aproximadamente.

Parte A: Explicación de las estrategias

En esta parte la entrevistadora le dijo a M1 que cuando se le enseña algo nuevo a un niño se debe hacer de muchas maneras, porque muchas veces los niños sólo aprenden de una manera y no reconocen que pueden utilizar otros métodos. Durante el transcurso de la entrevista se le dijo a M1 que la importancia de la transferencia dentro de la enseñanza es decir “si yo aprendo las cosas en un contexto debo saber cómo transfiero ese aprendizaje de un contexto a otro contexto”. Como ejemplo se le indicó a M1 que cuando se le enseña a un niño el sistema decimal de numeración lo hacemos utilizando fichitas o dibujitos y en esta situación no estamos promoviendo la transferencia, porque sólo le estamos enseñando un método al niño. La maestra M1 dijo a este comentario que no se había dado cuenta de que a veces los maestros no reconocen lo que intenta hacer el alumno dentro del salón de clases para su propio aprendizaje, cuando no coincide con las formas enseñadas por ellos.

Durante la explicación la entrevistadora le dijo a M1 que dentro de las estrategias RP, la estrategia de igualación fue la que ella había utilizado más para responder a las situaciones planteadas durante la primera entrevista. M1 dijo que sí recordaba que la había utilizado, pero no en dónde la utilizó más. La entrevistadora le insistió a M1 que había muchas formas de resolver estos problemas de razonamiento y que ella podía utilizar adecuadamente la que más se le facilitara.

M1 volvió a considerar que a veces uno como maestra “se encuadra con el resultado” porque debe ser “como a mí me lo enseñaron” y que al “no hacerle caso al método que el niño me está mostrando, puedo confundir al niño (me quedo con mi método y no acepto el método del niño, aunque su resultado sea el correcto)”.

Parte B: intervención

## Nivel II

En este nivel M1 tuvo dos estrategias incorrectas al utilizar RS+ en su primera entrevista. Posteriormente al presentarle las estrategias que utilizó, logró corregir sus respuestas. A continuación se ejemplifican algunas de sus respuestas incorrectas y posteriormente se muestra la respuesta que dio en su segunda entrevista.

En la pregunta 8 (2,1)(4,2) en el contexto de Jamaica, M1 utilizó RS+ como estrategia incorrecta durante su primera entrevista:

[B (2,1)(4,2):B]: *La B, porque tengo cuatro concentrados por dos de agua y aquí tengo dos concentrados por uno de agua [A]. – (Pues sí, pero ¿qué hay en esos dos y esos cuatros y en esos dos y en ese uno, que le hacen saber que es la B, la A o da igual?)-. Es ésta [B] porque tiene dos más de concentrado y ésta sólo tiene uno [A]. (M1, J08).*

En la segunda entrevista la maestra M1 reconoce que hay una igualdad en ambos casos, porque “por uno de agua son dos de concentrado para ambas jarras”: la estrategia que utilizó fue RP=. La entrevistadora le dice que lo hizo muy bien, y que debe tener en cuenta que a la hora de responder lo tiene que pensar dos veces, para llegar al resultado correcto y de la forma correcta. Que el contexto de Jamaica fue como para “calentar motores” y por eso le resultó difícil, aunque en general es más fácil que el contexto de Botellas, porque son problemas de azar.

En la pregunta 12 (4,6)(2,3) M1 dijo “voy a pagar \$18 por 12 cuadernos, aquí también voy a pagar \$18 por 12 cuadernos” y la entrevistadora le comentó a M1 que la estrategia que utilizó en el contexto de Cuadernos fue la de igualación pero que el proceso fue innecesariamente largo, porque no necesitaba multiplicar A por 3 y B por 6 para llegar a un número igual (\$18), sino que bastaba con multiplicar B por 2: en ambas tiendas se pagan \$6 por 4 cuadernos. M1 reconoció que no era necesario hacer una lista tan grande, que era suficiente si se percataba en dónde se *aparecía* la igualación de ambos números.

La entrevistadora le dijo a M1 que las estrategias que había utilizado en Exámenes eran de cálculo de cocientes, que eran más formales y que durante la primera entrevista ella la había conducido a que fuera de esta manera, al preguntarle qué calificación se sacaba la niña.

En la pregunta 12 (4,6)(2,3) del contexto de Jamaica M1 utilizó RS+ como estrategia incorrecta durante la primera entrevista:

[B(4,6)(2,3):B]. *Para mí el concentrado estaría en ésta [B] -(¿Por qué?)- Porque en ésta sólo me sobra un vaso de agua [B] y en ésta dos vasos de agua [A]. -(Fíjese, maestra, que ayer que estábamos aplicando esta entrevista con otra maestra, la maestra dijo aquí algo chistoso: ella dijo aquí en B tengo estas dos con estas tres y para A tengo estas dos con estas tres, y estas dos con estas tres, entonces da igual, y entonces ¿usted qué opina?)- Pues que sí, pero sólo que en éste es mayor la cantidad de líquido [A]. -(Pero entonces ¿cómo calibra usted?, pues usted me dijo que en B sólo sobra una y es cierto, y en A me sobran dos y es cierto, y entonces tiene más agua ésta [A] que ésta [B] y entonces usted dice tiene más sabor la B, y la otra maestra dijo que da igual)-. Lo que pasa es que yo me fui por lo que es la percepción – (¿Entonces la otra maestra la convence a usted?)-. No, [aunque] porque suena lógico lo que ella esta diciendo.(M1, J12)*

En la segunda entrevista la entrevistadora le comenta que ella había utilizado una estrategia de resta y que el argumento era incompleto porque se debían repartir los residuos. M1 dice que debería haber repartido los que quedaban: debía haber repartido esos dos vasos de agua que se diluían en cuatro vasos de concentrado en A, y ese vaso de agua en dos vasos de concentrado en B. M1 se da cuenta que B es el doble de A al hacer los repartos y que en ambas jarras es lo mismo.

La entrevistadora le comenta a M1 que lo que había dicho sobre la percepción es importante y que en estas situaciones el dibujo puede engañar. M1 reconoce que el contexto de Jamaica le costó más trabajo; la entrevistadora le comenta que a lo mejor fue porque fue el primero que se planteó, y M1 le dice que no, que ella cree que fue por la percepción.

La entrevistadora le dice que en los problemas de azar ella tiene esa “banderita” que nos indica que debemos estar alertas, y que cuando reconoce que son problemas de azar le piensa un poco más que cuando vemos que son vasos de agua y vasos de jamaica, que es algo más cotidiano. M1 reconoce que es más sencillo “pensar hacer agua de jamaica que pensar en algo que no ha hecho”.

### *Nivel III*

En la primera entrevista M1 resolvió la pregunta 9 con la estructura numérica en el contexto de Jamaica con RS+. En la segunda entrevista intenta utilizando la estrategia de reparto, pero aún no logra entender qué hacer con los vasos que “según sobran” y la entrevistadora le explica que también tiene que repartirlos entre los vasos que tenga (sean de concentrado o de agua) y M1 logra reconocer qué debe hacer cuando existen sobrantes.

En la pregunta 4(2,1)(3,2) en Cuadernos, la maestra M1 utilizó CA+ (la única centración dentro de este nivel) en la primera entrevista:

[B(2,1)(3,2):B]: *Aquí me dan más [B]. – (¿Aunque le pidan más monedas?) - Pues sí.* (M1, J04).

Después de observar durante la segunda entrevista la respuesta de la pregunta 4 la entrevistadora le pide a M1 que resuelva de nuevo esta situación. M1 utiliza como estrategia la de igualación para poder responder la pregunta 4, pero en el procedimiento realiza nuevamente una tabla innecesariamente larga de igualación, y la entrevistadora interviene para explicarle que no es necesario realizar una tabla tan larga, porque la igualación se encuentra cuando aparece un número que sea igual al que ya tenemos. La entrevistadora le explica a M1 un argumento para todos los contextos que se le plantearon anteriormente.

Por cuestiones de tiempo la pregunta 4 en los Contextos de Jamaica y Botellas no se revisa. M1 se da cuenta que algunas veces respondió como una niña y la entrevistadora le dice que eso es bueno porque de esa manera puede entender la forma de pensar de un niño.



### *Nivel I*

Para la revisión de las preguntas del Nivel I, la entrevistadora sólo detiene la grabación para explicarle a M1 las estrategias formales que había utilizado en algunos contextos. En los contextos de Cuadernos y Velocidad M1 utilizó como estrategia centraciones en la primera entrevista. A continuación se ejemplifica una de ellas.

[B(1,4)(3,2):B]. *Esta niña [A] camina una cuadra en cuatro minutos y esta otra [B] tres cuabras en dos minutos. Sería la B -(¿Por qué?)- Porque caminó más cuabras por menos minutos. (M1, J02).*

La entrevistadora le dice a M1 que en esta parte no había tenido problema alguno.

### *Parte C: término de la entrevista*

La entrevistadora emplea la teoría de Piaget para explicarle a M1 que él decía que la manera más fácil en que aprenden los niños es cuando manipulan objetos y que poco a poco llegan al estadio de las operaciones formales durante la pubertad. Esto se puede observar en los niños que se encuentran en quinto o sexto de primaria, que es donde estos tipos de problemas aparecen implícitamente en los libros de la SEP. Es un momento importante porque le permite al niño fortalecer los conocimientos adquiridos para alcanzar unos nuevos.

La maestra responde que ella se da cuenta que cuando el niño ya sabe manejar una multiplicación y se le explica el proceso de la división, el niño logra una mejor comprensión. Y que cuando no logra comprender bien el proceso de la multiplicación el niño no va a poder comprender bien el proceso de la división.

Finalmente la entrevistadora le pregunta qué le pareció todo esto. M1 dice que muy interesante porque a partir de sus respuestas dadas y con la explicación se dio cuenta cómo se encontraba ella en esta área. También dice que los niños pueden llegar a un resultado correcto pero de una forma incorrecta y que en ese momento es donde los maestros tienen que intervenir, para trabajar con los

alumnos la estrategia o método que a ellos se les esté facilitando y no diciéndole que el método que están empleando es incorrecto porque no fue el que “yo le enseñé”.

Por último la maestra Silvia Alatorre, asesora del trabajo, la invita a revisar de nuevo todos los documentos de forma personal, y si ella necesita de mayor apoyo u otra explicación, tendría una cita abierta.

### *5.3.3. Análisis global*

En la primera entrevista M1 obtuvo el mejor desempeño de todas las maestras entrevistadas. En el Nivel I no tuvo ninguna dificultad al resolver los cinco contextos, mientras que el contexto de Jamaica en el Nivel II resultó ser el más complicado, y para el Nivel III encontró mayor dificultad en los contextos de Botellas y Jamaica. A la maestra M1 los problemas de tasa le resultaron ser los más fáciles, mientras que los contextos de mezcla fueron los más difíciles, en el nivel III. Hay que recordar que la estrategia utilizada por M1 en el contexto de Exámenes fue inducida por la entrevistadora.

Como la maestra M1 durante la primera entrevista manejó adecuadamente el Nivel I, no fue necesario hacer una revisión exhaustiva de ese nivel en la segunda entrevista. Para el Nivel II al revisar en la segunda entrevista el contexto de Jamaica la maestra reconoció que había utilizado estrategias de maneras incorrectas o incompletas y logró aplicar estrategias adecuadas.

El Nivel III le resultó el más difícil al haber utilizado algunas centraciones y estrategias aditivas de manera incorrecta en los contextos de Jamaica, Botellas y Cuadernos. En la segunda entrevista logró corregir algunas de sus estrategias incorrectas con ayuda de la entrevistadora.

El contexto de Jamaica le resultó ser el más complicado, debido a la percepción y a la familiaridad, por lo que no reflexionó tanto sus respuestas como en el contexto de Botellas (que era de azar) y el cual la motivó para estar alerta.

La estrategia RP que más utilizó y que se podría decir que también fue la que más se le facilitó fue la de igualación, aunque no la manejó adecuadamente. Durante la segunda entrevista la maestra reconoció qué estrategia había utilizado más durante la primera, y si lo había hecho de manera correcta o incorrecta.

Al haberle presentado sus respuestas de la primera entrevista en el transcurso de la segunda, algunas veces movía la cabeza, se reía, hacía expresiones de asombro, reconociendo que no era posible el error que había cometido.

Ante esto la entrevistadora le dijo que eso era muy bueno, porque si ella reconocía estos errores, podía comprender la manera de pensar de los niños. Los errores que cometió M1 fueron corregidos por ella, en general de manera personal y algunas veces con ayuda de la entrevistadora. Evidentemente, cabe la duda de si la maestra corrigió en el hecho mismo o si sólo ajustó para no repetirlo en la segunda entrevista, pero en este caso nuestra hipótesis es que M1 sí comprendió la razón de los cambios.

Finalmente consideramos que la retroalimentación causó un efecto de aprendizaje que permitió que M1 viera su propia actuación, corrigiera sus errores, y reconociera qué herramientas tiene como docente para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje que se lleva dentro del aula y comprendiera la importancia de la enseñanza de este tipo de problemas.

#### **5.4 Maestra M2**

M2 es maestra de 5º grado en el turno matutino, tiene 10 años impartiendo este grado; también ha dado 4º y 6º, y esporádicamente 1º y 2º grado. Estudió en la BENM y tiene 22 años de experiencia frente a grupo. Por la tarde labora en una zona escolar del sector 33 como A.T.P. Considera que 5º grado de primaria es el más importante para que el alumno adquiera la mayoría de los contenidos de matemáticas para nivel primaria.

Ella comentó que quienes están como A.T.P apoyan en el área administrativa, y también pueden tomar la carrera magisterial, en donde tienen que elaborar un plan de un tema en específico, para enfocarlo y proyectarlo a las escuelas. Agregó que de manera particular su tema son los valores.

#### 5.4.1 Primera entrevista

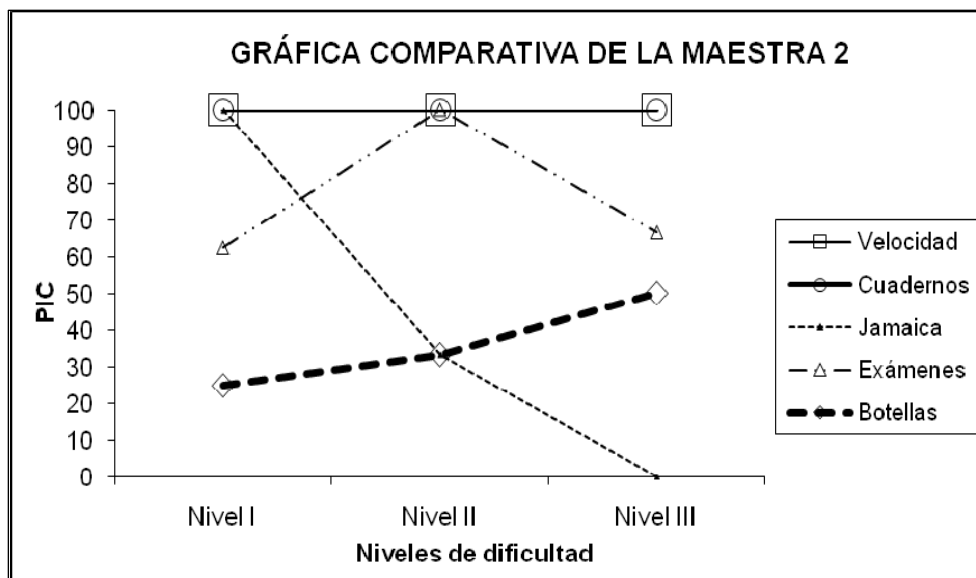
La entrevista se realizó en una oficina adjunta a una escuela primaria. Parte de la entrevista fue llevada a cabo durante el recreo de los niños, esto provocaba demasiado ruido y posteriormente ocasionó que el audio no se percibiera. Durante la entrevista la maestra M2 siempre estuvo atenta al escuchar el planteamiento de la preguntas; cuando la entrevistadora la hacía dudar sobre algunas de sus respuestas a M2 no le incomodaba y siempre se mostró participativa durante la sesión.

#### Análisis cuantitativo

En la tabla 21 se reporta los promedios PIC que obtuvo M2 en los tres niveles de dificultad en los cinco contextos del instrumento y en la figura 11 se muestra el comportamiento global que obtuvo en los tres niveles de dificultad, por contexto.

PIC	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas	TOTAL
Nivel I	100.0	100.0	100.0	62.5	25.0	82.4
Nivel II	100.0	100.0	33.3	100.0	33.3	76.5
Nivel III	100.0	100.0	0.0	66.7	50.0	70.6
<b>TOTAL</b>	100.0	100.0	55.7	75.0	38.9	76.5
<b>TIPO DE GRÁFICOS</b>	D	D	B	Atípico	Atípico	D

**TABLA 21**

**FIGURA 11**

El tipo de comportamiento que presenta M2 para los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) corresponde al grupo D, mientras que para los contextos de Exámenes y Botellas (mezcla) tiene unos comportamientos atípicos y el contexto de Jamaica pertenece al grupo A.

Los dos comportamientos atípicos son diferentes. En exámenes, donde desde el punto de vista cuantitativo obtiene el mejor resultado de los contextos de mezcla, tiene solamente respuestas correctas en el Nivel II, mientras que en los Niveles I y III tiene promedios PIC más bajos que en el II, y semejantes entre sí. Por otra parte, en Botellas, que fue el contexto más difícil para M2, el promedio PIC que obtuvo fue bajo en el Nivel I, intermedio en el II y alto en el III: lo inverso de lo que ocurre en el comportamiento típico B.

En la figura 12 se presenta el promedio global de M2 obtenido en los tres niveles de dificultad. Se observa que en el Nivel I obtuvo el mejor promedio PIC de los tres niveles de dificultad (82.4), mientras que los promedios PIC de los Niveles II y III se encuentran respectivamente en 76.5 y 70.6. Es decir, la diferencia entre el mejor nivel y el peor es solamente de 11.8.

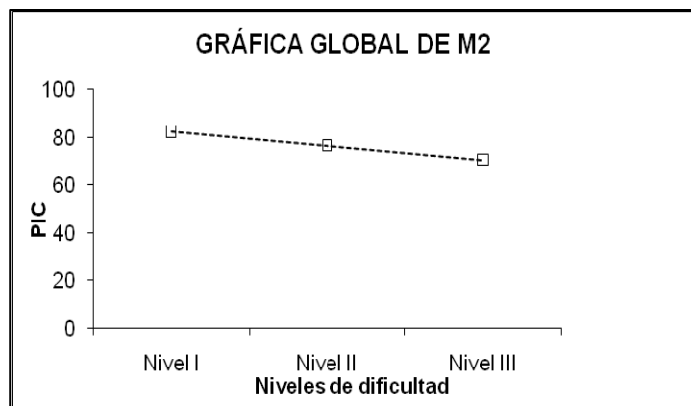


FIGURA 12

De acuerdo con los promedios PIC obtenidos en los tres niveles de dificultad M2 muestra un comportamiento global que corresponde al grupo D, porque los resultados PIC obtenidos en los tres niveles son muy similares. En este sentido, M2 obtuvo los mejores resultados de entre las cinco maestras, aunque hay que recordar que M1 obtuvo promedio PIC más alto (sin embargo eso podría deberse a la inducción de RP para M1).

### Análisis cualitativo

En la Tabla 22 se muestran las estrategias que utilizó M2 para resolver las preguntas planteadas dentro de los tres niveles en los cinco contextos.

MAESTRA "M2"						
NIVEL	PREG	CONTEXTOS				
		VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
I	2	CA+&CC-	RO+	RO+	CA+	CA+
	3	CC-*CA=	RP+	RO+	RO+	CA=
	6	CA+*CC=	RP+	RO+	RO+	
	7		CC-	CC-	ROe ⊥ CC-	
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	CA+
	8	RP=	RP=	RS+	RP=	
	10	RP=	RP=	RS+	RP=	RP'
	12	RP=	RP=			RP=
III	4	RP+	RP+	RS=	RP'	CA+
	9	RP+	RP+	RS+	RP+	CC-&CT-
	11	RP+	RP+		RP+	RP+
	13	RP+	RP+			RP+

TABLA 22

En el Nivel I, M2 utilizó distintas estrategias: en el contexto de Velocidad (tasas) la única estrategia que utilizó fueron centraciones compuestas, en el otro contexto de tasas, en Cuadernos, utilizó tres tipos de estrategias correctas: RO+, CC- y RP+ (y es el único contexto en que usó esta estrategia en el Nivel I). En los contextos de mezcla utilizó con más frecuencia las relaciones de orden RO+.

En el Nivel II a M2 le fue muy bien en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa). En los problemas de mezcla, sólo el contexto de Exámenes le resultó fácil, mientras que en cada uno de los otros contextos aplicó sólo un RP=; la mayor parte de sus estrategias incorrectas fueron RS.

En el Nivel III en los contextos de Velocidad y Cuadernos M2 consigue buenos resultados al emplear adecuadamente RP+, ésta es la única estrategia aplicable dentro del Nivel III. En el contexto de Exámenes (mezcla) le fue bien al utilizar RP+ y tiene un intento para resolver la situación planteada al emplear RP'. Para el contexto de Jamaica a M2 sólo se le aplicaron dos reactivos; fue el contexto que desde el punto de vista cualitativo le resultó más difícil, las estrategias que utiliza incorrectamente son relaciones aditivas RS+ y RS=. Para el contexto de Botellas utiliza RP+ adecuadamente, también utilizó algunas centraciones, siendo éstas estrategias incorrectas.

La Tabla 23 muestra, desde un punto de vista cualitativo, el comportamiento atípico que presentó M2 en los contextos de Exámenes y Botellas. En Exámenes, usó solamente RP= en el Nivel II; sus errores en los niveles I y III fueron respectivamente centraciones potencialmente incompletas junto con un ROe, y RP'.

NIVELES	Preg	CONTEXTOS	
		EXÁMENES	BOTELLAS
NIVEL I	2	CA+	CA+
	3	RO+	CA=
	6	RO+	
	7	ROe ⊥CC-	
NIVEL II	5	RP=	CA+
	8	RP=	
	10	RP=	RP'
	12		RP=
NIVEL III	4	RP'	CA+
	9	RP+	CC-&CT-
	11	RP+	RP+
	13		RP+

**TABLA 23**

En cuanto a Botellas, los resultados deben verse desde un punto de vista cronológico: empezó utilizando centraciones en las primeras preguntas, hasta la novena. Incluso ahí se observa que en las primeras de estas preguntas utilizó centraciones CA: elegía solamente de acuerdo con la cantidad de canicas azules (un ejemplo de ello se muestra abajo).

En la décima tiene ya un intento de RP, y a partir de ahí el comportamiento es correcto en las preguntas 11, 12 y 13. Esto puede indicar que la exposición al contexto le fue haciendo notar que se trataba, como los demás, de un contexto de razonamiento proporcional.

A continuación se ejemplifica el CA= que utilizó M2 como estrategia para resolver la situación planteada en la pregunta 3 de Botellas. M2 dice que da igual porque en ambas botellas hay la misma cantidad de canicas azules, pero es incorrecta porque no toma en cuenta las canicas amarillas que hay en cada objeto.

[B(2,3)(2,2):Da igual] *Para mí sería igual, porque en ambos hay dos azules.* (M2, B03).

Por otra parte una estrategia RP que aplicó M2 a lo largo de toda la entrevista fue la utilización de fracciones equivalentes. Por ejemplo, en la pregunta 12 de Botellas llegó a utilizar adecuadamente RP=, resolviendo la situación planteada por medio de fracciones equivalentes. Esto se muestra a continuación (ver también la Figura 13, que reproduce la tarjeta en la que ella escribió)

[B(4,6)(2,3):Da igual] *Tengo mayor probabilidad en ésta [B]. – (¿Por qué?)- Tengo mayor probabilidad porque es mayor  $2/5$  [escribe  $2/5$  en el lado B] que  $4/10$  [escribe  $4/10$  en el lado A]. – (¿Cómo le explicaría a un niño que es más grande  $2/5$  que  $4/10$ ?)- ¡Ah! esto es igual, porque aquí [A] simplificando es igual  $2/5$  [escribe  $4/10=2/5$ ], entonces tengo la misma probabilidad. ¿Cómo le explicaría a un niño? – (Bueno, en este caso ¿cómo le explica que son iguales?)- ¡Ah! pues por fracciones equivalentes, por simplificación de fracciones. Por ejemplo a éste [B] le saco una fracción equivalente, debo multiplicar por dos y me da  $4/10$ . Y en este por simplificación [A] debo sacar mitad de 4 y 10 y me da  $2/5$ .* (M2, B12).



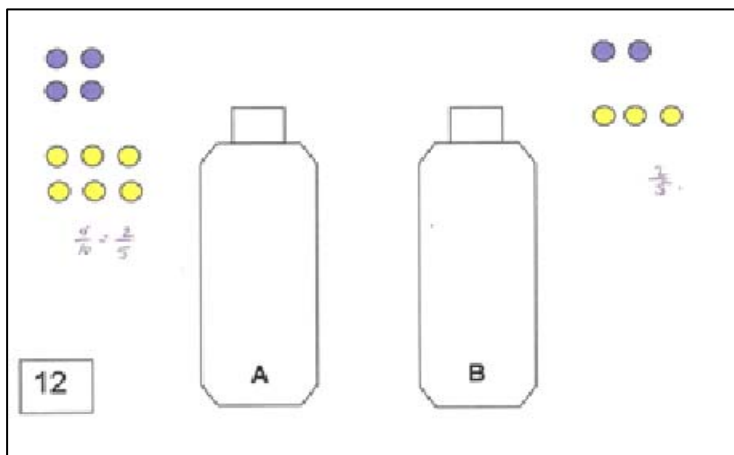


FIGURA 13

Cabe anotar que en otros casos las RP' fueron intentos infructuosos de encontrar las fracciones equivalentes necesarias; esto se comentará en el análisis de la segunda entrevista.

A continuación se ejemplifica la estrategia RS+ utilizada por M2 en Jamaica de manera incorrecta, porque hace la relación de un vaso de concentrado con uno de agua en ambos objetos y se da cuenta que en ambos sobran vasos de agua y elige el objeto en donde la diferencia es menor (elige el objeto en donde quedan menos vasos de agua).

[J(2,5)(1,3):B]. *En la B, porque hay menos agua que en la A, por lo que les explicaba, para mí éste corresponde con uno de agua y sobran sólo dos de agua [Un vaso de concentrado con un vaso de agua simple y quedan dos vasos de agua simple en B] Y aquí sobran tres [A]. Sí, sería el B. (M2, J09).*

#### 5.4.2 Segunda entrevista

La entrevista se realizó durante la hora del recreo escolar y la maestra M2 tuvo que utilizar unos audífonos para poder escuchar la grabación. En esta entrevista no se presentaron interrupciones y tuvo una duración de una hora y media aproximadamente.

Parte A: explicación de las estrategias

Cuando se le dijo a M2 que el interés era conocer sus intuiciones sobre los tipos de problemas que le presentamos anteriormente, una de las primeras dudas que exteriorizó M2 fue saber si sus respuestas habían sido incorrectas.

La entrevistadora a este comentario le dijo que eso aún no lo sabíamos hasta que no revisáramos el video de la primera entrevista (aunque la entrevistadora ya conocía qué tipo de estrategia utilizó) y también se le dijo que no se preocupara, que tendríamos tiempo para poder revisar el video y que lo único que nos interesaba era conocer qué tipo de intuiciones ella tenía.

Durante la explicación que se le dio del material llamado “Problemas de Razonamiento Proporcional” (Anexo 4), hubo varias pausas donde M2 reconoció que ella había utilizado una estrategia parecida a la que le presentábamos y que no la había concretado con buenos resultados (había fallado en el procedimiento). Pero la entrevistadora le comentó que para ver si ella había utilizado erróneamente esta estrategia durante la aplicación de las preguntas, se tendría que observar el video.

Cuando se le mostró el material (Anexo 5) la entrevistadora le explicó que los problemas de Botellas eran de probabilidad y la maestra M2 dijo que se había dado cuenta que eran de probabilidad y dijo riéndose que reconocía que estaba “perdida” al responder a estos problemas.

Parte B: intervención*Nivel II*

En este nivel M2 había utilizado en la primera entrevista un CA+ y RS+ como estrategias incorrectas, además de algunos intentos de RP'. La primera estrategia la utilizó en la pregunta 5 (3,3)(1,1) del contexto de Botellas al decir:

[B (3,3)(1,1):A] *Pues en la A, pues hay más azules que en la B. (M2, B05)*

Después de haber visto su respuesta, la maestra M2 dice “estaba bloqueada, era lo mismo”; y reconoce que la estructura numérica era idéntica. En esta parte de la proyección del video la maestra M2 tiene que utilizar los audífonos para poder escuchar mejor.

La segunda estrategia que había utilizado M2 fue RS+ en el contexto de Jamaica en las preguntas 8 y 10. A continuación se ejemplifica la estrategia de la pregunta 8 (2,1)(4,2) utilizada por M2 durante su primera entrevista:

[J(2,1)(4,2):B] *Es la B, porque tiene mayor sabor, tiene más jamaica. – (Pero igual acá [A] tiene mayor jamaica que agua)-. Pero aquí hay más sabor, [B] que acá [A]. Sí hay sabor aquí [A], pero éste tiene mayor sabor [B]. – (Porque en uno son cuatro y en el otro son sólo dos, o ¿por qué?)- Pues sí. – (¿Y el agua no tiene nada que ver?)- Sí, pero aun así. Bueno para mí, lo que estoy percibiendo es que por cada vaso de concentrado se diluye con éste [A] y entonces aquí quedaría, uno simple sin diluir en agua. Entonces en éste sería uno [A] y aquí serían dos [B], entonces para mí ése tiene mayor concentrado [B]. (M2, J08).*

En la primera entrevista, la maestra M2 hizo una relación de un vaso de concentrado con uno de agua en ambos objetos y se dio cuenta que en ambos sobra vasos de concentrado y eligió la jarra donde la diferencia era mayor (eligió el objeto en donde quedaban más vasos de concentrado).

En la segunda entrevista la entrevistadora le pregunta a M2 cómo resolvería ahora esta situación. M2 le responde “pues ahora veo que es dos a uno en ambas situaciones y que corresponde a lo mismo, y ahora veo que a veces me inclino y que mi razonamiento ya no es igual”. La entrevistadora le dice que no se sienta mal, pues estamos apelando a su intuición y no a su conocimiento, y que esto le va ayudar a entender cómo piensan los niños.

Otro tipo de respuesta incorrecta que utilizó M2 en este nivel fue RP' en el contexto de Botellas en la pregunta 10 al expresar:

[B(3,6)(1,2):B] Sería la B, porque tiene menos cantidad de canicas, porque aquí hay tres novenos [A], porque aquí son tres novenos - (¿Qué es más grande, un tercio o tres novenos?)- Un tercio, entonces sí es la B. (M2, B10)

La maestra M2 después de haber visto su respuesta le dice a la entrevistadora que las fracciones no tenían nada que ver, pero la entrevistadora le dice que la estrategia que había utilizado fue adecuada, que sí era cierto que tenía  $\frac{3}{9}$  y  $\frac{1}{3}$ , que observó la fracción de acuerdo al total y que lo había hecho de manera correcta, pero el problema fue que al querer comparar si  $\frac{1}{3}$  era más grande que  $\frac{3}{9}$  no lo logró hacer de manera correcta. Entonces la entrevistadora le explica que cuatro formas diferentes de comparar fracciones con las siguientes imágenes, se le entrega. Se muestra en la figura 14.

Botellas, pregunta 10: La comparación entre  $\frac{3}{9}$  y  $\frac{1}{3}$

I) mediante la recta numérica



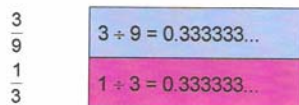
Separó la misma unidad en 9 y tomó tres o separó la misma unidad en tres y tomó uno. Y entonces tengo tres de nueve uno o de tres.

II) mediante "pasteles"



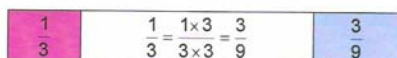
Que en esta estrategia de pastel la diferencia es muy chiquita o casi no se ve, al tratar de poner a contra luz ambas figuras.

III) mediante el cálculo del cociente



Esto lo puede hacer mecánico: realizar el cálculo del cociente en la calculadora.

IV) mediante fracciones equivalentes



Para encontrar la fracción equivalente a  $\frac{1}{3}$  en novenos.

FIGURA 14

En la explicación de la primera comparación M2 reconoce que es simple esa forma de comparar fracciones. Después de la explicación la entrevistadora le comenta que el error que tuvo fue al decir que un  $1/3$  es más grande que  $3/9$ . Este error es muy común en los niños, pues piensan que las fracciones son al revés, entre más chico el denominador más grande es la fracción. Y eso es una verdad a medias porque es cierto que si yo comparo un tercio con un noveno, un tercio es más grande que un noveno; pero si comparo un tercio con *tres* novenos, eso ya no me ayuda. Y finalmente la entrevistadora le dice que todo esto lo debe tener en cuenta para poder tener esa luz amarilla que le indica que debe estar alerta para pensar dos veces al usar fracciones y que use la técnica que le resulte más sencilla.

### *Nivel III*

La maestra M2 pregunta si es válida la suma, resta o multiplicación para estas preguntas cuando no son de proporcionalidad. La entrevistadora le dice que no, porque el planteamiento de estos problemas es de proporcionalidad, que la pregunta de los camiones sí era un planteamiento para usar sumas o restas como lo había hecho, pero no las del instrumento. Además le comenta que estos problemas son de razonamiento proporcional y por eso usamos multiplicaciones o divisiones o su equivalente (o todas las estrategias que le presentamos anteriormente), pero que los problemas tienen diferentes situaciones numéricas que nos llevan a decir da igual (es decir que son iguales) y otras nos llevan a decir que A o B, y de ahí se parte para utilizar grupitos, las igualaciones o los productos cruzados. Y que usar una suma o resta en este tipo de planteamientos es incorrecto.

En la pregunta 9 con la estructura numérica (2,5)(1,3) en el contexto de Jamaica, M2 en su primera entrevista había utilizado de nuevo RS+ al decir:

[J(2,5)(1,3)B] *En la B, porque hay menos agua que A, por lo que yo... les explicaba, para mí éste corresponde con uno de agua y sobran dos [un vaso de concentrado con un vaso de agua simple y quedan dos vasos de agua simple] Y aquí sobran tres [A]. Sí, sería el B (M2, J09).*

Después de haber escuchado su respuesta, la entrevistadora le dice a M2 que su estrategia había sido incompleta al decir “dos con uno, dos con uno y sobra uno” y le explicó:

Usted está viendo el residuo, y no se vale comparar los puros residuos sino que hay que repartir los residuos, y por eso su estrategia fue como incompleta; inició bien pero sólo se quedó en los residuos. Otra manera en que se puede resolver es como lo hizo usted en exámenes, dos entre siete (los antecedentes entre el total) [A] y comparar: eso da uno entre cuatro [B].

Otra forma de verlo es decir un vaso de concentrado con uno de agua, otro de concentrado con uno de agua y sobran tres de agua [A] y un vaso de agua con uno de concentrado y sobran dos de agua [B]; en A pareciera que sobran más de agua que en B, pero esos tres que sobran se reparten en *dos* de concentrado en A, y en B los dos vasos de concentrado de agua le corresponden a *uno* solo.

A fin de cuentas hay muchas maneras correctas de resolver este problema, pero todas involucran una manera multiplicativa de pensar; es el razonamiento proporcional. Las maneras que no involucran un razonamiento proporcional son las sumas y las restas, que son incorrectas. Es cierto que la primera manera ver un problema es resolverlo con suma o resta, pero en este caso es incorrecto. Qué bueno que usted tiene este tipo de problemas porque así se dará cuenta en qué está pensando un niño.

En la pregunta 9 (2,5)(1,3) para el contexto de Botellas, la entrevistadora le dice a M2 que fue correcto querer comparar las fracciones  $\frac{2}{7}$  y  $\frac{1}{4}$  pero que en esa comparación cometió un error y que se le propondría un método para hacer la comparación:

- No puedo comparar séptimos con cuartos y debo pasar a un común denominador, multiplicando  $7 \times 4 = 28$ .

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{7} & \frac{1}{4} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ 7 \times 4 = 28 & \end{array}$$

- Ahora voy de izquierda a derecha y multiplico por el mismo número arriba y abajo:

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 4}{7 \times 4} = \frac{8}{28}$$

—————→

- Ahora voy de derecha a izquierda y nuevamente multiplico por el mismo número arriba y abajo:

$$\frac{7}{28} = \frac{1 \times 7}{4 \times 7} = \frac{1}{4}$$

←—————

- Después de haber multiplicado se obtienen los resultados

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 4}{7 \times 4} = \frac{8}{28} \quad \frac{7}{28} = \frac{1 \times 7}{4 \times 7} = \frac{1}{4}$$

—————→      ←—————

y con ellos podemos ver si  $\frac{8}{28}$  es mayor, menor o igual que  $\frac{7}{28}$ :

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 4}{7 \times 4} = \frac{8}{28} > \frac{7}{28} = \frac{1 \times 7}{4 \times 7} = \frac{1}{4}$$

- Pero como  $\frac{8}{28}$  es equivalente a  $\frac{2}{7}$  y  $\frac{7}{28}$  es equivalente a  $\frac{1}{4}$ , la expresión de arriba es equivalente a

$$\frac{2}{7} > \frac{1}{4}$$

M2 dice que ella lo había intentado hacer de esta manera, pero no lo hizo para ahorrar tiempo, pero al “quererlo hacer de otro modo me confundí”. La entrevistadora le dice que ésta es una de las maneras más fáciles de explicarlo a los niños.

*Nivel I*

Por cuestiones de tiempo las preguntas de este nivel se dejan al final, y se revisa rápidamente. La entrevistadora detiene la grabación para explicarle que algunos de los errores que había cometido fueron debido a que su respuesta fue incompleta. En la pregunta 7 con su estructura (3,3)(2,0) en el contexto de Exámenes se ejemplifica:

[E (3,3)(2,0):B] Le fue igual – (¿Por qué? ¿Cuánto se saca?) Pues diez en los dos. – (¿En los dos?)-. Sí. (M2, E07).

La maestra M2, al escuchar el audio se asombra y dice “¿Cuánto dije?” y ella no puede creer lo que respondió (“¡no, pues no! La respuesta era obvia pues en uno tiene las mismas buenas y malas y en el otro no tenía preguntas incorrectas”).

*Parte C: término de la entrevista*

Finalmente se le preguntó cómo veía este tema dentro de la enseñanza. La maestra M2 comentó que no había recibido hasta el momento (antes de que nosotras la entrevistáramos) una plática sobre este tema de Razonamiento Proporcional y que al haberle dado este taller, le había sacudido mucho su manera de responder a estos problemas de matemáticas. Que algunos temas en sexto grado se relacionaban, pero que no podía decirnos exactamente qué estrategias utilizaban los niños al resolver este tipo de problemas. Y que las dificultades a las que se enfrentaban era cuando los temas venían salteados o sólo se revisaban de pasadita y cuando esto sucede el niño pierde el interés y para las maestras resulta complicado darle una secuencia. Además, se daba cuenta que era necesario actualizarse en estos temas.

*5.4.3 Análisis global*

La mayoría de las estrategias incorrectas o incompletas utilizadas por M2 durante la primera entrevista se presentaron en los contextos de mezcla. Donde



M2 presenta dos situaciones sobre su desempeño. En la primera el desempeño que logró en el contexto de Jamaica fue decreciendo conforme avanzaba de nivel, mientras que para el contexto de Botellas el desempeño mejoró conforme avanzaba de nivel.

A la maestra M2 el Nivel I en el contexto de Botellas le resultó ser el más complicado, para el Nivel II los contextos de Jamaica y Botellas (problemas de mezcla) fueron los más complicados y finalmente para el Nivel III el contexto de Jamaica le fue imposible de resolver.

En los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) la maestra no tuvo ningún problema. Para resolver algunas de las preguntas planteadas lo hizo por medio de fracciones equivalentes (estrategia RP más frecuente), sobre todo en el contexto de Botellas. La maestra M2 trató de aplicar esta estrategia pero no logró hacer el procedimiento adecuado.

En el transcurso de la segunda entrevista, la maestra M2 reconoció qué tipo de estrategia había utilizado con más frecuencia, en el momento en que la entrevistadora le explicaba las estrategias de fracciones y/o de reparto; y que el procedimiento que había utilizado no había sido el correcto.

Posteriormente, cuando se le preguntaba “¿ahora cómo lo resolvería?” la maestra tuvo algunas expresiones de asombro, y cada vez que la entrevistadora le explicaba cómo llevar a cabo la comparación de fracciones y el reparto de residuos siempre estuvo atenta y comprendió por qué había sido incorrecto su procedimiento.

La maestra M2 logró corregir la mayoría de sus errores sin ayuda, y a partir de esto podemos decir que la sesión de retroalimentación o “sesión de espejo” cumplió al haberle manifestado a M2 que necesitaba un refuerzo en algunos contenidos matemáticos. También M2 pudo verse a sí misma y conocer su propio desempeño y con esto considerar que es importante la comunicación cuando se le

va a enseñar algo nuevo al niño y que se debe tener cuidado al presentarle el tema de proporcionalidad.

## **5.5 Maestra M3**

Trabaja como A.T.P. en ambos turnos. Laboró frente a grupo 28 años, impartió clases a los seis grados de primaria pero impartió clases más tiempo a 3°, 4° y 5°. Lleva fuera de grupo 10 años. Tiene 34 años en servicio. En la SEP han sido 22 años, y en una escuela particular dando clases 12 años. Se formó como docente en un colegio particular, el Instituto Anglo Español.

### *5.5.1 Primera entrevista*

En esta entrevista se cometió un error técnico comentado anteriormente, y por ello la entrevista tuvo una duración de treinta minutos, ya que se agilizó la entrevista para no cansar a la maestra. Sin embargo M3 fue una persona muy dispuesta, amable y accedió al tuteo de manera informal y cordial. El lugar donde se realizó la entrevista fue en un lugar cerrado y no hubo interrupciones.

#### Análisis cuantitativo

En la tabla 24 se muestran los promedios PIC que obtuvo M3 para los tres niveles de dificultad en los cinco contextos del instrumento y en la figura 15 se presenta el comportamiento global que obtuvo en los tres niveles de dificultad por contexto.

PIC	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas	TOTAL
Nivel I	100.0	100.0		100.0	100.0	100.0
Nivel II	100.0	100.0	50.0	37.5	100.0	75.0
Nivel III	100.0	50.0	0.0	0.0	0.0	31.6
<b>TOTAL</b>	100.0	77.8	25.0	31.3	60.0	61.1
<b>TIPOS DE GRÁFICOS</b>	D	C	B*	B	C	B

\* Este comportamiento se infiere porque no hay datos grabados de las respuestas de M3 en el nivel I de Jamaica; sin embargo, esto es porque sus respuestas en la primera ocasión habían sido correctas y por esta razón al repetir el interrogatorio se prescindió de esas preguntas

TABLA 24

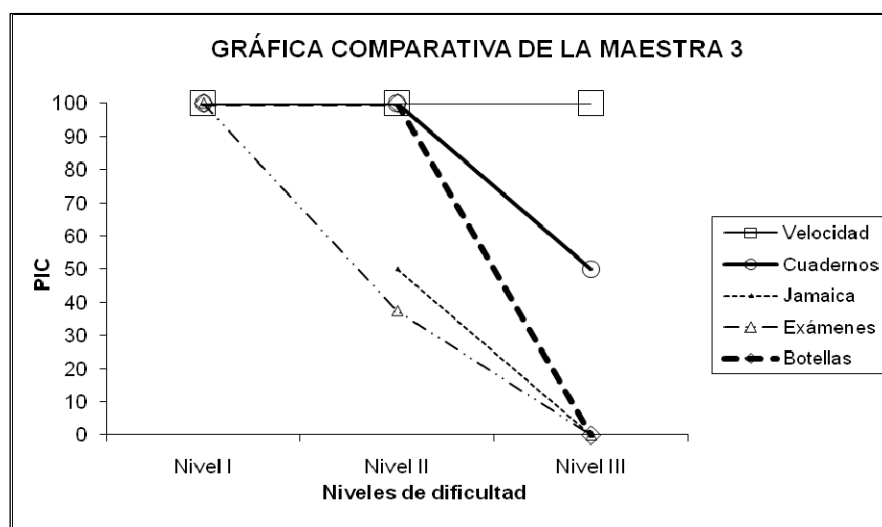


FIGURA 15

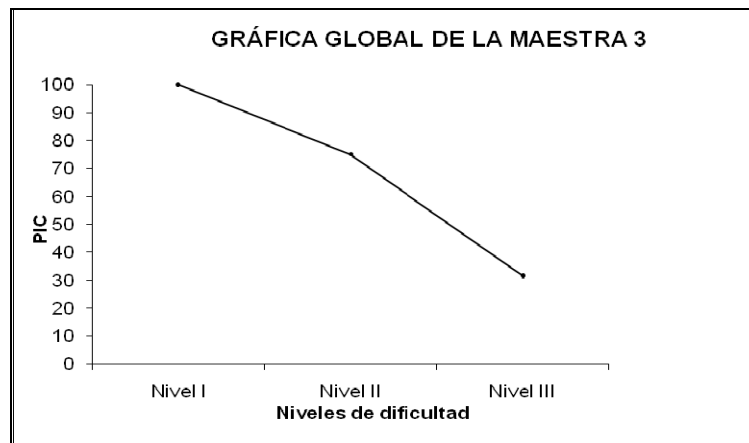
Como se observa, M3 mostró un comportamiento para el contexto de Velocidad de tipo D, para Cuadernos y Botellas de tipo C, para Exámenes de tipo B y finalmente en el contexto de Jamaica el tipo de comportamiento que pudo haber presentado es B.

La maestra M3 en el contexto de Velocidad obtiene el mejor promedio de los cinco contextos, mientras que el contexto de Cuadernos (tasas) obtiene el segundo mejor promedio. Este contexto resultó ser complicado en el Nivel III, porque en este nivel se presentan los únicos errores cometidos por M3 en tasas.

En los contextos de mezcla M3 resolvió correctamente todas las preguntas del Nivel I, e incorrectamente todas las preguntas del Nivel III. Las diferencias en este tipo de contextos se encuentran en el Nivel II: en Botellas resolvió correctamente todas las preguntas, en Jamaica sólo la mitad y en Exámenes algo

más de la tercera parte. Es por estas diferencias que en el PIC global obtiene mejores resultados en Botellas y peores en Jamaica.

En la figura 16 se muestra el promedio global alcanzado por M3 en los tres niveles de dificultad. Se observa que M3 en el Nivel I obtiene el promedio PIC más alto en los cinco contextos. La maestra M3 en el Nivel II tiene para los cinco contextos un promedio PIC de 75.0. En este nivel las únicas estrategias aplicables son RP=, el promedio que obtiene lo hace ser un nivel con menor grado de complejidad que el correspondiente al siguiente nivel. Las situaciones planteadas para el Nivel III le resultaron difíciles de resolver a M3 en los contextos presentados, obteniendo así un promedio PIC de 31.6, que representa el valor más bajo de todos.



**FIGURA 16**

De acuerdo con los promedios obtenidos en los tres niveles de dificultad medidos a través de los valores PIC, el comportamiento global que obtiene M3 es de tipo B.

### Análisis cualitativo

En la tabla 25 se presentan las estrategias utilizadas por M3 para resolver las situaciones planteadas que corresponden para cada nivel de dificultad en los cinco contextos.

MAESTRA " 3"						
NIVEL	PREG	CONTEXTOS				
		VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
I	2	CA+&CC-			CA+*CT=	CA+&CC-
	3	CC-*CA=				RO+
	6		CA+*CC			RO+
	7		CC-			
II	5	RP=		RP=	RP=	
	8	RP=	RP=	RS+	RP=& RP'	RP=
	10	RP=	RP=	RP=	RP'	RP=
	12	RP=	RP=	RS+	RP'	RP=
III	4	RP+	RP+	RS=	RP'	RO=
	9	RP+	RP+	RPS	RP'	RO=
	11	RP+	RPS	RPS	RPS	RPS
	13	RP+	RPS	RS+		RP'

TABLA 25

En el Nivel I las estrategias empleadas por M3 fueron centraciones compuestas y relaciones de orden RO+. Como se ha señalado, se plantearon pocas preguntas de este nivel cuando se repitió la entrevista, porque las respuestas habían sido correctas; sin embargo, no hay registro de qué estrategias había utilizado en el primer intento.

La mayoría de estrategias utilizadas por M3 en el Nivel II son RP=, en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) y en el contexto de Botellas (mezcla): en esos contextos no encontró dificultad en la totalidad de las situaciones planteadas. Pero en el contexto de Jamaica emplea RS+ como estrategia incorrecta mientras que para el contexto de Exámenes M3 tiene tres intentos infructuosos al no poder concretar un RP (ver más adelante).

En el Nivel III sólo en el contexto de Velocidad (tasa) consigue emplear adecuadamente RP+ como estrategia, aunque en el contexto de Cuadernos (tasa) la mitad de sus estrategias son también RP+ y en la otra mitad emplea incorrectamente RPS como estrategia aditiva. Los contextos de Botellas, Jamaica y Exámenes (mezcla) le fueron complicados de resolver, no tuvo una sola respuesta correcta y sólo tres intentos fallidos de RP+. La maestra M3 en el contexto de Botellas utiliza como estrategia más frecuente relaciones de orden

RO=, utiliza una relación aditiva RPS y tiene un intento infructuoso de RP+. En el contexto de Jamaica M3 utiliza las relaciones aditivas RPS=, RS= y RS+. Finalmente para el contexto de Exámenes utiliza un RPS y tiene dos intentos infructuosos de RP+, cometiendo el mismo tipo de error que en el Nivel II.

Uno de los errores cometidos por M3 fue en el contexto de Jamaica al emplear RS+ como estrategia, porque hace relaciones de un vaso de concentrado con un vaso de agua para ambos objetos y después sólo toma en donde hay más vasos de concentrado sobrantes en cada objeto y elige donde quedan más vasos de concentrado (antecedentes). No hace el reparto de los demás vasos de concentrado que quedan en ambos objetos:

[J(2,1)(4,2):B] *Aquí es una a una y me queda una* -(un vaso de concentrado con una vaso de agua simple, y queda un vaso de concentrado)-. [A] *En ésta es una a una, y una a una y me quedan dos; no, pues en ésta porque va a tener dos sabores* [B]. (M3, J08)

La maestra M3 en el contexto de Botellas utilizó RO=, siendo ésta una estrategia incorrecta, porque en este nivel las estrategias correctas sólo pueden ser RP+. Por ejemplo en la cuarta pregunta y con estructura (2,1)(3,2) M3 considera que da igual, porque el antecedente es mayor en ambas botellas:

[B(2,1)(3,2)Da igual] *Pues aquí puede tener una probabilidad de igual. - (¿Por qué?)- Porque es una y hay dos y si yo la revoloteo me va a quedar más fácil un azul* [A]. *Y acá hay tres y dos; la mayor facilidad es que me quede es una azul.* (M3, B04).

Los errores más notables de M3 ocurrieron en los Niveles II y III del contexto de Exámenes. En las primeras dos preguntas de estos niveles M3 hizo intentos de aplicar un razonamiento proporcional. En la pregunta cuatro la maestra hizo relaciones de antecedentes-consecuentes dentro de cada objeto, e igualó los consecuentes de ambos objetos “duplicando” la combinación antecedente-consecuente (2,1) del lado A para comparar con el lado B. Es decir, en vez de comparar (2,1)(3,2) buscó comparar (4,2)(3,2). Esto le hubiera permitido elegir el lado A; sin embargo al final cometió un error que la llevó a elegir el lado incorrecto y su respuesta fue clasificada como un RP':

[E(2,1)(3,2)B] *Acá son tres [A] y acá son cinco [B]. Sí, son una a dos [A]. Una y una, le faltaría una, aquí para que fueran cuatro buenas, entonces se quedó en medio; de todas formas le ganó ésta [B]. – (¿En cuál le fue mejor?)-. En ésta [B], porque ésta [A] es una a dos, tuvo dos buenas y una mala, y aquí [B] aunque tuvo tres buenas, tuvo dos malas. Pero si queremos tener la misma proporción serían dos y dos cuatro, porque una y una es dos; por eso le ganó el de ahí [B]. (M3, E04).*

En el caso de la pregunta 8 con estructura (2,1)(4,2), M3 encontró la proporcionalidad entre ambos objetos, nuevamente duplicando la combinación (2,1) del lado A, pero al preguntársele por la calificación da un resultado incorrecto; por ello la respuesta se clasificó como RP=&RP':

[(2,1)(4,2)Da igual] *Es lo mismo una a dos [A], y en este es el doble dos a dos [B]. Es igual.-(¿Cuánto se saca?)- Cinco. (M3, E08)*

Sin embargo, a partir de la pregunta 9 su manera de responder cambia: busca una regla general que le ayude a encontrar la calificación de la niña en ambos exámenes. Basada justamente en la combinación (2,1), encuentra la regla general de multiplicar por dos y dividir entre tres. Esta “regla” le hubiera servido en el examen A de las preguntas 4 y 8 porque contienen la combinación (2,1): la calificación sería  $10 \times 2 \div 3 = 6.7$  en ambos casos, lo que vendría de una “regla de tres”. Sin embargo, con otras combinaciones de antecedente-consecuente esa regla no es correcta.

Es decir, quiso convertir una “regla de tres” que hubiera sido correcta en un caso particular, en una “regla general”. Con la excepción de la pregunta once, ella intentó aplicar esa “regla general” en el resto de las preguntas. A continuación se ejemplifica su respuesta a la pregunta 9; también se presenta la tarjeta en donde realizó su procedimiento (ver Figura 17).

[E(2,5)(1,3)B] *Son siete aquí [A] y aquí son cuatro [B]. Siete por dos 14 y entre tres, casi a cinco. A ver,  $7 \times 2 \div 3 = 4.6$  saca éste [A]. En éste [B] es  $4 \times 2 \div 3 = 2.6$ , es menos. (M3, E09).*

PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN
Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>
Correctas: 2 ✓	Correctas: 1 ✓
Incorrectas: 5 ✗	Incorrectas: 3 ✗
Calificación: _____	Calificación: _____
A	B

$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$   
 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$   
 $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$   
 $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$   
 $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$   
 $\frac{4}{10} > \frac{3}{9}$

4/6      2/6

3

FIGURA 17

Cabe preguntarse si esta manera incorrecta de calificar es un procedimiento frecuente entre maestros frente a grupo, o si M3 lo cometió porque lleva muchos años en trabajo administrativo.

### 5.5.2 Segunda entrevista

Durante la entrevista a M3 se suscitaron interrupciones telefónicas y personales que no permitían continuidad de explicación de los primeros documentos y, por tal motivo, la duración de la entrevista sobrepasó el tiempo establecido. En esta entrevista continuó el tuteo que estableció la maestra M3 con la entrevistadora.

#### Parte A: explicación de las estrategias

Cuando se le presentó el documento (Anexo 4) a M3 la entrevistadora le dio una explicación de una estrategia aplicable a la pregunta 10 con la estructura numérica (3,6)(1,2) correspondiente al contexto de Jamaica y M3 dijo:

*Si lo vemos de una manera inmediata observamos en dónde es mayor la cantidad, y decimos aquí [A] hay muchos vasos, ésta tiene más y vemos la proporción y aquí [B] no, apenas si sale, son muy poquitos. Pero si lo observamos en proporción a uno aquí [A] es uno a dos, aquí esta una, dos veces, y tres veces, y en (B) ésta es una, pues vemos que es el mismo sabor, nada más hay que observar la proporción.*



Después de esto la entrevistadora le hizo ver que la estrategia de agrupamiento aunque a veces de manera incorrecta al no repartir los residuos era la que había utilizado con más frecuencia.

La entrevistadora le preguntó en el transcurso de la entrevista si tenía alguna duda y M3 dijo que no, que lo estaba reflexionando porque era mucha información. También M3 dijo que las matemáticas se le complicaban al niño, porque él sólo quería saber el valor de una moneda más no qué es un antecedente y un consecuente.

A esto la entrevistadora le dijo que sólo se le explicó esta parte para que ella reconociera cómo estaban integrados los problemas que le presentamos en la primera entrevista.

La entrevistadora también le dijo que se le podría enseñar al niño todas estas estrategias correctas y que se le debía decir al niño que utilizara la que se le facilitara más, pero que si un niño solito llega a utilizar por ejemplo la estrategia de igualación y el niño tiene su propio argumento y obtiene la respuesta correcta, no se le puede decir que está mal, sino que se le debe apoyar. A todo esto M3 dijo que si eso sucede, es porque la maestra ya está abierta al cambio.

Para terminar, la maestra M3 dijo que cuando le presentábamos la tarjetita ella lo respondía visualmente y decía éste tiene más o es igual, porque lo respondía muy rápido. La entrevistadora le dijo que había utilizado la estrategia de agrupación, pero que al terminar el reparto, ella eliminaba los residuos y que eso no debía hacerse. La maestra M3 contestó a esto que su manera de responder fue por la percepción.

Al hablar sobre este tipo de problemas la maestra comentó que al niño siempre las matemáticas se le habían dificultado, porque la enseñanza era mecánica y las maestras a veces no reconocían las diferentes estrategias que el niño mostraba en el salón.

La entrevistadora le dijo: “cualquier persona puede utilizar un pensamiento de suma y resta, y otras personas lo resuelven con la división. En mi caso particular, a mí me pasaba usar los de suma, pero ahora lo pienso dos veces para resolver un problema de matemáticas”.

La maestra M3 finalmente dijo que ella no se había fijado en la “proporcionalidad matemática” y que dijo que al conocer este tipo de estrategias correctas lo pensaría más para resolver cuestiones matemáticas.

### Parte B: intervención

#### *Nivel II*

La maestra M3 había utilizado en la primera entrevista RS+ en la pregunta 8 con estructura numérica (2,1)(4,2). La entrevistadora le dice a M3 que escuche la respuesta que dio (misma que se comentó ya previamente):

[J(2,1)(4,2)B] *Aquí [A] es una a una y me queda una [un vaso de concentrado con una caso de agua simple, y queda un vaso de concentrado en A]. En esta [B] es una a dos, una dos y me quedan dos. No pues en ésta [B] porque va a tener dos sabores. (M3, J08)*

En la segunda entrevista la entrevistadora le pregunta “¿cómo la podría responder ahora?” M3 dice que ya entendió cómo debe hacer el reparto cuando hay sobrantes. La entrevistadora le dice:

Cuando dices una a dos, una a dos y no queda nada está perfecto, la bronca es cuando sí te queda algo y dices una a una y queda una [A]; una a una, una a una, y quedan dos [B], también se vale. Pero lo que no puedes hacer es comparar los que quedan, porque éste que queda [en A] se diluye en uno de agua y estos dos que quedan [en B] se diluyen en dos de agua. A fin de cuentas, es lo mismo que dijeras una a dos.

La maestra dice sola el siguiente argumento: *una a dos y tienen el mismo sabor tanto en A como en B*. También explica correctamente los repartos cuando decía uno a uno y repartía los sobrantes.

En la pregunta 8 (2,1)(4,2) del contexto de Exámenes la entrevistadora le recuerda a M3 lo que había contestado en esta pregunta: “dijiste 4 es el doble de dos y dos es el doble de uno; hasta ahí ibas muy bien, y dijiste que ambas se sacaban la misma calificación”, posteriormente la entrevistadora le dice a M3 “escucha lo que dijiste”:

[(2,1)(4,2)Da igual] *Es lo mismo: una a dos [A], y en éste es el doble, dos a dos [B]. Es igual.-(¿Cuánto se saca?)- Cinco.* (M3, E08)

La entrevistadora le presenta la tarjeta y le dice: “tú dijiste que a la niña le fue igual en los dos exámenes porque cuatro es el doble de dos y dos es el doble de uno y estabas muy bien, y luego te pregunto cuánto se saca, y dices que cinco; ahora vuévelos a calificar”, M3 dice: “si hacemos con la regla de número de aciertos por dos entre tres voy a ver si sale, ¿eh? “Según esto, ésta es la regla para hacerlo, ¿no?”

A $2 \times 2 \div 3 = 1.3$
--------------------------------

B $4 \times 2 \div 3 = 2.6$
--------------------------------

Después la entrevistadora le hace ver dos cosas incongruentes a M3:

- 1) “Dices que le fue igual, pero en el A le estás poniendo menor calificación que en el B” (M3 respondió que en B es el doble).
- 2) “Tiene más correctas que incorrectas y la estás reprobando, qué injusta eres” (tono de broma). (M3 dice “sí pero veamos que el total aquí [A] fueron 3, acá [B] el total fue el doble”). La entrevistadora insiste que si le fue igual no tiene por qué tener diferente calificación.

M3 dice que sí podría ser una injusticia, pero que “si lo vemos en proporción ésa sería su calificación” y la entrevistadora le dice que tuvo cuatro sextas partes buenas en B y en A tuvo dos terceras partes y que  $4/6$  es lo mismo que  $2/3$  y deberían sacar la misma calificación.

M3 insiste que con esa regla de calificación el resultado sería ése y la entrevistadora le dice que quizá la regla que utilizó era lo que estaba mal. M3 dice que sí; que para esto sí está mal.

M3 dice que es mejor trabajar con 10 reactivos. La entrevistadora le propone otra regla: “la regla de tres”. La explicación de la regla, basada en la pregunta 3 (2,3) (2,2), fue la siguiente: que el total es igual a 10 y que si sacaba 2 buenas, ¿qué calificación obtendría?

En la siguiente hoja se presenta el procedimiento del lado A y lado B que se efectúa para aplicar la regla de tres, explicada a la maestra M3.

Después de la explicación se le pide a M3 que utilice la regla para obtener las calificaciones de la pregunta 8.

La maestra M3 pudo aplicar la reglita con ayuda, para obtener la calificación de 6.6 en ambos exámenes. La entrevistadora le dijo a M3 que veces uno aplica la fórmula y no checa de dónde vienen los datos para el resultado.

M3 dice *“esta reglita hasta nos sirve a nosotros aquí (...). Totales es a 10 como buenas o aciertos es a la calificación”*. También dice que le enseñaríamos a calificar. Y que en la reglita anterior no le importó ver el monto de la calificación, y que lo único que observó fue que el resultado de B había sido mayor que el de A. Ante esto la entrevistadora le comenta que eso pasa en matemáticas cuando aplicamos la fórmula y no checamos si tiene sentido lo que estamos haciendo: “en tu caso usaste la fórmula pero no checaste las respuestas correctas en ambos exámenes”.

M3 dice que cuando daba clases y los niños no comprendían el tema visto, ella trabajaba con ellos ese tema hasta que los niños lograban entenderlo: *“No me gustaba que los niños se quedaran con las dudas, y cuando el tema es primordial ‘machtetito, machetito’”*. Y también se había dado cuenta que los temas que venían marcados en el libro de SEP no estaban relacionados y ella tenía que brincarse los temas.

**LADO A**

- a) Sumar las preguntas correctas e incorrectas para conocer el total.

$$\checkmark 2$$

$$2+3=5$$

$$\times 3$$

El total equivale a 10 de calificación.

- b) Si los 5 reactivos corresponden a 10 de calificación y se tienen dos respuestas correctas, ¿a cuánto equivale de calificación equivale?

Total de preguntas	5	10	Calificación
Preguntas correctas	2	?	

- c) Para conocer la calificación se debe multiplicar las preguntas correctas por 10 (calificación) entre el total de las preguntas.  $2 \times 10 \div 5 = 4$

**LADO B**

- a) Sumar las preguntas correctas e incorrectas para conocer el total.

$$\checkmark 2$$

$$2+2=4$$

$$\times 2$$

El total equivale a 10 de calificación.

- b) Si los 5 reactivos corresponden a 10 de calificación y se tienen dos respuestas correctas, ¿a cuánto equivale de calificación equivale?

Total de preguntas	4	10	Calificación
Preguntas correctas	2	?	

- c) Para conocer la calificación se debe multiplicar las preguntas correctas por 10 (calificación) entre el total de las preguntas.  $2 \times 10 \div 5 = 5$

*Nivel III*

Posteriormente M3 dice: “la reglita (la regla de tres) que me enseñaron para sacar las calificaciones en las preguntas de Exámenes ya la había utilizado antes”, y que los problemas que le habíamos presentado siempre le generaron un “impacto global”.

En este nivel, en la pregunta 9 con estructura numérica (2,5)(1,3) del contexto de Botellas, M3 utilizó RO= en la primera entrevista:

[B(2,5)(1,3):Da igual] *Aquí son cinco a dos [A] y acá tres a uno [B], pues es más fácil que me quede una amarilla aquí [A]. – (Pero el caso es que me quede una canica azul)- No, pues cualquiera de las dos, tiene más amarillas. (M3, B09).*

En la segunda entrevista la entrevistadora le dice a M3 que ahora cómo lo respondería; y M3 dice que lo sigue viendo igual. La entrevistadora dice:

Sí es cierto que tienes más chance de perder que ganar en las dos, pero eso no quiere decir que entonces pierdes igual en las dos. Entonces para ver en dónde pierdes menos, es lo mismo que habías dicho: tres es a uno, tres es a uno, y a esta otra [A] le faltaría una amarilla para que quedaran igual, entonces éste [A] tiene un poquito menos de amarillas. Sí es cierto que en las dos tienes más chance de perder, pero aquí [A] tienes un poquito más chance de ganar.

M3 dice que sí, por la distribución de las dos canicas azules, y la entrevistadora añade que a la segunda azul le faltaría una amarilla para completar el paquete uno a tres, uno a tres que se está viendo en todos los demás casos.

Después M3 dice que ahora lo vería de manera proporcional y no de que pueda salir una amarilla o una azul, al decir dos amarillas para una azul, dos amarillas para una azul en A y en B dos amarillas para una azul y en cada una sobra una canica amarilla. Es decir, M3 pasa de RO= en la primera entrevista a RPS en la segunda entrevista, piensa que ese razonamiento ya es proporcional. La entrevistadora le dice que no se fije de nuevo en los restantes sino que también distribuya esas canicas amarillas en las canicas azules, pues en A queda una canica amarilla para *dos* azules y en B queda una canica amarilla para *una* canica

azul. Finalmente M3 dice que de acuerdo con la proporción había más posibilidades de que quedara una canica azul en la botella A.

La entrevistadora le dice a M3 que otra manera más formal de verlo es decir cuántas azules entre cuántas canicas:

Aquí tienes dos azules y cinco amarillas, y tendrías  $\frac{2}{7}$  y si lo dividimos te da .28 en A. Aquí tienes en B  $\frac{1}{4}$  y te da .25. Entonces tienes .25 y .28, el hecho de que decías tengo más chance de perder pues sí, porque en las dos tienes una probabilidad menor de un 50%, menor del .5, pero aquí tienes [B] .25 y .28 [A] y es muy poquito más [A].

Por cuestiones del tiempo disponible para la entrevista, ya no se pudo revisar con M3 las demás preguntas de este nivel ni las preguntas que corresponden al Nivel I.

### Parte C: término de la entrevista

Al final de la entrevista la maestra M3 refirió que algunas veces ella daba regularización a algunos niños, que la materia de matemáticas era la que les resultaba más difícil de todas las asignaturas que llevan en la escuela primaria. Y la entrevistadora le dijo a M3 que si requería de otra sesión por si surgía alguna duda, podía solicitarla.

### *5.5.3 Análisis global*

En la primera entrevista el desempeño de la maestra M3 en el Nivel I fue satisfactorio en los cinco contextos, para los Niveles II y III los contextos de Exámenes y Jamaica (mezcla) le resultaron ser los más difíciles. En el Nivel III M3 cometió la mayoría de los errores.

En los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) M3 no tuvo ningún problema. Y en los contextos de Botellas y Exámenes le fue mejor que en el contexto de Jamaica, estos últimos, problemas de mezcla.

La estrategia RP que utilizó más frecuentemente fue la de reparto pero de manera incorrecta al eliminar los llamados “sobrantes” y en el contexto de Exámenes aplicó como estrategia la regla de tres para sacar calificaciones de forma incorrecta.

En la segunda entrevista en la parte de la explicación de las estrategias aplicables a los problemas presentados durante la primera entrevista, la maestra expresa a la entrevistadora las dudas que tenía para utilizar correctamente la estrategia de reparto, reconoció qué estrategia había utilizado. En la proyección de las preguntas del Nivel II la maestra corrigió un RS+.

Durante la primera entrevista en el contexto de Exámenes M3 utilizó una “reglita” de tres de forma incorrecta; al presentarle la manera correcta de utilizar la regla de tres la maestra M3 no pudo realizarla sola, y la entrevistadora le explicó por segunda vez y le ayudó a realizar el procedimiento para sacar las calificaciones correspondientes de cada examen. No se efectuó la revisión del Nivel I por cuestiones de tiempo.

Durante esta sesión hubo muchas interrupciones; a partir de ello consideramos que la retroalimentación perdió eficacia, pues las interrupciones hacían que la continuidad se perdiera (al trabajar sobre las estrategias, la proyección y la corrección de sus respuestas).

Algunas veces se logró que M3 centrara su atención en su acción pasada y que ella misma considerara que necesitaba un reforzamiento, esto sí fue un logro. Y concluimos que la retroalimentación no fue suficientemente efectiva.

## **5.6 Maestra M4**

La maestra M4 es egresada de la BENM, tiene 30 años de servicio, de los cuales 25 ha laborado frente a grupos regulares. Los grados en que más tiempo impartió clases fueron 1°, 5° y 6°; y lleva 4 años trabajando en el Sector, como



A.T.P. Actualmente imparte clases a un grupo de niños desfasados de 4° por las tardes, y por las mañanas es AT.P.

### 5.6.1 Primera entrevista

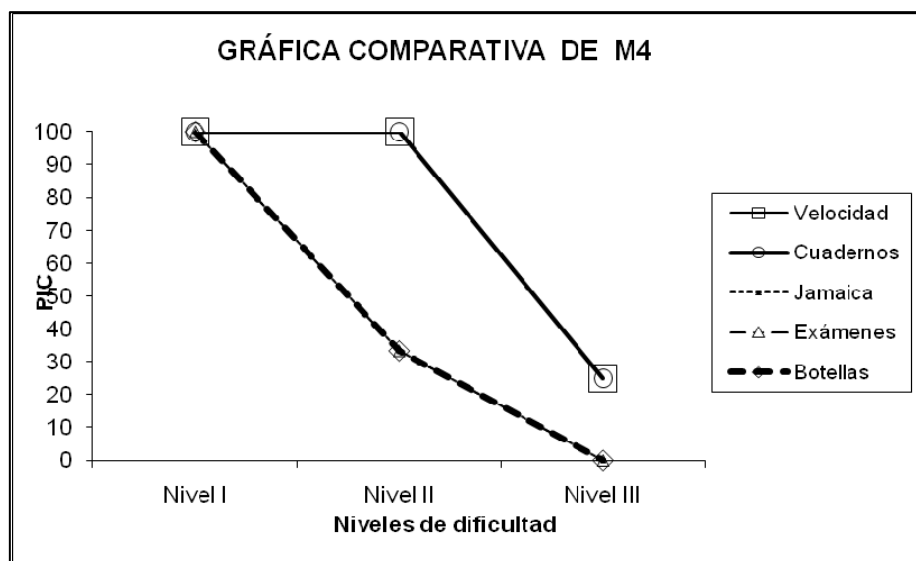
La maestra M4 fue una persona cordial, al responder las situaciones planteadas, algunas veces tardó en dar una respuesta concreta y al tener que explicar cuál era su respuesta utilizaba la tarjeta para explicar su respuesta (relacionando los antecedentes con los consecuentes y haciendo relaciones entre ambos objetos). No hubo interrupciones durante la sesión, que tuvo una duración de 53 minutos aproximadamente.

#### Análisis cuantitativo

En la tabla 26 se muestran los promedios PIC que obtuvo M4 en los tres niveles de dificultad, en los cinco contextos del instrumento; en la figura 18 se reporta el comportamiento global que obtuvo en los tres niveles de dificultad por contexto.

PIC	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas	TOTAL
Nivel I	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Nivel II	100.0	100.0	33.3	33.3	33.3	64.7
Nivel III	25.0	25.0	0.0	0.0	0.0	14.3
<b>TOTAL</b>	72.7	75.0	55.7	55.7	55.7	64.0
<b>TIPOS DE GRÁFICO</b>	C	C	B	B	B	B

**TABLA 26**

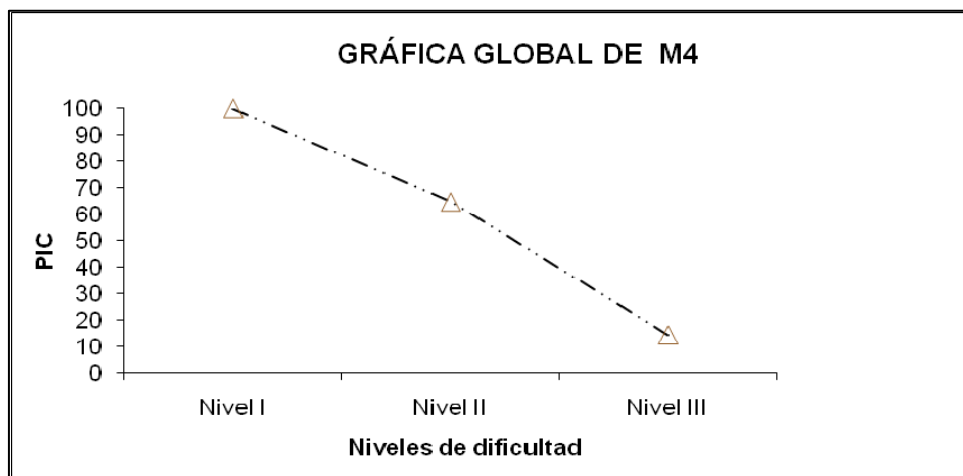
**FIGURA 18**

Como se puede observar, M4 presenta sólo dos tipos de comportamiento en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) el tipo de comportamiento que presenta corresponde al grupo C, mientras que para los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas (mezcla) presenta un comportamiento del tipo B.

En los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) las estrategias que utilizó M4 para los niveles I y II fueron las adecuadas y para el Nivel III la mayoría de sus estrategias fueron incorrectas.

También fue homogéneo el comportamiento en mezcla, obteniendo resultados muy bajos en el Nivel III. Y no se le plantearon las tres últimas preguntas de este nivel.

En la figura 19 se presenta el promedio global obtenido en los tres niveles de dificultad de la maestra M4. El mejor promedio PIC que obtuvo de los tres niveles de dificultad fue en Nivel I, también se observa que el Nivel II tiene un promedio PIC de 64. El Nivel III tiene un promedio PIC de 14.3, por lo tanto presenta el promedio PIC más bajo de los tres niveles de dificultad: a la maestra M4 le fueron muy difíciles de resolver las situaciones en donde no se encuentra proporcionalidad.

**FIGURA 19**

La maestra M4, de acuerdo con los promedios PIC obtenidos en los tres niveles de dificultad, tiene un comportamiento global que corresponde al grupo B, porque el resultado obtenido en el Nivel II, es prácticamente el promedio PIC intermedio de los tres niveles de dificultad.

#### Análisis cualitativo

En la Tabla 27 se muestran las estrategias que utilizó M4 para resolver las situaciones planteadas que corresponden a los tres niveles de dificultad de los cinco contextos.

En el Nivel I las estrategias que utilizó más frecuentemente M4 fueron centraciones compuestas en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) y relaciones de orden RO+ en los contextos de Jamaica, Velocidad y Botellas (mezcla).

En el Nivel II M4 no encontró mucha dificultad al enfrentar situaciones de proporcionalidad en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa), mientras que en los contextos de Jamaica, Velocidad y Botellas M4 utilizó centraciones, relaciones de orden RO= y una relación aditiva RS+, como estrategias incorrectas.

MAESTRA "4"						
NIVEL	PREG	CONTEXTOS				
		VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
I	2	CA+*CC-	CA+&CC-	RO+	CA+&CC-	RO+
	3	CC-*CA=	CC-*CA=	RO+	RO+	RO+
	6	CA+*CC=	RO+	RO+	RO+	CA+*CC=
	7		CC-	CC-	CC-	CC-
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8	RP=	RP=	RO=	RS+	RO=
	10	RP=	RP=	CC-	CA+&CT+	CC-
	12	RP=	RP=			
III	4	CA+&RP'	RP'	CT-	RS=	RO=
	9	RP+	RP+	CC-	CC-	CC-
	11	RP'	RPS			
	13	CA+&RP'	RPS			

TABLA 27

La mayoría de las estrategias que utilizó M4 en el Nivel III para los contextos de Velocidad y Cuadernos fueron incorrectas, sólo en una pregunta, en ambos contextos, utilizó RP+, mientras que en los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas no logró resolver las situaciones de no proporcionalidad.

### 5.6.2 Segunda entrevista

El escenario en el que se desarrolló la entrevista fue cerrado, M4 fue una maestra muy participativa al externar situaciones que le sucedían dentro del salón de clases, decía que era muy importante lo que ella estaba recibiendo (conocer este tipo de problemas junto con sus estrategias correctas e incorrectas). El ambiente exterior no fue un distractor para la maestra M4. Esta sesión tuvo una duración de dos horas.

#### Parte A: Explicación de las estrategias

La maestra M4 comentó después de la explicación de los antecedentes y consecuentes de una razón, que:

En algunas ocasiones uno [ella] se confunde y los niños también, en la pregunta,... están acostumbrados... todo lo hacen mecánico. Si, por ejemplo al plantear [que] un kilo de tortilla cuesta 9 pesos, cuánto

costarán 5 kilos de tortillas, están acostumbrados a multiplicar mecánicamente 9 por 5, pues 45. Entonces en este tipo de razonamiento no lo trabajamos, entonces se acostumbran a que ya es inducida la pregunta y cuando se les presenta este tipo de razonamiento es cuando ellos empiezan a confundirse.

Durante la explicación de las primeras estrategias correctas de razonamiento proporcional que le presentaron a M4, dijo que sí podía utilizarse una división en la pregunta 10 (cuya estructura numérica es  $(3,6)(1,2)$ ) y que en ambas le darían lo mismo, es decir  $2/1=6/3$ . Casi inmediatamente también señaló que el día de la entrevista en la estructura numérica de la pregunta 10 lo que dijo fue: 2 [agua] para cada vaso [jamaica] en ambas jarras. Cabe anotar que aunque esta estrategia es RP= y por tanto correcta, no fue la que M4 había utilizado en la primera entrevista, donde había usado CC-.

La maestra dijo que en los años 80 había un programa “objetivo” que se explicaba con manzanitas y donde venían las primeras estrategias que se le explicaron a ella en los niveles de dificultad I y II, y que eso les ayudaba a consolidar para trabajar posteriormente la parte abstracta. Así mismo dijo que muchos al igual que ella se brincan esa etapa, obviando que el niño ya puede trabajar de manera “objetiva” y que ahí es donde hay un desfase y que el niño se estanca al llegar a 5° o 6°, lo cual también ocurre por el cambio de maestro y porque en 5° está el peso de la primaria. La maestra agregó que al trabajar de manera objetiva ella siente que los niños lo entienden mucho más. También comentó que muchas veces, los maestros se quedan con la forma con la que aprendieron para enseñar, pero que piensa que se deben considerar más aspectos para la enseñanza.

En el ejemplo de grupos de la pregunta 4 la maestra reconoció que ella no tomaba en cuenta los restantes y que por tanto no había proporcionalidad. La maestra M4 comentó al presentarle la estrategia de igualación, que es la que realizó más, que se le hace interesante, por las dos tablas con las que se puede comparar, ya que así es más “objetivo”. Así mismo comentó que necesita de una representación concreta para poder realizar algunos procedimientos.

*El niño no maneja porcentajes, inclusive debe sacar tablas, porque representa el costo de una bicicleta o de un aparato... cuando se les habla de mensualidades, ahí se conflictúa más el niño y debe manejar el razonamiento para poder llegar a la respuesta. Esto se me hace interesante porque ahora tengo los niños de 9 a 14 años que están desfasados: como que me hacen falta elementos para trabajar con ellos.*

La maestra reconoció que las últimas estrategias no sólo sirven para utilizarse en el razonamiento proporcional, sino también para la enseñanza de la división. Asimismo señaló que descartó el uso de fracciones cuando resolvió los problemas que se le plantearon, aunque no explicó por qué lo había hecho.

### Parte B: intervención

#### *Nivel II*

La maestra M4 en este nivel en la primera entrevista había dado respuestas diferentes a las estructuras numéricas 8 y 10 en los dos contextos de mezclas simples y de mezcla probabilística. Para las preguntas de Exámenes utilizó porcentajes, mientras que en Jamaica y para Botellas utilizó agrupaciones.

Al presentarle a la maestra M4 la pregunta 8 (2,1)(4,2) del contexto de Exámenes, donde utilizó RS+ en la primera entrevista, cambia de parecer en su respuesta y comenta que se sacaba la misma calificación en ambos porque las incorrectas eran el 50% de las correctas.

En Jamaica, se le dice que en su primera respuesta había llegado al resultado correcto pero por una razón incorrecta (RO=), que recuerde lo que se le había explicado momentos antes. Al escuchar y ver lo que había respondido, la maestra comenta que en este caso había una proporcionalidad porque eran 2 de concentrado que se diluían en 1 de agua simple en A y en B. Así mismo agrega que en un inicio (primera entrevista) no le había quedado claro lo de los grupos y que se había confundido.

Para Botellas (donde también había utilizado RO=) la maestra comenta que el día de la entrevista no se había concentrado porque tenía mucho trabajo, y

después de escuchar su primera respuesta pregunta nuevamente por el planteamiento de ese problema. Después de ello, la respuesta que da la maestra es que en ambas botellas existía la misma probabilidad porque eran dobles.

Para Exámenes en la pregunta 10 (3,6)(2,1) (donde había utilizado CA+&CT+) dice que era igual en ambos, ya que en ambos hay el 50% de correctas.

En Jamaica (donde había utilizado CC-) responde que era lo mismo: tocan dos vasos de agua a cada uno de concentrado.

En Botellas responde que existía la misma probabilidad porque a dos canicas amarillas correspondía una azul.

Es decir, tanto en la pregunta 8 como en la 10, M4 corrige sus estrategias incorrectas y usa  $RP=$ , con algunas variaciones: para las preguntas de Exámenes utiliza porcentajes, mientras que en Jamaica y Botellas, utiliza agrupaciones.

### *NIVEL III*

En esta segunda entrevista no se le solicita una respuesta alternativa a dos preguntas, ya que fueron correctas. De las preguntas 4 y 9 se le solicita respuestas diferentes pero en las preguntas 11 y 13, aunque tuvo errores, ya no es posible que nos dé otras respuestas; probablemente la maestra está cansada y la entrevistadora decide pasar a la siguiente parte de la entrevista.

Para la pregunta 4 (2,1)(3,2), en los dos contextos de tasa únicamente se le explica el objetivo de igualar: duplicar uno de los dos objetos sólo hasta encontrar una coincidencia. Lo que M4 había hecho era primero duplicar ambos objetos y no comparar buscando igualaciones, sino que lo hacía en el mismo renglón de la tabla, lo cual no le ayudaba para una respuesta.

En Exámenes (donde había utilizado  $RS=$ ) intenta explicar con porcentajes, dice:

[E(2,1)(3,2)]“Aquí [A] de tres [total de preguntas] tuvo dos [correctas] es mayor el porcentaje, acá [B] de cinco [total de preguntas] tuvo tres [correctas]... no me queda claro.” (M4,E04).

La entrevistadora le ayuda diciéndole que sí se pueden usar los porcentajes como dijo... si en A son tres preguntas y tuvo dos aciertos cuánto es dos de tres...[M4 no contesta], pues nada más dividiendo dos entre tres [la maestra realiza la operación con la calculadora y observa en silencio el resultado], la entrevistadora le pregunta si es .6666... y la maestra le contesta que sí, entonces la entrevistadora le dice que cuánto sería del lado B si son cinco preguntas y tuvo tres buenas [M4 no contesta] y le dice que divida tres entre cinco [la maestra hace la operación con la calculadora]. La entrevistadora le dice que la diferencia es pequeña pero le fue mejor a la niña por décimas en el lado A.

Para el contexto de Jamaica (donde había utilizado CT+) la maestra se ríe al oír que en la primera entrevista cambió varias veces de respuesta y dice “si no es Juana es Chana”. Cuando termina de ver su respuesta, dice que en A es dos a uno y que en B es dos a uno, uno a uno. La entrevistadora interviene: le dice que de hecho esta pregunta aparece en el material que se le explicó al principio y que ahí están todas las maneras para resolver la pregunta 4 de Jamaica, entonces le acerca el material y le dice que utilice la que le acomode. La maestra pregunta: “¿donde hay más concentrado, verdad?”, se le dice que donde el sabor es más fuerte y contesta que en la B, la entrevistadora pregunta por qué, y responde “porque hay más vasos de concentrado y menos de agua simple.” Se le dice que también en la otra jarra hay más concentrado que agua, y la entrevistadora le recuerda que en un inicio estaba haciendo grupos y entonces M4 le dice “entonces vendría siendo lo mismo, es el mismo porcentaje”. La entrevistadora le dice que todas las preguntas 4 se pueden responder con las estrategias que se le proporcionaron en el material y que vienen ejemplificadas con el contexto de Jamaica, y le comienza a explicar cómo se resuelve este problema utilizando la estrategia de agrupación; al terminar la maestra sigue igual de confundida porque pregunta que si es en la B donde el sabor es más fuerte, se le responde que es en A y se le explica una vez más cómo se resuelve esta estructura numérica pero



ahora con la estrategia de igualación y en todos los contextos. A lo largo de esta explicación M4 permanece callada.

En el contexto de Botellas (donde había utilizado RO=) dice que se pueden utilizar divisiones, pero a la hora de hacerlo empieza a dividir mal: de un lado divide  $a/c$  y del otro  $c/a$ . La entrevistadora interviene y le explica cómo se podría utilizar la división en este caso.

En Exámenes en la pregunta 9 (2,5)(1,3) (donde había utilizado CC-), la maestra pregunta si pueden sacar porcentajes y empieza dividiendo  $2/7$  porque dice que “siete es el total”, la entrevistadora le pregunta cómo es que puede saber la calificación, la maestra le responde que dividiendo las correctas entre el total de preguntas, entonces hace el cálculo de los dos exámenes y elige A con la ayuda de la entrevistadora, pero dice “ aunque la diferencia sean sólo decimas” .

En Jamaica (donde había utilizado CC-) la maestra da como segunda respuesta que da igual, porque al repartir en ambas jarras le sobra un vaso de agua, es decir ahora utiliza otra estrategia incorrecta, RS=. La entrevistadora le ayuda diciéndole que ese vaso de agua que sobra en ambas jarras se debe diluir, la maestra le dice que sí. La entrevistadora le dice que puede utilizar el procedimiento de agrupar, pero le dice que al que sobra en A le tocan dos de Jamaica y al que sobra en B le toca solo uno de Jamaica; la maestra responde que entonces el que está más concentrado es el B y se le dice que no, que la jarra más concentrada es la A, porque le toca más jamaica al vaso sobrante. La maestra pregunta si el reparto lo hizo bien, el de dos a uno, se le dice que sí, que se debe fijar ya que los residuos no se pueden comparar directamente entre ellos, sino que se debe comparar respecto a la jamaica, se le dice que empezó bien pero que se quedó a la mitad del proceso. La maestra, después de la explicación, pregunta que cómo le ayudaría la tablita en este caso y entonces se le explica la estrategia de igualación.

En Botellas (donde había utilizado CC-) la maestra responde ahora que da igual porque en ambas botellas sobra una canica amarilla, por tanto utiliza la

estrategia incorrecta RS=, pero la entrevistadora le dice que se busca que salga la canica azul, y que en este contexto ocurre lo mismo de las jarras. Entonces la maestra dice que es en A.

Para el caso de los contextos de tasas, en la pregunta 13 (3,2)(5,3), la maestra ya se nota cansada. Pregunta por el planteamiento del problema en el contexto de velocidad y la entrevistadora le dice que se busca en dónde la niña camina más rápido. También se le dice que puede utilizar la estrategia de igualación y para ello buscar un factor común; por ejemplo en el caso del contexto de velocidad puede buscar un factor común entre minutos y que el factor común en esta pregunta sería seis. Es decir, se puede saber cuántas cuadras camina cada niña en seis minutos: entonces la niña A en seis minutos camina nueve cuadras, ¿y la niña B? responde M4 que serían diez, entonces se le dice que camina más la niña B, ya que se igualaron los minutos y se compararon las cuadras.

### Parte C: término de la entrevista

Se le explicó a grandes rasgos el material porque ya habían transcurrido las dos horas acordadas; se le comentó que podría solicitar ayuda si es que la requería.

#### *5.6.3. Análisis global*

Durante la primera entrevista M4 usó estrategias incorrectas en el Nivel III tanto para los contextos de tasas como para los contextos de mezcla y usó estrategias incorrectas en el Nivel II en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa).

La estrategia RP que más intentó utilizar la maestra durante la primera entrevista fue la de agrupaciones, pero no entendía para qué la utilizaba y por tanto su justificación no era completa.

Las estrategias incorrectas que M4 usó en el Nivel II en los contextos de mezcla durante la primera entrevista fueron RO=, CC-, una estrategia compuesta y una estrategia aditiva. En la segunda entrevista logró usar estrategias correctas RP= en todas las estructuras numéricas donde había utilizado estrategias incorrectas, mediante porcentajes en Exámenes o agrupaciones en Botellas y Jamaica.

La mayoría de los errores cometidos por M4 en la primera entrevista se encuentran en el Nivel III: no logró resolver las situaciones de no proporcionalidad. Al observar los errores en los contextos de tasas en el video editado de la primera entrevista, se le explicó a M4 cómo se usa la estrategia de igualación y para qué sirve. De las estrategias incorrectas en el Nivel III en mezclas, M4 en la segunda entrevista usó muchos intentos de RP+ utilizando cocientes y, en ocasiones, la entrevistadora tuvo que intervenir para que la maestra realizara bien los procedimientos aritméticos. También ocurrió que intentó sustituir una estrategia incorrecta por otra también incorrecta.

La maestra, desde el inicio de esta segunda entrevista, mostró gran interés por trabajar, en el momento de la explicación de las entrevistas reconoció qué estrategias ella había utilizado y qué era lo que le faltó hacer. Durante esta explicación de estrategias le pareció interesante la tabla de igualación, por la cual preguntó después al ver sus respuestas en el Nivel III.

Se puede considerar que la maestra se encuentra en un proceso de transición de uso de estrategias simples a estrategias de proporcionalidad al intentar usar cocientes, estrategia que en la primera entrevista ya había utilizado más. Por ello se considera que una consistencia en el comportamiento de la maestra al usar RP+ es con los cocientes, no sólo por el hecho de que los utilizó correctamente en el Nivel II, sino también porque los intentó usar en el Nivel III. El problema que se notó con la maestra M4 fue que cambió una estrategia incorrecta por otra incorrecta, lo cual expresa que a la maestra aún le es complicado entender las agrupaciones, pero que quizá en un futuro con más capacitación en

el uso de esta estrategia sería la segunda con la que más se acomodaría al resolver problemas de proporcionalidad.

El caso de la maestra M4 ejemplifica muy bien la transición del uso del conocimiento de un estado real (independencia al resolver un problema) a uno potencial (ayuda para resolver un problema), es decir la maestra al usar dos estrategias distintas en este trabajo muestra cómo se encuentra en una Zona de Desarrollo Próximo en cada uno de los dos casos. El primer caso es sobre el uso de cocientes en el Nivel II y sus intentos por usarlos como estrategia en el Nivel III con la ayuda de la entrevistadora. El segundo es sobre el uso de la estrategia de agrupaciones, que quizá con una intervención de una persona que la siga guiando en su uso, pueda llegar a usar con éxito en los niveles de menor dificultad para pasar al tercer nivel con mayor dificultad.

Podemos considerar a partir de lo anterior que la sesión de retroalimentación fue efectiva, que M4 al conocer que estaba cometiendo un error tuvo la necesidad de conocer cómo corregirlo, y llevarlo a cabo ella misma, aunque esto sólo ocurrió en el Nivel II, pero también creemos que en el momento de proyectarle algunas estrategias incorrectas o incompletas del Nivel III no fue que no lo reflexionara completamente, sino que el cansancio pudo haber sido un factor que determinó su desempeño en la parte final.

## **5.7 Maestra M5**

La maestra M5 egresó hace un año de la Benemérita Escuela Nacional de Maestras, actualmente es maestra de cuarto grado. Comentó que durante su formación tomó varios cursos enfocados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

### 5.7.1 Primera entrevista

La entrevista se realizó en la oficina escolar y dentro de su horario laboral. Durante los planteamientos de las preguntas M5 fue poco participativa.

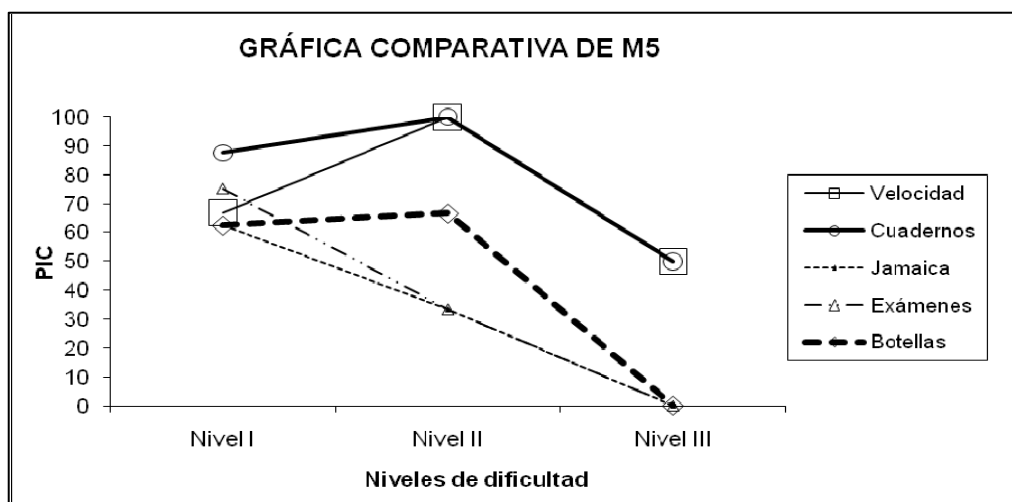
Después de haberle planteado las preguntas platicó sobre su trabajo dentro del salón de clases (que era organizada, que preparaba su clase y que a veces levantaba la voz para controlar al grupo).

#### Análisis Cuantitativo

En la tabla 28 se reportan los promedios PIC que obtuvo la maestra M5 en los tres niveles de dificultad en los cinco contextos del instrumento y en la figura 20 se muestra el comportamiento global de los tres niveles de dificultad que obtuvo la maestra M5.

PIC	Velocidad	Cuadernos	Jamaica	Exámenes	Botellas	TOTAL
<b>Nivel I</b>	66.7	87.5	62.5	75.0	62.5	71.1
<b>Nivel II</b>	100.0	100.0	33.3	33.3	66.7	70.6
<b>Nivel III</b>	50.0	50.0	0.0	0.0	0.0	26.7
<b>TOTAL</b>	72.7	79.2	38.9	44.4	45.0	57.8

**TABLA 28**



**FIGURA 20**

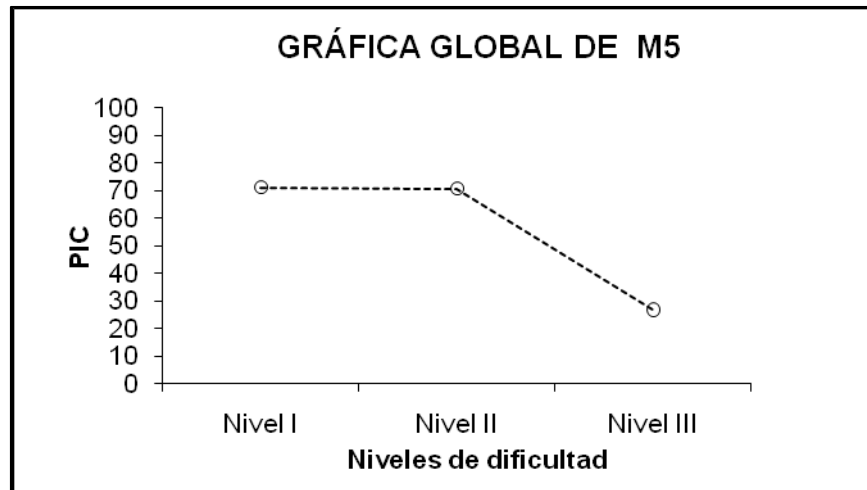
Para los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasas) M5 obtiene los mismos resultados para los niveles II y III, aunque en el Nivel I el contexto de Velocidad tiene un promedio PIC más bajo.

El comportamiento que obtiene la maestra M5 para el contexto de Velocidad parece atípico, porque el Nivel I es menor que el Nivel II. Sin embargo, esto se debe a que sólo se le plantearon dos de las cuatro preguntas y además en una de ellas sólo describió. Por lo tanto se puede decir que en ambos contextos de tasa el comportamiento es C.

Para los contextos de Jamaica y Exámenes el comportamiento es B, a pesar de los bajos niveles PIC en el Nivel I, y por último, en el contexto de Botellas obtiene un comportamiento atípico, por la forma de la gráfica (Niveles I y II muy similares) parecería un comportamiento tipo C, pero con valores PIC más bajos de lo normal en ese perfil.

En los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas los niveles I y II alcanzan un promedio no mayor de 70. Los contextos de Jamaica y Botellas en el Nivel I obtienen el mismo promedio PIC y el promedio PIC del contexto de Exámenes es de 75. En el Nivel II de los contextos de Jamaica y Exámenes la maestra M5 obtiene el mismo promedio (33.3), mientras que en el contexto de Botellas obtiene el doble del promedio de los contextos anteriores. Finalmente, en el Nivel III los tres contextos de mezcla le resultaron imposibles de resolver.

En la figura 21 se reporta el promedio global de M5 en los tres niveles de dificultad. La maestra M5 obtiene un promedio PIC de 71.1 en el Nivel I (dentro de estas situaciones planteadas se encuentran algunas irregularidades de la maestra M5, quien dio algunas respuestas sin justificación y sólo hizo la descripción de la situación planteada).

**FIGURA 21**

En el Nivel II la maestra M5 obtiene un promedio PIC de 70.6 que le hace ocupar el segundo lugar de los tres niveles de dificultad. Se puede observar que la diferencia entre promedios PIC de los niveles I y II es de 6.5: muy pequeña.

Finalmente para el Nivel III, M5 obtiene un promedio PIC de 26.7, siendo éste el más bajo de los tres niveles. Para M5 fue difícil reconocer las situaciones de no proporcionalidad, donde la única estrategia aplicable era RP+ y dentro de este nivel se encuentra la mayoría de errores.

El comportamiento global que obtiene M5 en los tres niveles de dificultad es atípico y similar al de Botellas, porque el Nivel I es demasiado bajo para ser B, el Nivel II es demasiado alto para ser A, y los niveles I y II son demasiados bajos para ser C.

### Análisis Cualitativo

En la tabla 29 se muestran las estrategias que utilizó M5 para resolver las preguntas planteadas dentro de los tres niveles en los cinco contextos.

MAESTRA "5"						
NIVEL	PREG	CONTEXTOS				
		VELOCIDAD	CUADERNOS	JAMAICA	EXÁMENES	BOTELLAS
I	2	DESCRIPCIÓN	CA+&CC-	CA+*CT=	CA+*CT=	CA+
	3		CC-*CA=	CC-	CT-	CC-*CA=
	6	RO+	RO+	CA+	CA+	CA+
	7		SJ	SJ	CC-	SJ
II	5	RP=	RP=	RP=	RP=	RP=
	8	RP=	RP=	CC-	CA+	CC-
	10	RP=	RP=	CC-	RO= $\neg$ RP=	RP=
	12	RP=	RP=			
II	4	RP+	RP+	CA+ $\perp$ CC-	CC-	CC-
	9	RP+	RP+	CC-	RO=	CC-
	11	CA+	CA+			
	13	CA+ $\neg$ RP'	CA+			CA+

TABLA 29

En el Nivel I la maestra M5 en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) utilizó una relación de orden RO+ y utilizó centraciones compuestas como estrategia más frecuente. En los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas (mezcla) sólo utilizó para cada uno de ellos, una centración compuesta y las demás centraciones que aplicó fueron potencialmente incompletas. Llama la atención que en mezcla no utilizó nunca RO+, que a las otras maestras les resultó fácil.

En los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa) del Nivel II la maestra M5 utiliza sistemáticamente RP= como estrategia. Para los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas (mezcla) sólo en la pregunta cinco la maestra aplica RP= como estrategia y en las demás preguntas utiliza centraciones, que son incorrectas.

La maestra, en el contexto de Exámenes comete, un error particularmente grave, al iniciar observando que en ambos objetos los antecedentes son la mitad de los consecuentes (relación RP =), pero corrige esa primera observación, observa de nuevo y se queda con la relación de orden RO=, porque la mayoría las tuvo incorrectas.



[E (3,6)(1,2):Da igual] *Aquí la mitad las tuvo bien [A], y aquí son tres preguntas [B], Ah no, la mitad no, no las tuvo bien. No espérate, son nueve preguntas, ¡es igual! – (¿Por qué?)- No lo sé. –(A ver, ¿esto de la mitad es porque las correctas son la mitad de las incorrectas?)- No, eso no, modifiqué eso, porque aquí son nueve preguntas y la mayoría las tuvo incorrectas [A], y aquí son tres y la mayoría las tuvo incorrectas [B]. (M5, 10E).*

En el Nivel III en los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasa), M5 utilizó estrategias parecidas RP+ para las primeras dos situaciones planteadas y para las dos siguientes situaciones utilizó de manera incorrecta centraciones. En los contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas, M5 no obtuvo ningún RP+, mientras en los contextos de Jamaica y Botellas la estrategia que utilizó más frecuentemente y de manera incorrecta fueron centraciones y RO=. M3 utilizó 10 centraciones en 15 situaciones presentadas, es grave porque en las centraciones no se considera toda la información del problema.

### 5.7.2 Segunda entrevista

El escenario en el que se desarrolló la entrevista fue muy ruidoso (pasó el camión de la basura y se escuchaba muy cerca y fuerte el sonido de su campana, así como el claxon de varios carros). Al finalizar la explicación de los dos tipos de problemas que implican cuatro números, la maestra nos preguntó por qué la estábamos entrevistando; ya que no se le había dicho el porqué de nuestra presencia y para qué era el trabajo. Se le preguntó si se sentía presionada y dijo que no, que simplemente quería saber. Durante la entrevista fue muy común ver reír a la maestra al momento de escuchar tanto sus respuestas correctas como incorrectas, además de verla bostezar y estirarse y jugar con su cabello.

La maestra tuvo curiosidad por saber por qué no se le plantearon todas las preguntas y se le dijo que podíamos promover una estrategia incorrecta al dejarla usar consecutivamente estrategias que estaban mal y dijo que sí era cierto; además de que no teníamos mucho tiempo disponible. La entrevista tuvo una duración de una hora con ocho minutos.

Parte A: Explicación de las estrategias

En esta parte la entrevistadora le dijo a M5 que llegó a utilizar las estrategias de comparación del Nivel I, pero que en ocasiones le faltaba completar su argumento. Cuando se le explicaban las estrategias correctas de razonamiento proporcional, la maestra preguntó que si el material que se le explicaba se le daría, porque se le hacía muy interesante.

Durante la explicación de las estrategias a la maestra, uno de sus alumnos fue a buscarla, lo que ocasionó que a ella no le quedara clara la estrategia de divisiones o porcentajes y pidió que se le explicara otra vez.

Parte B: intervención*Nivel II*

En este nivel M5 tuvo en su primera entrevista cinco estrategias incorrectas, las cuales en su mayoría fueron centraciones. A continuación se ejemplifican algunas de sus respuestas incorrectas y posteriormente se muestra la respuesta que dio en su segunda entrevista.

En la pregunta 10 (3,6)(1,2) del contexto de Exámenes, M5 había utilizado  $RO= \rightarrow RP=$  como estrategia incorrecta durante su primera entrevista (ver la transcripción en la página anterior). En la segunda entrevista se le explica a M5 que su primer argumento ( $RP=$ ) había sido correcto (mitad de respuestas correctas que de incorrectas), pero que el segundo que dio ( $RO=$ ) no fue así (mayoría de incorrectas en ambos exámenes); y que el primer argumento se puede utilizar en los demás contextos, aunque en algunos puede ser más difícil de utilizar.

En la pregunta 10 de Jamaica, la maestra no pudo escuchar su primera respuesta, puesto que se tuvo un problema al editar el video, pero se le dijo que su respuesta había sido B porque tiene menos agua que la otra. Cuando la maestra iba a responder dijo:

*“A ver, razonemos, ¿en qué jarra sabe más a jamaica? Y yo dije la B... entonces es la A [se ríe]”*

La entrevistadora le dice que revise el material que se le acaba de explicar, porque justamente se había utilizado la pregunta 10 en el contexto de Jamaica y que ahí había muchos argumentos diferentes correctos y que después lo podía hacer con más calma y que en las dos jarras es el mismo sabor. Entonces M5 dice: *“o sea que estuve muy mal”* [se ríe].

En la pregunta 8 (2,1)(4,2) en el contexto de Botellas M5 utilizó CC- como estrategia incorrecta durante su primera entrevista:

[B(2,1)(4,2):A] *Aquí porque sólo hay que pelear con una amarilla*  
[A].(M5,B8).

En la segunda entrevista M5 dice: *“Aquí da igual, ¿no? porque tenía más probabilidades de salir”*

La entrevistadora le dice que también tenía menos azules, se le comentó que en estos números no sirven las comparaciones. Que puede utilizar varios argumentos como: azules doble de amarillas, azules doble que estas otras azules, amarillas dobles de amarillas. Es decir, se le dice que hay muchas maneras y que puede utilizar lo que dijo en cuadernos y velocidad de esa misma pregunta.

En el contexto de Exámenes en la pregunta 8 contesta, en la segunda entrevista, que era igual por lo que ya se había argumentado en el contexto de botellas.

Para Jamaica en la pregunta 8 sólo se le dice que le pasó lo mismo que en los otros dos contextos y dice que sí.

### *Nivel III*

Antes de que la maestra observe su grabación se le dice que era el nivel más difícil y que se fije cómo había resuelto los contextos de cuadernos y velocidad, porque ahí había estado bien.

En la pregunta 4 (2,1)(3,2) en el contexto de Exámenes la maestra dio dos diferentes respuestas, en la primera entrevista utilizó CC- y después CT+; lo que dijo fue:

[E(2,1)(3,2):B]. *Son tres preguntas de las cuales sólo dos tuvo buenas y sólo tuvo un error [A] y en éste son cinco preguntas y sólo tuvo dos buenas y dos errores [B]. ¿En qué examen le fue mejor? en el A. [¿Por qué sólo tuvo un error?]. Bueno, modifíco mi respuesta, sería la B, porque, bueno, son más preguntas y tiene más correctas. A lo mejor en ésta se puede ver que sólo son tres preguntitas [A], pues lo veo como profesora: ésta tiene más preguntas [B]. (M5, E04).*

Al ver su primera respuesta continúa diciendo que A por la misma razón; la entrevistadora le dice que no es la razón correcta, y le comienza a explicar por qué no y que en esta pregunta puede utilizar cocientes, ya que es una estrategia que utilizó mucho y que ahí se daría cuenta que por décimas le fue mejor en A, o que podía ver los dobles. La entrevistadora después de que escucha y observa la segunda respuesta de la maestra en la primera entrevista le dice que ahí había utilizando comparaciones; M5 sólo dijo que sí.

En la pregunta 13 (3,2)(5,3) en el contexto de Velocidad a M5 se le comenta que en la primera entrevista empezó realizando la correspondencia de cuadras por minutos, para lo cual dividió las cuadras sobre la ficha que se le proporcionó, pero se le dice que hizo mal dicha repartición. La maestra contestó: “*ya me acordé de esa pregunta*” [ríe]. Se le propone que intente hacerlo bien y realiza bien la correspondencia de una cuadro y media por minuto.

### Parte C: término de la entrevista

La maestra dice que la entrevistadora a la hora de presentarle los materiales y las estrategias le explicó bien, pero que ella debe revisarlos con más detalle.

También en esta parte la entrevistadora le explicó que las intuiciones son válidas pero lo importante como maestros es que no se debe enseñar a los niños intuiciones que no sean válidas y que por eso es importante que como docentes

estén conscientes de las intuiciones para reconocer cuándo sí y cuándo no se deben usar. Entonces la entrevistadora le dice que como maestros deben conocer sus intuiciones para ser cuidadosos y reconocer cuándo las intuiciones de los niños son correctas por encima de la intuición de los maestros.

### *5.7.3. Análisis global*

Durante la primera entrevista M5 usó más estrategias inadecuadas en el Nivel III; en este nivel utilizó estrategias incorrectas tanto en los contextos de mezclas como en los de tasas. En el Nivel II, la maestra usó estrategias incorrectas en los contextos de mezcla.

Las estrategias incorrectas usadas en el Nivel II por M5 en los contextos de mezcla fueron centraciones, pero estas M5 no las cambió durante la segunda entrevista, puesto que no se mostró interesada. Las estrategias incorrectas usadas en el Nivel III por M5 en ambos tipos de contextos fueron centraciones y sólo hizo uso de una relación.

En la segunda entrevista, M5 no modificó sus estrategias, que en su mayor parte fueron centraciones, por lo cual se puede decir que la retroalimentación no fue fructífera con ella. La única excepción a esta regularidad fue la corrección RP+ utilizada en la pregunta 13 de Velocidad, que se comentó previamente.

La actitud de M5 en ambas entrevistas fue de poco interés; quizá esto se debió al hecho de que sus superiores (jefa de sector) no le comunicaron el por qué se le había elegido para colaborar con la presente tesis.

Podemos concluir que la sesión de retroalimentación no fue efectiva al observar que M5 no pudo corregir sus respuestas incorrectas o incompletas, además de lo descrito en el párrafo anterior.

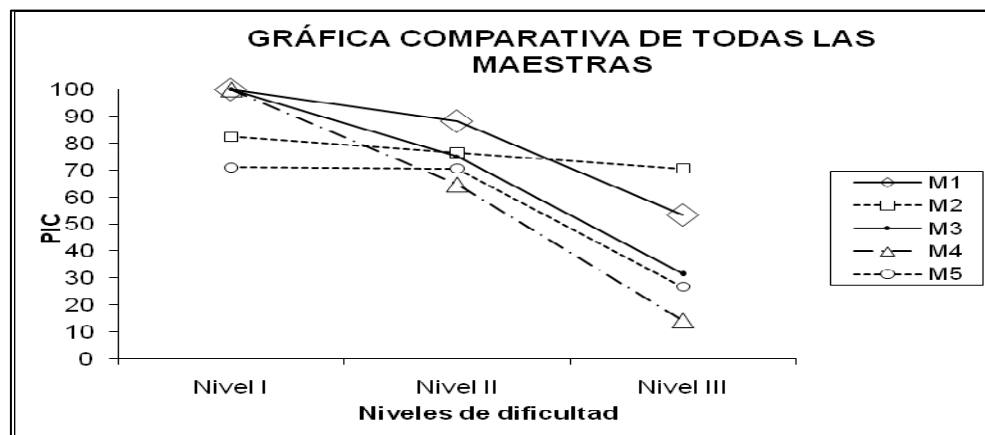
## 5.8 Visión global

En la siguiente sección se menciona un punto de vista general de lo acontecido durante las dos entrevistas realizadas a las cinco maestras.

### 5.8.1 Análisis global de la primera entrevista

En este apartado se mencionarán de manera global las regularidades presentadas por las cinco maestras entrevistadas en los problemas de comparación de razones (tasa o mezcla) y considerando los niveles de dificultad. Finalmente se mencionará una característica propia de cada maestra entrevistada.

En la figura 22 se muestra el promedio PIC que obtuvo cada una de las maestras entrevistadas en los tres niveles de dificultad que corresponden a las situaciones planteadas del instrumento.



**FIGURA 22**

Las maestras que obtuvieron los mejores resultados fueron M1 y M2; M4 y M3 obtuvieron promedios PIC regulares; mientras M5 es la que obtiene el promedio PIC más bajo de todas. Como ya se mencionó, un análisis exhaustivo de los Niveles está en Flores (2010).

De los cinco contextos presentados a las maestras, los contextos de Velocidad y Cuadernos (tasas) fueron los más fáciles de resolver, mientras que los

contextos de Jamaica, Exámenes y Botellas (mezcla) aparentemente les resultaron ser más complicados. El contexto de Jamaica obtuvo el promedio más bajo de todos los contextos, esto puede haberse debido a que fue el primer contexto que se les presentó, entre otras causas que desconocemos.

Las estrategias que utilizaron adecuadamente con mayor frecuencia las cinco maestras en el Nivel I fueron las centraciones compuestas, sobre todo en los contextos de tasa, y las relaciones RO+ en los de mezcla.

Y para los niveles II y III las centraciones y las relaciones aditivas fueron las estrategias más frecuentemente utilizadas de forma incorrecta por las cinco maestras: errores “predilectos” de cada una. La mayoría de los errores cometidos por M1 fueron de tipo aditivo. La maestra M5 para resolver la mayoría de las situaciones planteadas utilizó centraciones como estrategia más frecuente en los tres niveles de dificultad.

Las maestras M2 y M3 cometieron un error semejante al no poder aplicar correctamente un algoritmo. En el caso de M2, el error que cometió fue en el contexto de Botellas al pretender utilizar fracciones equivalentes para resolver las situaciones presentadas: trató de hacerlo de manera mecánica y erró en el procedimiento. El error que cometió la maestra M3 fue en el contexto de Exámenes: quiso representar los elementos numéricos en una “reglita”, de manera incorrecta y después siguió utilizando de manera mecánica su algoritmo. Lo que las hace distintas es que M2 es una maestra que se encuentra frente a grupo y que M3 es una maestra que se encuentra en una actividad administrativa; por lo tanto el error de M2 puede tener más graves consecuencias porque ella interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje de varios alumnos.

Las maestras M2, M4 y M5 son maestras que están frente a grupo, y M1 y M3 son maestras que se encuentran sólo dentro del área administrativa. Sin importar la actividad que lleven a cabo dentro del ámbito escolar se esperaba que todas las maestras pudiesen manejar y conocer adecuadamente las estrategias correctas aplicables para los problemas que se les plantearon. Como hemos visto,

este supuesto se cumple en el Nivel I, parcialmente en el Nivel II y prácticamente no se cumple en el Nivel III.

### *5.8.2 Análisis global de la segunda entrevista*

En esta parte se presenta el efecto de la retroalimentación dada a las cinco maestras entrevistadas, describiendo de manera general y particular lo más representativo que presentaron las cinco maestras entrevistadas al presentarles sus respuestas incorrectas.

La actitud que manifestaron las maestras fue positiva, al mostrarse interesadas al conocer por estrategias correctas e incorrectas aplicables a los problemas planteados durante la primera sesión, explicadas por la entrevistadora.

Algunas maestras recordaron qué estrategia habían utilizado y si lo habían hecho de manera correcta, incompleta o incorrecta según su caso. De igual forma las maestras expresaron la experiencia que habían tenido dentro del salón de clases cuando los alumnos no comprendían la estrategia que ellas les habían enseñado y mencionaron qué técnicas emplean para ayudar al alumno en su proceso de aprendizaje.

Las maestras M1, M2 y M3 mostraron asombro cuando se les mencionó qué estrategias habían utilizado de manera incorrecta en los Niveles II y III, en los contextos de mezcla. Algunas veces expresaron “no lo puedo creer”. Y dieron como explicación que la percepción había determinado su respuesta, o que el contexto pudo ser tan familiar que no era necesario pensarlo (en este caso, fueron los contextos de Jamaica y Exámenes, problemas de mezcla). La maestra M4, reconoció qué le faltó hacer para que su estrategia fuera completa y la maestra M5 algunas veces reconoció qué estrategia utilizó.

Con lo expuesto en este capítulo, podemos decir que las primeras cuatro maestras corrigieron sus respuestas incorrectas o incompletas, pero no la maestra



M5, que no logró corregir sus respuestas, porque pasó de una estrategia de centración a una estrategia aditiva. Para la corrección de sus respuestas las maestras M1, M2 y M4 corrigieron la mayoría de sus respuestas de manera individual, mientras que M3 lo logró hacer con ayuda.

A pesar de que la retroalimentación no fue suficientemente efectiva para todas las maestras, consideramos que las maestras M1, M2, M3 y M4, al conocer que utilizaron una estrategia incorrecta o un procedimiento inadecuado y exponerles las estrategias aplicables y procedimientos correctos, reconocieron que no manejaban adecuadamente algunos contenidos matemáticos y en el momento que corregían su respuesta llegaron a reflexionar sobre su actuación personal y docente. La maestra M5 mostró poco interés tal vez debido a las circunstancias que se dieron para que ella fuera elegida para la entrevista.

En el caso de M1 la estrategia de igualación fue la “preferida”, la utilizó de forma incorrecta durante la primera entrevista y para la segunda entrevista reconoció que el procedimiento que utilizó era incorrecto. Para M2 la estrategia que utilizó fueron las fracciones equivalentes y también la estrategia que utilizó de manera incorrecta; después de la explicación dada por la entrevistadora, M2 reconoció que su procedimiento fue confuso y logró entender el procedimiento que se le presentó.

La maestra M3 utilizó como estrategias una regla de tres y la igualación de manera incorrecta. Cuando la entrevistadora dio la explicación de ambas estrategias M3 sólo pudo llevar a cabo la estrategia de igualación y la regla de tres le fue imposible manejarla sola; reconoció que no manejaba esta última estrategia adecuadamente.

La maestra M4 utilizó la estrategia de cocientes para resolver las preguntas incorrectas o incompletas sólo en el Nivel II, trató de utilizar la estrategia de agrupaciones pero no logró entender el procedimiento.

Finalmente la maestra M5 no corrigió sus respuestas incorrectas o incompletas.

Aunque no fue RP= la estrategia de igualación más utilizada de manera espontánea por las maestras, varias de ellas la buscaban como opción. La mayor parte de los casos, las maestras no realizaron el procedimiento adecuado para hacer una tabla para buscar números iguales entre ambos objetos y reconocer en qué momento se podía comparar los números de ambos objetos y encontrar la igualdad. A partir de esto podemos concluir que la estrategia de igualación puede no ser la primera opción para resolver problemas de comparación, pero sí es opción para todas (menos M5).

El material que se les presentó a las maestras entrevistadas fue excesivo, algunas veces nos pareció que se habían cansado al tener que manejar tantos contenidos en tan poco tiempo y de manera sintetizada. De igual forma para la grabación y análisis de esta entrevista se suscitó una dificultad con los dispositivos técnicos, al no poder observar al mismo tiempo lo que la maestra entrevistada estaba viendo en el momento de la reproducción de su respuesta incorrecta (esta situación no se tuvo contemplada al realizar la entrevista, sino que se evidenció en el momento del análisis) Y por ello se menciona esta situación, para ser tomada en cuenta en la realización de futuras investigaciones con estructura similar.

## CONCLUSIONES

Para finalizar este trabajo se presentarán reflexiones de forma general de acuerdo al siguiente orden: en primer lugar se presentará el desempeño de las cinco docentes según los niveles de dificultad y contextos (aunque este análisis está más detallado en Flores, 2010). Una segunda reflexión se enfocará a las estrategias más comunes utilizadas por estas docentes en los problemas planteados. Las siguientes reflexiones se dirigen a lo ocurrido en la sesión de retroalimentación o espejo. Posteriormente se hacen consideraciones sobre la teoría piagetiana en esta investigación. Por último se expone el uso de la estrategia de igualación por parte de las docentes entrevistadas.

Los siguientes párrafos presentan de manera global los resultados de las docentes según niveles de dificultad y contextos. Ambos resultados coinciden con lo presentado en Flores (2010), donde son presentados de manera más extensa.

El desempeño de las docentes en los niveles de dificultad fue en orden descendente: obtuvieron los mejores promedios PIC en el Nivel I, en donde utilizaron las estrategias de comparación, que sólo son aplicables en este nivel. En los Niveles II y III estas estrategias no llevan a resultados correctos; las docentes obtuvieron mejores resultados en el Nivel II en donde su promedio PIC fue intermedio al no poder utilizar adecuadamente las estrategias de proporcionalidad, y para el Nivel III los promedios que obtuvieron las docentes fueron los más bajos ya que utilizaron en la mayoría de las preguntas establecidas las centraciones y relaciones aditivas como estrategias, siendo éstas incorrectas.

Los resultados de los cinco contextos presentados a las docentes indican que los contextos de tasas (Velocidad y Cuadernos) fueron los más fáciles de resolver, mientras que los contextos de mezcla (Jamaica, Exámenes y Botellas) les resultaron más difíciles. Esta diferencia puede deberse a lo siguiente:

- En los contextos de tasa se relacionan dos magnitudes diferentes. Por ejemplo, en el contexto de Cuadernos, el planteamiento fue el siguiente: “en dos tiendas (A y B)

se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas); ¿en cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?” Aquí se tiene que relacionar cuadernos con monedas. De manera análoga en el contexto de Velocidad se relacionan cuerdas con minutos. El hecho de que en cada caso se están relacionando dos magnitudes diferentes hace más fácil el problema.

- En los contextos de mezcla se comparaba la misma magnitud. Por ejemplo en el de Exámenes, el planteamiento era el siguiente: “una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas; ¿en cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos?” En esta situación se tenía que comparar las respuestas correctas y respuestas incorrectas de ambos exámenes. De manera análoga, en Botellas se habla solamente de canicas y en Jamaica de vasos. Esto vuelve más difíciles los problemas.

Se ha mencionado que un factor que puede explicar el desempeño en la resolución de un problema es la familiaridad que se tiene con el contexto. Por ello se consideraba que el contexto de Exámenes podría haber sido un contexto particularmente fácil de responder por la familiaridad que presentaba para las docentes, pero esto no fue así.

La dificultad que presentó el contexto de Jamaica para todas las docentes podría tener dos explicaciones. Una es que algunas docentes mencionaron que por la familiaridad no reflexionaban sus respuestas y otra fue, como algunas maestras comentaron, que parte de su respuesta había sido determinada por la percepción.

La siguiente reflexión se refiere a las estrategias más utilizadas por las cinco docentes en los problemas planteados. Y para conocer qué tipo de estrategia habían utilizado las docentes se les pedía que eligieran A, B o da igual; acompañada de un argumento. Esto permitió conocer que las centraciones y las relaciones aditivas fueron las estrategias más comunes utilizadas por las docentes. Para recordar en qué consistían estas estrategias se expone lo siguiente.

Las centraciones sólo son aplicables de manera correcta en el Nivel I y eso sólo en algunas composiciones. Para los Niveles II y III son estrategias incorrectas, ya sea como estrategias simples o compuestas. En estas centraciones el sujeto centra su atención sólo en los totales, en los antecedentes o en los consecuentes y acompaña su elección con argumentos de los siguientes estilos:

- Elegir un lado porque tiene más elementos que el otro.
- Elegir un lado porque tiene menos elementos que el otro.
- Decir da igual porque en ambos lados hay la misma cantidad de elementos.

Las siguientes estrategias más utilizadas por las docentes fueron las relaciones aditivas; estas estrategias no son aplicables correctamente en ningún nivel de dificultad. Los argumentos que se usan son de los siguientes estilos:

- El sujeto elige el objeto donde la diferencia entre antecedentes y consecuentes da más antecedentes o menos consecuentes.
- El sujeto dice “da igual” porque en ambos lados las diferencias de antecedente menos consecuente son iguales.

Las únicas estrategias correctamente aplicables en los Niveles II y III son las relaciones de proporcionalidad (RP). Pueden adoptar distintas formas; de ellas, la estrategia que más frecuentemente pretendieron utilizar estas maestras fue la de igualación, la cual consiste en duplicar o triplicar un objeto, hasta que se encuentre una igualdad con los antecedentes o los consecuentes del otro. Dado que esta estrategia representó los intentos más comunes de RP, la explicación de esta estrategia se ampliará más adelante.

La siguiente reflexión se enfoca a lo ocurrido durante la sesión de espejo o retroalimentación dada a las docentes entrevistadas. Aunque en varios casos la retroalimentación no fue suficientemente efectiva en el sentido de modificar estrategias, se considera que la retroalimentación tuvo el resultado positivo de que la mayoría de las docentes reconocieron que en ocasiones su procedimiento no fue el adecuado al utilizar estrategias y algoritmos incorrectos. Esto les permitió conocer algunas de sus

debilidades y fortalezas en dos ámbitos: el de su conocimiento del tema y el de las herramientas que tienen para llevar a cabo un proceso de enseñanza dentro del salón de clases. Además, el hecho de que con frecuencia la entrevistadora hiciera explícitas sus propias dificultades, permitió que se diera una retroalimentación mutua entre ambas personas.

Lo anterior se puede relacionar con un propósito que mencionan los cursos de matemáticas que tienen los maestros en su formación inicial: “[...] que consoliden el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendan los distintos significados que adquieren al aplicarlos en situaciones diversas y en resolución de problemas” (SEP, 2002a). Aunque dentro de esta investigación este propósito no fue un objetivo implícito, surgió al preparar la segunda sesión; y se considera que fue una forma de promover que las maestras reconocieran sus necesidades. Esto se relaciona con lo que afirma Latapí (2003): “el docente debe empezar por analizar sus propias necesidades de aprendizaje, lo cual contribuiría a elegir una oportunidad de actualización, que no fuera con el objetivo de un puntaje sino por la posibilidad de crecimiento profesional”.

Los siguientes puntos son las coincidencias encontradas entre esta investigación y la realizada por Papic et al. (1986):

- Según Papic et al., el objetivo de la llamada “sesión de espejo” o “retroalimentación en primera fase” es que los docentes tengan la posibilidad de mejorar su ejecución o actuación a partir de analizar aquellos errores cometidos en la entrevista anterior, así como perfeccionar los aciertos obtenidos. Colateralmente, la sesión espejo sirve para que la entrevistadora se observe y corrija desaciertos y afirme aciertos. Esto se logró en esta investigación.
- Los autores mencionados indican que la utilización del video permitió que “el docente hiciera una observación de su propia imagen, para señalarle aspectos relevantes y las deficiencias que manifestaba, con el fin de estimular al docente para que mejore su propia actuación”. Esto también se logró en esta investigación.

A través de esta sesión de espejo los docentes adquirieron un refuerzo académico que les permitió reconocer su grado de dominio de los contenidos matemáticos y promover la reflexión que pudiera derivar en un proceso de enseñanza-aprendizaje de calidad dentro del aula.

A pesar de que ambas entrevistas se prolongaron más allá del tiempo establecido, la actitud de las docentes siempre fue cordial, participativa, entusiasta, positiva. En la primera entrevista resolvieron los problemas planteados, y en la segunda lograron corregir sus respuestas de manera individual o con ayuda y estuvieron atentas a la explicación dada por la entrevistadora; además, consideramos que hicieron las preguntas necesarias que ellas tenían para aplicar un procedimiento. Sólo en un caso una docente no cambió su estrategia poco conveniente por una estrategia adecuada, lo que pudo haberse debido a diferentes factores.

Dentro de los comentarios que hicieron las docentes está el hecho de que algunas lecciones del libro de Matemáticas de la SEP estaban salteadas (*sic*) y que por esta situación se perdía una secuencia al ver el tema, porque algunas veces los niños ya no mostraban interés en la revisión del tema y que para ellas era difícil darle una continuidad.

La siguiente reflexión se refiere al papel que puede tener la teoría piagetiana en la interpretación de nuestros resultados. Es necesario aclarar que en esta investigación en ningún momento se etiquetó o evaluó a las maestras, sino que se intentó conocer qué tanto comprendían y conocían acerca de la proporcionalidad y del uso de ciertas estrategias. La teoría de Piaget en esta investigación sirvió para comprender el desarrollo cognitivo del nacimiento a la adolescencia, sin esperar que las adaptaciones y supuestos procesos que deberían ser característicos en la etapa de las operaciones formales, se den tal cual en la edad adulta. Es sabido que estos supuestos no necesariamente se cumplen en la adolescencia, y además la teoría piagetiana clásica no cubre el desarrollo cognitivo que logra tener un sujeto de la adolescencia a la edad adulta (Alatorre, 1994).

A partir de esta postura y de la investigación realizada no se puede asentar que las docentes entrevistadas se encuentren ni en el estadio de las operaciones concretas ni en el de las operaciones formales. Así mismo, esto se justifica al haber presentado las diferentes estrategias utilizadas por los sujetos entrevistados: de hecho, como se ha visto, todas las maestras utilizaron en algún momento estrategias características del estadio de las operaciones formales, que consisten en realizar una operación sobre otra, o una acción sobre la acción (RP+ y RP=), pero ninguna tuvo exclusivamente estos comportamientos en los Niveles II y III, donde era necesario.

La última reflexión hablará sobre la estrategia de igualación utilizada por las docentes entrevistadas de manera frecuente y se intentará aportar una posible explicación del uso que le dieron las cinco docentes.

La estrategia de igualación, o como se le llama en SEP (1992) el enfoque didáctico “Uso de tablas y razonamiento pre-proporcional”, fue una de las estrategias que más intentaron utilizar cuatro de las cinco docentes. Aunque dicha estrategia es correcta y puede resultar de fácil aplicación, la usaron en la mayoría de las veces con muchos errores en las dos entrevistas que se les realizaron.

La SEP (1992) propone las tablas de dos columnas para la enseñanza de una situación simple de proporcionalidad, es decir cuando hay una sola razón involucrada. Por ejemplo, se podría utilizar una tabla como la que puede aparecer en una taquería (ver tabla 30).



TAQUERIA EL TÍO JUAN "Precio por número de tacos"	
Tacos	Precio \$
1	6.50
2	13.00
3	19.50
4	26.00
5	32.50
6	39.00
7	45.50
8	52.00
9	58.50
10	65.00
20	130.00
50	325.00
100	650.00

**TABLA 30**

Un alumno de 5° y 6° de primaria puede completar esta tabla cuando se le da incompleta, y además puede ver las relaciones que se dan entre las magnitudes que varían proporcionalmente. Por ejemplo, lo que cuestan 5 tacos es la suma de lo que cuestan 2 y lo que cuestan 3 tacos, o lo que cuestan 16 tacos es el doble de lo que cuestan 8, etc. En esta tabla todos los renglones muestran razones equivalentes; es decir, 1:6.50 es equivalente a 2:13, a 3:19.50, etc. A fin de cuentas una tabla así permite la enseñanza–aprendizaje de la proporcionalidad en una situación en la que hay una sola razón (y sus equivalentes).

Estas tablas pueden ser utilizadas también en situaciones en las que se desea comparar dos razones. Por ejemplo, supongamos que otra taquería tiene una tabla como la siguiente.

TAQUERIA LA MANZANITA	
Tacos	Precio \$
2	12.50
4	25.00
10	62.50

**TABLA 31**

Si se pregunta en cuál taquería son más baratos, se puede buscar la coincidencia de 2 tacos: es decir, ambas tablas muestran lo que se cobra por 2 tacos: \$13.00 en “El tío Juan” y \$12.50 en la “La manzanita”.

Una situación similar es la que se presenta en el contexto de Cuadernos de esta investigación. Si tomamos por ejemplo la estructura numérica de la pregunta 4 ((2,1)(3,2)), podemos pensar que cada una de las razones 2:1 y 3:2 es un renglón de una tabla de doble columna como las de los ejemplos anteriores:

TIENDA A	
Cuadernos	Monedas
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6

TABLA 32

TIENDA B	
Cuadernos	Monedas
3	2
6	4
9	6
12	8
15	10

TABLA 33

Si se quiere saber en qué tienda son más baratos los cuadernos, se puede buscar una de estas coincidencias:

- En cuadernos (antecedentes). Encontramos que el número 6 aparece en ambas tablas: por 6 cuadernos cobran 3 monedas en la tienda A y 4 en la tienda B, lo que lleva a concluir que la más barata es la tienda A: por los mismos cuadernos cobran menos. Por cierto, también el número 12 aparece en ambas tablas en la columna de cuadernos y nos lleva a la misma conclusión, pero no es necesario llegar al 12.
- En monedas (consecuentes). Encontramos que el número 2 aparece en ambas tablas: por 2 monedas dan 4 cuadernos en la tienda A y sólo 3 en la B, lo que nos lleva de nuevo a concluir que la más barata es la tienda A: por el mismo dinero dan más cuadernos. Como en el caso anterior podíamos llegar a la misma conclusión en las coincidencias de 4 y de 6 monedas, pero no era necesario llegar al 4 ni al 6.

Es decir, en este ejemplo concreto, la igualación se encuentra desde la primera vez que se duplica del lado B.

Pero entonces cabe la pregunta ¿cuándo parar? La respuesta surgirá cuando haya una comprensión de lo que se está haciendo, que permita una interpretación del significado de los números que se manejan. Así, es posible detener el procedimiento en el momento en que al duplicar el lado B se obtiene el número 2 (lo que da la igualdad buscada), si se entiende que el problema se ha transformado en “por la misma cantidad de monedas ¿cuántos cuadernos dan en cada tienda?”. O si la igualdad es en los antecedentes, “por la misma cantidad de cuadernos ¿cuánto me cobran en cada tienda?”.

Vale la pena explicar, en términos de la metodología utilizada en esta investigación, por qué esta técnica sirve.

En la tienda A tenemos las siguientes razones equivalentes:

$2:1, 4:2, 6:3, 8:4, 10:5, 12:6, \dots$

y en la tienda B tenemos las siguientes razones equivalentes:

$3:2, 6:4, 9:6, 12:8, 15:10, \dots$

El hecho de que sean equivalentes nos permite elegir cuáles de ellas utilizamos para la comparación. Así la comparación

$2:1$  contra  $3:2$

es equivalente a la comparación

$6:3$  contra  $6:4$ ,

y también a la comparación

$4:2$  contra  $3:2$ .

Estas dos últimas comparaciones son fáciles puesto que se pueden resolver con las estrategias de comparación. Así

$6:3$  contra  $6:4$

se puede resolver observando que los antecedentes son iguales pero los consecuentes no. Elegir el lado A es la consecuencia de aplicar la estrategia

$CC \cdot CA =$

De manera análoga,

4:2 contra 3:2

se puede resolver observando que los consecuentes son iguales pero los antecedentes no. Elegir el lado A es la consecuencia de aplicar ahora la estrategia

$CA+*CC=$

Tanto la estrategia  $CC-*CA=$  como la estrategia  $CA+*CC=$  (y, en el caso de mezclas, las estrategias  $CA+*CT=$  y  $CC-*CT=$ ) son estrategias correctas aplicables en el Nivel I de dificultad; aquí las hemos llamado “estrategias de comparación”. Usar razones equivalentes nos ha permitido transformar el problema de Nivel III de dificultad

2:1 contra 3:2

en uno de estos dos problemas del Nivel I:

6:3 contra 6:4

o bien

4:2 contra 3:2

En el primer caso se tiene una igualación de cuadernos (antecedentes) y una comparación de monedas (consecuentes) (Ver la tabla 34).

Tienda A		Tienda B	
cuadernos	monedas	cuadernos	monedas
2	1	3	2
4	2	6	4
6	3	9	6
8	4	12	8
10	5	15	10
12	6		

**TABLA 34**

En el segundo se tiene una igualación de monedas (consecuentes) y una comparación de cuadernos (antecedentes) (Ver la tabla 35).

Tienda A		Tienda B	
cuadernos	monedas	cuadernos	monedas
2	1	3	2
4	2	6	4
6	3	9	6
8	4	12	8
10	5	15	
12	6		

TABLA 35

En general, las estrategias de igualación permiten transformar los problemas más difíciles (Nivel III) en problemas fáciles (Nivel I), gracias a las razones equivalentes que subyacen en las tablas de dos columnas propuestas por SEP (1992).

Cabe observar que lo que se ha expuesto aquí sobre un ejemplo (contexto de cuadernos, estructura numérica (2,1)(3,2)) sería generalizable a otros contextos y otras estructuras numéricas del Nivel III. (De hecho, una breve explicación de esta estrategia se había presentado ya en la página 56 de este trabajo en el contexto de jamaica).

Esta estrategia, que nosotros hemos llamado “de igualación”, es la misma que en los documentos de la SEP se refiere como “uso de tablas y razonamiento pre-proporcional”. (SEP, Guía de sexto grado). El material citado dice además

En este enfoque se utiliza una tabla [...], la cual se va extendiendo con la ayuda de ir efectuando dobles, triples, mitades, cuartos, décimos, etc.; y sumas de estas cantidades. Ésta es posiblemente la estrategia más natural, ya que se apoya en las propiedades más intuitivas de la proporcionalidad. Este enfoque, además de ser el más fácil, desarrolla en el niño la noción de proporcionalidad.

Se sugiere emplear este enfoque durante la primera fase de la enseñanza de la proporcionalidad”. (SEP, 1992)”

En nuestra opinión, lo que la SEP les propone a los maestros es correcto pero adolece de un defecto: llamar “pre-proporcional” a la estrategia es etiquetarla de una manera despectiva, como si no fuera una estrategia correcta sino que sólo está en el camino de serlo. Según esta versión, sólo las estrategias que utilizan los cocientes, las razones unitarias o los productos cruzados (*ibid.*) son estrategias que aplican plenamente el razonamiento proporcional; de hecho, el material citado se refiere a la estrategia como “inadecuada” (pág. 21), lo que la pone en la misma categoría que las

estrategias “cualitativas” (RO, en la notación aquí utilizada) o “aditivas” (RS), que sí son incorrectas.

No coincidimos con esta visión. Las estrategias de cocientes, razones unitarias y productos cruzados son más formales, pero no por ello más correctas.

La estrategia de igualación es correcta. Flores (2010) la propone como sugerencia didáctica para el Nivel III por esta razón y porque la propia SEP la plantea como alternativa en los materiales proporcionados a las maestras.

Sin embargo, las cuatro docentes que quisieron aplicar esta estrategia no lo hicieron adecuadamente. Primero explicaremos qué errores cometieron, y luego haremos una interpretación.

Las maestras construyeron efectivamente tablas como las que hemos mostrado:

Tienda A		Tienda B	
cuadernos	monedas	cuadernos	monedas
2	1	3	2
4	2	6	4
6	3	9	6
8	4	12	8
10	5	15	10
12	6		

**TABLA 36**

Sin embargo, realizaron esta construcción mecánicamente y no buscaron la igualación de antecedentes o de consecuentes que forzosamente se da en renglones distintos (como lo muestran las tablas 34 y 35), sino que buscaron de manera horizontal en el mismo renglón una comparación (que no permite una igualdad). Es decir, las maestras realizaron dobles y triples de manera mecánica y sin sentido.

Así, todas las docentes que en esta investigación intentaron aplicar la estrategia que hemos llamado de igualación cometieron los mismos errores.

Este hecho nos hace pensar en posibles explicaciones y sugerencias para la formación inicial y continua de las maestras, que presentamos aquí a modo de hipótesis que deberían ser comprobadas o refutadas en investigaciones posteriores:

- 1) De acuerdo con la categoría conocimiento del contenido pedagógico establecida por Shulman (1986) (ver apartado 1.2.1), las maestras posiblemente poseen pocas formas útiles (estrategias) para resolver los problemas de proporcionalidad, así como pocas formas para representar y formular la resolución de estos problemas para que alguien más los comprenda.
- 2) Como lo propuso Flores (2010), sería deseable que las maestras conocieran más a fondo los usos que se le pueden dar a la estrategia de igualación, sobre todo en el Nivel III de dificultad.
- 3) El uso algorítmico y mecánico de las tablas podría provenir de la manera en que se les han presentado los ejercicios sobre este tema a las maestras desde su formación, hasta en los libros de texto de matemáticas en el nivel primaria. Como un círculo vicioso, a su vez estas formas podrían estar forjando el uso que le dan las docentes a la técnica. Sería deseable realizar investigaciones dentro del aula para conocer qué usos le dan las maestras a estas tablas, si sólo solicitan a sus alumnos que las llenen, no importando qué procedimiento utilicen, o si hacen énfasis en que utilicen ciertos algoritmos.
- 4) Es posible que las docentes no hayan tenido ocasión, ni suficiente formación inicial, ni en capacitación posterior, ni en su experiencia profesional, de reflexionar sobre el razonamiento proporcional. Aparentemente, el objetivo planteado en el plan de estudios de 1997 de la Licenciatura en Educación Primaria de la BENM (SEP, 2002) en el que se menciona: “conozcan las características del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que enfatiza la construcción de significados a partir de la resolución de situaciones problemáticas” no se ha cubierto, por

lo menos en lo referente al tema en cuestión y el enfoque propuesto en la Guía de sexto grado (SEP, 1992).

Aunque esto requeriría de una investigación posterior se puede aquí plantear la hipótesis de que este último material no es comprendido y mucho menos utilizado por las maestras.

Por tanto de este trabajo se desprenden dos recomendaciones principales, que se comparten con Flores (2010). La primera se refiere a la formación de los maestros. Como se planteó en el Capítulo 1, uno de los objetivos de los cursos de formación inicial de los maestros es que ellos “consoliden el conocimiento de los contenidos matemáticos fundamentales que se enseñan en la escuela primaria y comprendan los distintos significados que adquieren al aplicarlos en situaciones diversas y en resolución de problemas” (SEP, 1995). La recomendación evidente es que haya mayor atención en la formación inicial para cubrir el objetivo, y además abordar el tema en los cursos de actualización, para completar la formación tanto de los maestros que se encuentran en servicio como la de los que vayan egresando de las escuelas Normales.

La segunda recomendación es de carácter didáctico para la escuela primaria. Dadas las dificultades relativas de los distintos niveles y contextos, se podía recomendar empezar con el Nivel I, para luego seguir con el II y el III en ese orden; sin embargo, no deberían abandonarse los ejemplos de los niveles anteriores una vez abordado uno superior. Asimismo, se podría recomendar empezar con tasas y seguir con mezclas; nuevamente, sin abandonar los ejemplos de tasas una vez abordadas las mezclas. Tal vez lo más adecuado sería que en el Nivel I los docentes utilizaran centraciones en tasas y RO+ en mezclas. Para los Niveles II y III quizá lo que facilitaría a las docentes la enseñanza de temas que contengan razonamiento proporcional sería que entendieran para qué sirve la estrategia de igualación, como lo hemos expuesto aquí, y así lo enseñaran.



## REFERENCIAS

- Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de proporcionalidad. Algunas aportaciones metodológicas*. Tesis de maestría. México: UPN.
- Alatorre, S. (2004). *¿A, B o da igual? Estudio sobre el razonamiento proporcional*. Tesis de Doctorado. México: IPN.
- Carretero, M. (1997). El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: las operaciones formales. En: M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Comps). *Adolescencia, madurez y senectud*. Madrid; Alianza. (pp. 95-142).
- Carretero, M. y Martín, E. (1997). De los dos años a la adolescencia. Operaciones concretas. En: M. Carretero, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.). *Desarrollo cognitivo y social del niño*. Madrid: Alianza. (pp. 37-93).
- De la Torre, E. Díaz, M. y Guerrero, S. (2006) Formación inicial del profesorado de primaria y secundaria. En: *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*, (41), 20-39.
- Fiol, M. y Fortuny, J (2000). *Proporcionalidad Directa. La forma y el Número*. España: Síntesis.
- Flores, A. (2010). *Estrategias usadas por cinco docentes de primaria en problemas de comparación de razones*. Tesis de licenciatura. México: UPN
- Latapí, P. (2003). *¿Cómo aprenden los maestros? Cuadernos de discusión 6*. México: SEP.
- Llinares, S. (1996). *Conocimiento profesional de profesores de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función*. España: Departamento de Didáctica de las ciencias (Matemáticas) Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla.
- Martínez, M. (2006) *Educación matemática para todos. Aportes para la formación y el desarrollo profesional de los profesores de educación primaria*. México: Diálogos Ediciones; Comité Regional Norte de Cooperación con la UNESCO.
- Monereo, C. (1998). *Formación del profesorado y aplicación en el aula*. Barcelona: Grao.
- Morales, G. y Roldán, A. (2007). *Razonamiento proporcional de estudiantes de secundaria escolarizada y abierta*. Tesis Licenciatura. México: UPN
- Papic, V.V., Rittershausen, S.K. y Rodríguez, E.R. (1986). La retroalimentación en microenseñanza: estudio de caso. *Revista Tecnología y Comunicación Educativas*, 3(4), 38-46.
- Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas, *Revista Educación Matemática*, 2 (3), 22-31
- Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas: Problema Central del desarrollo*. España: Siglo Veintiuno.(pp.22-47)
- Piaget, J. (1995). *Seis estudios de psicología*. Colombia: Labor.

- Piaget, J. Inhelder, B. (2002). *Psicología del niño*. España: Morata.
- Porlán, R., Martín, R., Martín, J. y Rivero, A. (2001) *La relación teoría-práctica en la formación permanente del profesorado. Informe de una investigación*. Sevilla: Díada
- Ruiz, E. y Lupiáñez, J. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7 (17), 397-424.
- Sanz, A., Pozo, J., Pérez, M. y Gómez, A. (1996) El razonamiento proporcional en expertos y novatos: el efecto del contenido. *Revista de psicología general y aplicada*. 4 (2),337-352
- SEP (1992). Razón y proporción. En: *Guía para el maestro. Sexto Grado. Educación Primaria*. México: Secretaría de Educación Pública. (pp. 13-41)
- SEP (1995). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda parte. México: Secretaria de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos.
- SEP (1998). *Matemáticas y su Enseñanza I. Programa y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria. Segundo semestre*. Programas para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las escuelas normales. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2002a). *Matemáticas y su Enseñanza I y II. Programas y materiales de apoyo para el estudio. Licenciatura en Educación Primaria: Programas para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las escuelas normales*. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública.
- SEP (2002b). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en Educación Primaria*. México: Secretaria de Educación Pública
- SEP (2003). *Aspectos básicos a considerar en el diseño de Cursos Estatales de actualización*. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal Coordinación General de Actualización y Capacitación para Maestros en Servicio.
- SEP (2007). *Programa sectorial de educación 2007-2012*. México: SEP.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 5(2), 4-14.
- Valiente, S. (1998). La formación de maestros de matemáticas en los niveles básicos. En: *Educación y Desarrollo. Las matemáticas*. México: SEP (pp. 55-63).
- Zorrilla, M. (2002). Diez años después del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica en México: Retos, tensiones y perspectivas. *Revista electrónica de Investigación Educativa*, 4 (2). <http://redie.uabc.mx/vol4no2/contenido-zorrilla.html>

# ANEXOS

## **ANEXO 1**

### **INSTRUMENTO**

En este anexo se reproducen las fichas utilizadas en las entrevistas con las maestras. Se plantean en el orden en que fueron planteadas: los contextos de Jamaica, Cuadernos, Botellas, Velocidad y Exámenes. Dentro de cada uno, se muestran las fichas desde la 1 hasta la 13.

# PREGUNTAS PLANTEADAS EN LA ENTREVISTA CON LAS MAESTRAS

				<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 1 ✓</td> <td>Correctas: 3 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 4 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>  </u></td> <td>Calificación: <u>  </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Correctas: 1 ✓	Correctas: 3 ✓	Incorrectas: 4 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>															
Correctas: 1 ✓	Correctas: 3 ✓															
Incorrectas: 4 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>															
A	B															
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2 ✓</td> <td>Correctas: 2 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>  </u></td> <td>Calificación: <u>  </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Correctas: 2 ✓	Correctas: 2 ✓	Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>															
Correctas: 2 ✓	Correctas: 2 ✓															
Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>															
A	B															
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2 ✓</td> <td>Correctas: 3 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 1 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>  </u></td> <td>Calificación: <u>  </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Correctas: 2 ✓	Correctas: 3 ✓	Incorrectas: 1 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>															
Correctas: 2 ✓	Correctas: 3 ✓															
Incorrectas: 1 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>															
A	B															
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> <td>Nombre: <u>  Natalia  </u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3 ✓</td> <td>Correctas: 1 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> <td>Incorrectas: 1 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>  </u></td> <td>Calificación: <u>  </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>	Correctas: 3 ✓	Correctas: 1 ✓	Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 1 ✗	Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>  Natalia  </u>	Nombre: <u>  Natalia  </u>															
Correctas: 3 ✓	Correctas: 1 ✓															
Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 1 ✗															
Calificación: <u>  </u>	Calificación: <u>  </u>															
A	B															

<p>6</p>	<p>6</p>	<p>6</p>	<p>6</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2 ✓</td> <td>Correctas: 3 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>6</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>	Correctas: 2 ✓	Correctas: 3 ✓	Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>															
Correctas: 2 ✓	Correctas: 3 ✓															
Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>7</p>	<p>7</p>	<p>7</p>	<p>7</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3 ✓</td> <td>Correctas: 2 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> <td>Incorrectas: 0 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>7</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>	Correctas: 3 ✓	Correctas: 2 ✓	Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 0 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>															
Correctas: 3 ✓	Correctas: 2 ✓															
Incorrectas: 3 ✗	Incorrectas: 0 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>8</p>	<p>8</p>	<p>8</p>	<p>8</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2 ✓</td> <td>Correctas: 4 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 1 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>8</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>	Correctas: 2 ✓	Correctas: 4 ✓	Incorrectas: 1 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>															
Correctas: 2 ✓	Correctas: 4 ✓															
Incorrectas: 1 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>9</p>	<p>9</p>	<p>9</p>	<p>9</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> <td>Nombre: <u>Stefía</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2 ✓</td> <td>Correctas: 1 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 5 ✗</td> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>9</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>	Correctas: 2 ✓	Correctas: 1 ✓	Incorrectas: 5 ✗	Incorrectas: 3 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Stefía</u>	Nombre: <u>Stefía</u>															
Correctas: 2 ✓	Correctas: 1 ✓															
Incorrectas: 5 ✗	Incorrectas: 3 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															

<p>10</p>	<p>10</p>	<p>10</p>	<p>10</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3 ✓</td> <td>Correctas: 1 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 6 ✗</td> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>10</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>	Correctas: 3 ✓	Correctas: 1 ✓	Incorrectas: 6 ✗	Incorrectas: 2 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>															
Correctas: 3 ✓	Correctas: 1 ✓															
Incorrectas: 6 ✗	Incorrectas: 2 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>11</p>	<p>11</p>	<p>11</p>	<p>11</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 5 ✓</td> <td>Correctas: 7 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>11</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>	Correctas: 5 ✓	Correctas: 7 ✓	Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 3 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>															
Correctas: 5 ✓	Correctas: 7 ✓															
Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 3 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>12</p>	<p>12</p>	<p>12</p>	<p>12</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 4 ✓</td> <td>Correctas: 2 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 6 ✗</td> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>12</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>	Correctas: 4 ✓	Correctas: 2 ✓	Incorrectas: 6 ✗	Incorrectas: 3 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>															
Correctas: 4 ✓	Correctas: 2 ✓															
Incorrectas: 6 ✗	Incorrectas: 3 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															
<p>13</p>	<p>13</p>	<p>13</p>	<p>13</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>PRIMER EXAMEN</th> <th>SEGUNDO EXAMEN</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> <td>Nombre: <u>Natalia</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3 ✓</td> <td>Correctas: 5 ✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 2 ✗</td> <td>Incorrectas: 3 ✗</td> </tr> <tr> <td>Calificación: <u>    </u></td> <td>Calificación: <u>    </u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> </tbody> </table> <p>13</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>	Correctas: 3 ✓	Correctas: 5 ✓	Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 3 ✗	Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>	A	B
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN															
Nombre: <u>Natalia</u>	Nombre: <u>Natalia</u>															
Correctas: 3 ✓	Correctas: 5 ✓															
Incorrectas: 2 ✗	Incorrectas: 3 ✗															
Calificación: <u>    </u>	Calificación: <u>    </u>															
A	B															

## ANEXO 2: SEMBLANZAS BIOGRÁFICAS

Maestra y edad	Semblanza biográfica
<p>M1 34 años</p>	<p>Trabaja como A.T.P. en ambos turnos. Ha laborado frente a grupo 3 años en 2° y 1°. En una ocasión impartió clases en 6° por seis meses. Cómo A.T.P ha laborado 2 años.</p>
<p>M2 40 años</p>	<p>Da clases en 5° por las mañanas, ha impartido clases en este grado alrededor de 10 años. En el turno vespertino labora en la zona escolar como A.T.P. Ha impartido clases a 4° y 6°, esporádicamente a los grados de 1° y 2°.</p> <p>Frente a grupo ha laborado 22 años y estudió en la BENM.</p>
<p>M3 56 años</p>	<p>Trabaja como A.T.P. en ambos turnos. Laboró frente a grupo 28 años, impartió clases a los seis grados de primaria pero impartió clases más tiempo a 3°, 4° y 5°. Lleva fuera de grupo 10 años.</p> <p>Tiene 34 años en servicio. E la SEP han sido 22 años, y en una escuela particular dando clases 12 años.</p> <p>Se formó como docente en un colegio particular, el "Instituto Anglo Español".</p>
<p>M4 50 años</p>	<p>Imparte clases a un grupo de niños desfasados de 4° por las tardes y por las mañanas es A.T.P.</p> <p>Los grados en los que más tiempo impartió clases fueron 1° y en sus últimos años a 5° y 6°.</p> <p>Tiene 30 años de servicio, de los cuales 25 ha laborado frente a grupos regulares y lleva ya 4 años trabajando en el sector como A.T.P.</p>
<p>M5 27 años</p>	<p>Es su primer año laborando como docente, imparte clases en 4° por las mañanas. Egreso de la BENM</p>



## ANEXO 3

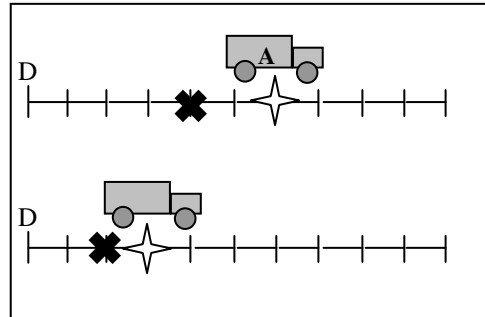
### PROTOCOLO PARA LA SEGUNDA ENTREVISTA CON LOS MAESTROS

Toda la segunda entrevista será videograbada.

#### A. Explicación acerca del tipo de problemas (45 minutos)

- La entrevistadora le comenta los siguientes puntos al maestro:
  - Lo que se buscaba en la primera entrevista era conocer sus intuiciones para resolver problemas de cierto tipo. Las intuiciones no pueden ser correctas ni incorrectas, pero sí hay maneras correctas de resolver los problemas, y las intuiciones pueden coincidir o no con ellas.
  - Son problemas de razonamiento proporcional: comparación de razones.
  - No todos los problemas con cuatro números son de razonamiento proporcional. Por ejemplo, el siguiente problema no es de razonamiento proporcional (los números son 4, 6; 2, 3 como en la pregunta 12)

Dos camiones (A y B) viajan desde un depósito (D). Al hacer la primera entrega (✖) están a cierta cantidad de kilómetros del depósito (cada kilómetro está representado por |—|). Al hacer la segunda entrega (☆) están a otra distancia del depósito. ¿Cuál camión *ha viajado más entre la primera y la segunda entregas*: el A, el B, o da igual?



- Hay muchas maneras correctas de resolver estos problemas de razonamiento proporcional; pueden adoptar distintas formas, sobre todo si la situación misma (los números) es de proporcionalidad o no.
- La entrevistadora le entrega al maestro el material “Problemas de razonamiento proporcional” y se comentará cómo está armado. Se le advierte al maestro que ese material se lo podrá llevar, y se comentarán aspectos de este material:
  - Estructura general de los problemas
  - Los tipos de situaciones que se pueden definir:
    - preguntas en las que se pueden utilizar estrategias de igualación
    - situaciones de proporcionalidad, y

- situaciones de no proporcionalidad
- Estrategias aplicables en cada una de esas situaciones: estrategias de igualación y las diferentes estrategias de razonamiento proporcional
- Comentario sobre la última página del material, donde se ponen lado a lado estrategias correctas e incorrectas que se pueden aplicar en determinadas situaciones

## **B. Proyección de los videos (45 minutos)**

- La entrevistadora explicará cómo están armados los videos y las hojas con las preguntas
  - Se recuerdan los 5 contextos y se hace ver que unos contextos son de tasa, es decir con dos magnitudes diferentes (cuadernos, velocidad), mientras que otros son de mezcla, es decir con una sola magnitud (exámenes, jamaica, botellas de canicas)
  - Se hace notar que los números implicados en cada una de las preguntas eran los mismos
  - Se advierte que los videos no muestran las preguntas en el orden en que fueron aplicadas en la primera entrevista, sino pregunta por pregunta, juntando todos los contextos (primero los de tasa, luego los de mezcla), y en el orden de las situaciones definidas anteriormente.
  - Ese orden es para observar las regularidades debidas al tipo de situaciones numéricas involucradas en cada pregunta
  - Explicación de:
    - los cuadros faltantes (al maestro no se le planteó esa pregunta),
    - los de pantalla gris (el maestro utilizó una estrategia inadecuada),
    - los de pantalla amarilla (el maestro contestó la pregunta, la estrategia que utilizó fue adecuada y por razones de tiempo no se incluye en el video)
  - Comentario acerca del video: a veces se ve/oye la presentación de la siguiente tarjeta, pero no corresponde al extracto que se ve.
- Proyección
  - Se van haciendo comentarios acerca de las estrategias utilizadas. Cuando son incorrectas, se detiene la proyección después de la respuesta, se le hace notar al maestro por qué la estrategia era inadecuada y se le propone que dé otra respuesta
  - En caso de que el maestro no pueda o vuelva a cometer un error, se explica alguna forma de  $RP+$  o de  $RP=$  (sin mencionar esta nomenclatura)
  - En el caso de respuestas RS ó RPS se le indicará al maestro por qué se puede considerar que era una respuesta incompleta, sobre la base de los ejemplos del material “Problemas de razonamiento proporcional”
- A los maestros que lo deseen se les entregará un CD con la copia del video proyectado

**C. Comentarios sobre la enseñanza y fin de la entrevista (30 minutos)**

- Comentarios acerca de las maneras intuitivas de resolver los problemas
  - El maestro debe conocer cuáles son sus intuiciones para saber si se puede confiar en ellas o si “debe pensarlo dos veces”
  - El maestro debe poder reconocer cuándo la estrategia que utiliza un niño es correcta y cuándo no
  - Muchas personas (tanto niños como adultos) tienen intuiciones basadas en estrategias de comparación o de suma/resta
- Comentarios acerca de la manera de enseñar
  - Es conveniente que el orden de enseñanza sea el orden en que se presentaron esos videos:
    - 1) Situaciones en las que se pueden utilizar otras estrategias
    - 2) Situaciones de proporcionalidad
    - 3) Situaciones de no proporcionalidad
  - Una vez que los niños han resuelto problemas de los tipos segundo y tercero con alguna(s) de las estrategias mostradas en el material “Problemas de razonamiento proporcional”, pueden ver que se aplican también en las del primer tipo.
- Entrega del “Banco de problemas”
  - Se le entregará al maestro un documento que tiene dos tipos de catálogos: primero ocho contextos distintos de comparación de razones (y dos más que no lo son), y en seguida algo más de trescientos cuarenta arreglos numéricos clasificados en los tres niveles de dificultad.
  - Se enfatizará que los problemas de *Camiones* y *Costureras* son, respectivamente, de resta y de suma, y no se aplica en ellos el razonamiento proporcional.
  - Los demás problemas se pueden plantear en cualquiera de los arreglos numéricos
- Fin de la entrevista
  - Se le agradecerá al maestro su participación
  - Se le preguntará su opinión acerca de las dos sesiones programadas
  - Se le preguntará si desea continuar en otra sesión para revisar con más detalle alguno de los temas abordados en esta sesión. Se le ofrecerán teléfonos y correo electrónico, para que se comunique cuando lo desee.

## ANEXO 4

### PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Los problemas cuya solución puede implicar un razonamiento proporcional se refieren a cuatro números, que están agrupados en dos parejas de razones. Hay dos grandes clases de problemas de este estilo:

- **Problemas de valor perdido**, también llamados de cuarta proporcional. En estos problemas se da por sentado que hay una proporcionalidad (es decir, las dos razones son iguales), pero se desconoce uno de los cuatro números. Por ejemplo: si se sabe que 3 kg. De maíz cuestan \$24, ¿cuánto cuestan 5 kg. De maíz? Esto se puede expresar así: 3 es a \$24 como 5 es a  $x$ ; es decir  $3:24::5:x$ . Otra manera de plantear la información es en un arreglo como el de la derecha. Para solucionar el problema se pueden utilizar varias estrategias. Por ejemplo, se puede encontrar la razón unitaria, es decir, el precio de 1 kg. De maíz:  $\$24 \div 3 = \$8$ , y después multiplicar éste por 5 para encontrar el precio de los 5kg.  $\$8 \times 5 = \$40$ . Otra estrategia es la conocida “regla de tres”:  $x = \frac{5 \times 24}{3} = 40$ .

3	\$24
5	$x$

- **Problemas de comparación de razones**. En estos problemas se presentan los cuatro números pero lo que se desea averiguar es si hay o no proporcionalidad y, si no la hay, dónde es mayor la razón. Por ejemplo si 3 kg. De maíz cuestan \$24, y 5 kg. De trigo cuestan \$42, ¿qué está más barato, el maíz o el trigo? Ahora las dos razones a compara son  $3:24$  y  $5:42$ , y nos preguntamos cuál es mayor, o si son iguales.

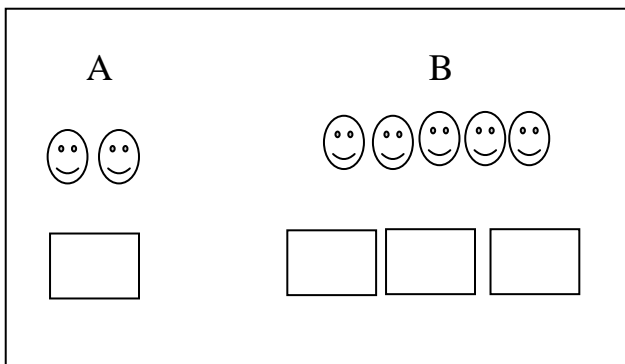
Los problemas a los que nos referimos en estas entrevistas son de esta última clase, es decir, son **problemas de comparación de razones**. En este material se explicarán varias estrategias que permiten solucionar acertadamente los problemas, y algunas de las estrategias que pueden ser utilizadas tanto por niños como por adultos pero que son incorrectas

#### ÍNDICE

1. Antecedente y consecuente de una razón .....	2
2. Tipos de estrategias y niveles de dificultad de las preguntas.....	4
2.1. Estrategias correctas de comparación (Nivel I).....	5
2.2. Estrategias correctas de razonamiento proporcional (Niveles II y III).....	7
2.3. Comparación de tres tipos de estrategias (Niveles I, II, III).....	10

### 1. Antecedente y consecuente de una razón

Cada razón está formada por un antecedente y un consecuente. Siempre se expresa en primer lugar el antecedente y en segundo el consecuente, como en  $a:c$ , pero la determinación de cuál de los dos números involucrados en una razón es el antecedente y cuál es el consecuente depende de la pregunta que se plantea. Veamos un ejemplo:



Supongamos que en el patio de una escuela A hay 2 niños jugando en un área determinada por 1 gran baldosa, y en una escuela B hay 5 niños jugando en un área determinada por 3 baldosas del mismo tamaño de la anterior, como se ilustra en la figura.

En este problema tenemos los

siguientes números: 2, 1, 5, 3. Dos de ellos se refieren a una magnitud (la cantidad de niños), y los otros dos se refieren a otra magnitud (la cantidad de baldosas). Además, dos números se refieren a uno de los “objetos” que comparamos y los otros dos al otro (en este caso los dos “objetos” son las dos escuelas).

	Escuela A	Escuela B
Niños	2	5
Baldosas	1	3

Se pueden plantear dos preguntas en este contexto:

- 1) ¿Dónde están más apretados los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

+ Mientras **más** niños, más apretados están los niños

– Mientras **menos** baldosas, más apretados están los niños

Entonces, en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

+ El antecedente son los niños

– El consecuente son las baldosas

Y las dos razones son:

Para la escuela A, **2:1**

Para la escuela B, **5:3**

- 2) ¿Dónde tienen más espacio los niños para jugar?

En este caso se tiene que:

+ Mientras **más** baldosas, más espacio tiene cada niño

– Mientras **menos** niños, más espacio tiene cada niño

Entonces, en cada una de las razones que se consideran (una por escuela),

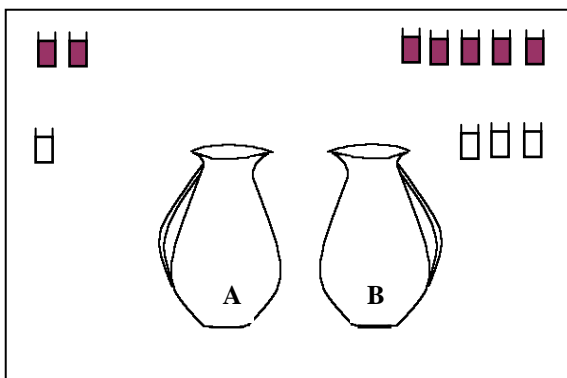
+ El antecedente son las baldosas

– El consecuente son los niños

Y las dos razones son:

Para la escuela A, **1:2**Para la escuela B, **3:5**

Con los mismos números se pueden plantear otros problemas. Por ejemplo, en el contexto de agua de jamaica se tendría lo siguiente:



	Jarra A	Jarra B
Jamaica	2	5
Agua	1	3

Como la pregunta en este ejemplo es:

¿En cuál jarra la mezcla tiene sabor más fuerte a jamaica?

se tiene que:

- + Mientras **más** jamaica, sabor más fuerte
- Mientras **menos** agua, sabor más fuerte

Entonces, en cada una de las razones que se consideran (una por jarra),

- + El antecedente es la cantidad de vasos de concentrado de jamaica
- El consecuente es la cantidad de vasos de agua pura

Y las dos razones son:

Para la jarra A, **2:1**

Para la jarra B, **5:3**

(nota: si la pregunta fuera “¿en cuál jarra la mezcla es más ligera o más aguada?”, entonces el antecedente serían los vasos de agua y el consecuente serían los vasos de concentrado de jamaica, y la razones serían respectivamente 1:2 y 3:5).

## EN LAS SIGUIENTES PÁGINAS LOS EJEMPLOS SE REFIEREN A ESTE CONTEXTO, EL DEL AGUA DE JAMAICA

### 2. Tipos de estrategias y niveles de dificultad de las preguntas

Para resolver los problemas de comparación de razones las personas pueden utilizar tres grandes clases de estrategias:

- Estrategias de comparación
- Estrategias de suma / resta

- Estrategias de razonamiento proporcional (es decir, de multiplicación / división)

Estas estrategias difieren en su corrección:

- Las primeras son generalmente incorrectas, pero en algunas ocasiones, dependiendo de los números involucrados en las dos razones, pueden ser correctas
- Las segundas siempre son incorrectas
- Las terceras siempre son correctas

Dependiendo de los números involucrados en las dos razones, distinguimos tres niveles de dificultad de las preguntas:

- I) El **Nivel I** consiste de las preguntas más fáciles; son aquellas en las que se pueden aplicar exitosamente algunas estrategias de comparación
- II) El **Nivel II** consiste de preguntas en las que sólo se pueden aplicar exitosamente las estrategias de razonamiento proporcional, y en las que hay una proporcionalidad en las dos razones (por ejemplo, mismo sabor en ambas jarras).
- III) El **Nivel III** consiste, como en el caso anterior, de preguntas en las que sólo se pueden aplicar exitosamente las estrategias de razonamiento proporcional, pero difiere del Nivel II en que aquí no hay proporcionalidad en las dos razones (por ejemplo, sabor más fuerte en una jarra que en la otra).

Se pueden ubicar entonces las tres familias de estrategias y los tres niveles de dificultad en la siguiente tabla, en la que se marcan con el símbolo ✓ las estrategias correctas y con el símbolo ✗ las incorrectas.

	Estrategias de comparación	Estrategias de suma / resta	Estrategias de multiplicación / división (razonamiento proporcional)
<b>Nivel I</b>	✓ ✗	✗	✓
<b>Nivel II</b>	✗	✗	✓
<b>Nivel III</b>	✗	✗	✓

En las siguientes páginas se presentan tres familias de ejemplos:

- 2.1. Estrategias correctas de comparación (Nivel I). En 13 situaciones numéricas diferentes, las distintas estrategias de comparación que pueden aplicarse correctamente.
- 2.2. Estrategias correctas de razonamiento proporcional (Niveles II y III). En 2 situaciones numéricas (una de Nivel II y una de Nivel III), las distintas estrategias de razonamiento proporcional que pueden aplicarse correctamente (las mismas se pueden también aplicar en las situaciones de Nivel I)
- 2.3. Comparación de tres tipos de estrategias (Niveles I, II, III). En 3 situaciones numéricas (una de cada Nivel), ejemplos de las estrategias de cada familia que pueden aplicarse correcta (✓) e incorrectamente (✗), incluyendo estrategias que llegan a la elección correcta por razones incorrectas.

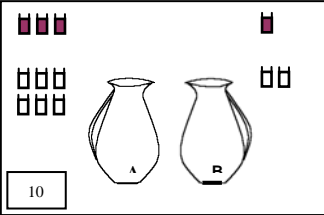
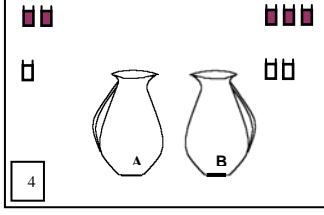
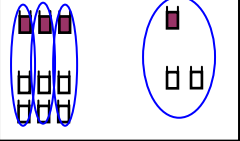
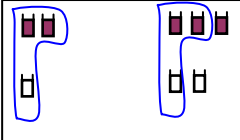
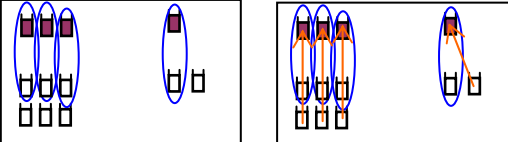
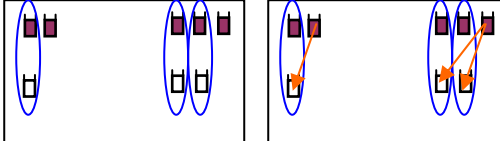
## 2.1. ESTRATEGIAS CORRECTAS DE COMPARACIÓN EN PREGUNTAS DEL NIVEL I DE DIFICULTAD

Preg núm	Arreglo numérico	Comparaciones de jamaica y/o agua y/o líquido	Comparaciones dentro de cada jarra
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 3 \quad   \quad 2 \\ a \quad 4 \quad   \quad 1 \end{array}$		<b>B</b> porque tiene más jamaica que agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 4 \quad   \quad 2 \\ a \quad 3 \quad   \quad 2 \end{array}$		<b>A</b> porque tiene más jamaica que agua, mientras que B tiene igual cantidad de jamaica que de agua
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 3 \quad   \quad 2 \\ a \quad 4 \quad   \quad 2 \end{array}$		<b>B</b> porque tiene igual cantidad de jamaica que de agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 5 \quad   \quad 3 \\ a \quad 1 \quad   \quad 2 \end{array}$	<b>A</b> porque: <ul style="list-style-type: none"> <li>• tiene más jamaica y menos agua que B</li> <li>• tiene menos agua y más líquido que B</li> </ul>	
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 2 \quad   \quad 3 \\ a \quad 4 \quad   \quad 4 \end{array}$	<b>B</b> porque tiene más jamaica e igual agua que A [iguales consecuentes=agua y comparación de antecedentes=jamaica]	
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 1 \quad   \quad 1 \\ a \quad 2 \quad   \quad 3 \end{array}$	<b>A</b> porque tiene menos agua e igual jamaica que B [iguales antecedentes=jamaica y comparación de consecuentes=agua]	
	$\begin{array}{r} A \quad B \\ j \quad 4 \quad   \quad 3 \\ a \quad 1 \quad   \quad 2 \end{array}$	<b>A</b> porque: <ul style="list-style-type: none"> <li>• tiene más jamaica y menos agua que B</li> <li>• tiene más jamaica e igual líquido que B [iguales totales=líquido y comparación de antecedentes=jamaica]</li> <li>• tiene menos agua e igual líquido que B</li> </ul>	



Preg núm	Arreglo numérico	Comparaciones de jamaica y/o agua y/o líquido	Comparaciones dentro de cada jarra
		[iguales totales=líquido y comparación de consecuentes=agua]	
	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 1 & 2 \\ a & 6 & 4 \end{array}$	<p><b>B</b> porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>tiene más jamaica y menos agua que A</li> <li>tiene más jamaica y menos líquido que A</li> </ul>	
1	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 2 & 2 \\ a & 3 & 3 \end{array}$	<p><b>Da igual</b>, porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>las dos tienen la misma cantidad de jamaica y también la misma cantidad de agua</li> <li>las dos tienen la misma cantidad de jamaica y también la misma cantidad de líquido</li> <li>las dos tienen la misma cantidad de agua y también la misma cantidad de líquido</li> </ul>	
7	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 3 & 2 \\ a & 3 & 0 \end{array}$	<p><b>B</b> porque tiene menos agua (no tiene nada de agua)</p>	
2	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 1 & 3 \\ a & 4 & 2 \end{array}$	<p><b>B</b> porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>tiene más jamaica y menos agua que A</li> <li>en las dos hay 5 vasos de líquido, pero hay más jamaica en B que en A</li> <li>en las dos hay 5 vasos de líquido, pero hay menos agua en B que en A</li> </ul>	<p><b>B</b> porque tiene más jamaica que agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua</p>
3	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 2 & 2 \\ a & 3 & 2 \end{array}$	<p><b>B</b> porque tiene menos agua e igual jamaica que A</p>	<p><b>B</b> porque tiene igual cantidad de jamaica que de agua, mientras que A tiene menos jamaica que agua</p>
6	$\begin{array}{r l} & A & B \\ j & 2 & 3 \\ A & 2 & 2 \end{array}$	<p><b>B</b> porque tiene más jamaica e igual agua que A</p>	<p><b>B</b> porque tiene más jamaica que agua, mientras que A tiene igual cantidad de jamaica que de agua</p>

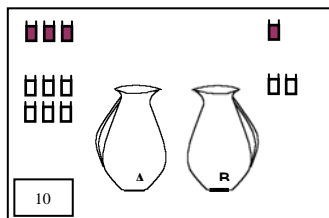
## 2.2. ESTRATEGIAS CORRECTAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

NIVEL II DE DIFICULTAD		NIVEL III DE DIFICULTAD																			
<p>Ejemplos con la pregunta 10</p> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> </tr> <tr> <td>jamaica</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>agua</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> </table>		A	B	jamaica	3	1	agua	6	2	<p><b>EJEMPLOS CON LA PREGUNTA 10:</b></p> <p>En ambas jarras el agua es el doble de la jamaica</p> <p>En la jarra A tanto la jamaica como el agua son el triple de la jarra B</p>	<p>Ejemplos con la pregunta 4</p> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> </tr> <tr> <td>jamaica</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>agua</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table>		A	B	jamaica	2	3	agua	1	2	<p><b>EJEMPLOS CON LA PREGUNTA 4:</b></p> <p>En la jarra A la jamaica es el doble del agua, pero en la B falta jamaica para cumplir esa relación</p> <p>La jarra B duplica el agua de la jarra A, pero no duplica la jamaica</p>
	A	B																			
jamaica	3	1																			
agua	6	2																			
	A	B																			
jamaica	2	3																			
agua	1	2																			
<p><b>LAS DOS JARRAS TIENEN EL MISMO SABOR PORQUE:</b></p>	<p><b>LA JARRA A TIENE SABOR MÁS FUERTE PORQUE:</b></p>																				
<ul style="list-style-type: none"> <li>En ambas jarras el agua es el doble de la jamaica</li> <li>En la jarra A tanto la jamaica como el agua son el triple de la jarra B</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Si se hacen “grupos” de 1 vaso de jamaica con 2 vasos de agua, en A hay 3 “grupos” y en B hay 1</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>En la jarra A la jamaica es el doble del agua, pero en la B falta jamaica para cumplir esa relación</li> <li>La jarra B duplica el agua de la jarra A, pero no duplica la jamaica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Si se hacen “grupos” de 2 vasos de jamaica con 1 de agua, en B falta un vaso de jamaica para completar un “grupo”</li> <li>Si se hacen “grupos” de 1 vaso de agua con 2 de jamaica, lo que sobra en la jarra B es 1 de jamaica y 1 de agua, y eso tiene menor sabor que el grupo de 2 de jamaica con 1 de agua</li> </ul> 																		
<ul style="list-style-type: none"> <li>Si se hacen “grupos” de 1 vaso de jamaica con 1 vaso de agua, en A hay 3 “grupos” y en B hay 1, y sobran 3 vasos de agua en A y 1 en B, PERO esos sobrantes van cada uno a un vaso de jamaica</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Si se hacen “grupos” de 1 vaso de jamaica con 1 vaso de agua, en A hay 1 “grupo” y en B hay 2, y sobra 1 de jamaica en A y 1 en B, PERO ese vaso que sobra se diluye en 1 de agua en la A y en 2 en la B (en la B se diluye más)</li> </ul> 																				

**NIVEL II DE DIFICULTAD**

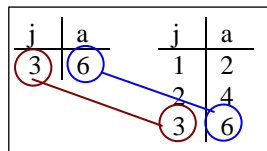
Ejemplos con la pregunta 10

	A	B
jamaica	3	1
agua	6	2



**LAS DOS JARRAS TIENEN EL MISMO SABOR PORQUE:**

- Si se preparan tres tantos de la jarra B es lo mismo que la jarra A [igualación de antecedentes=jamaica y de consecuentes=agua]

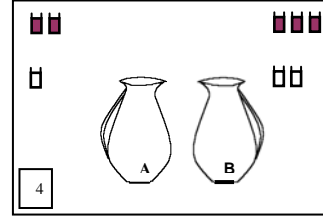


- En las dos jarras hay la mitad de jamaica que de agua
- Los productos cruzados son  $3 \times 2 = 6 \times 1$

**NIVEL III DE DIFICULTAD**

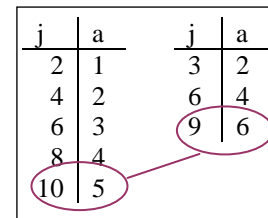
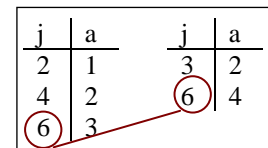
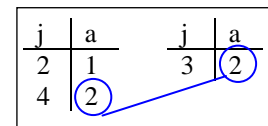
Ejemplos con la pregunta 4

	A	B
jamaica	2	3
agua	1	2



**LA JARRA A TIENE SABOR MÁS FUERTE PORQUE:**

- Si se preparan dos tantos de la jarra A, quedan 2 de agua, como en la B, pero 4 de jamaica, que es uno más que en la B [igualación de consecuentes=agua y comparación de antecedentes=jamaica]
- Si se preparan tres tantos de la A y dos tantos de la B, en las dos hay 6 vasos de jamaica, pero en la A hay 3 vasos de agua, que es uno menos que en la B [igualación de antecedentes=jamaica y comparación de consecuentes=agua]
- Si se preparan cinco tantos de la A y tres tantos de la B, en las dos jarras hay 15 vasos de líquido, pero de éstos son 10 de jamaica en la A y sólo 9 en la B [igualación de totales=líquido y comparación de antecedentes=jamaica]
- Si se preparan cinco tantos de la A y tres tantos de la B, en las dos jarras hay 15 vasos de líquido, pero de éstos son sólo 5 de agua en la A y 6 en la B [igualación de totales=líquido y comparación de consecuentes=agua]

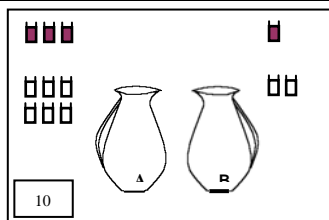


- En la jarra A hay la mitad de agua que de jamaica, mientras que en B es más de la mitad de agua que de jamaica
- Los productos cruzados son  $2 \times 2 > 1 \times 3$

**NIVEL II DE DIFICULTAD**

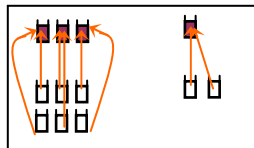
Ejemplos con la pregunta 10

	A	B
jamaica	3	1
agua	6	2



**LAS DOS JARRAS TIENEN EL MISMO SABOR PORQUE:**

- En las dos jarras, a cada vaso de agua le corresponde 1/2 vaso de jamaica



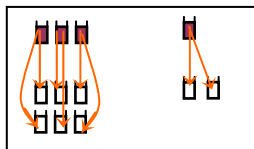
$$3:6 = 1:2$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$0.5 = 0.5$$

$$50\% = 50\%$$

- En las dos jarras, a cada vaso de jamaica le corresponden 2 vasos de agua



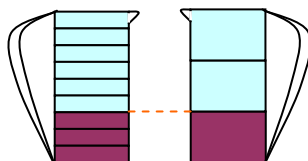
$$6:3 = 2:1$$

$$\frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$$2 = 2$$

$$200\% = 200\%$$

- En las dos jarras hay la tercera parte de jamaica



$$3:9 = 1:3$$

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.33 = 0.33$$

$$33\% = 33\%$$

- En las dos jarras hay dos terceras partes de agua

$$6:9 = 2:3$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

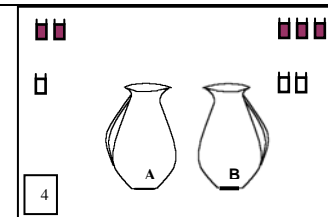
$$0.67 = 0.67$$

$$67\% = 67\%$$

**NIVEL III DE DIFICULTAD**

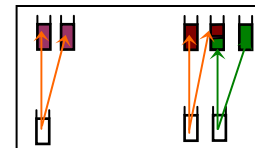
Ejemplos con la pregunta 4

	A	B
jamaica	2	3
agua	1	2



**LA JARRA A TIENE SABOR MÁS FUERTE PORQUE:**

- En la jarra A a cada vaso de agua le corresponden 2 de jamaica, y en B a cada vaso de agua sólo le corresponden 1 1/2 de jamaica [se elige el cociente mayor]



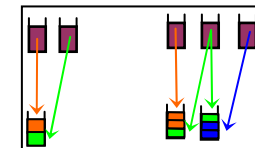
$$2:1 > 3:2$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} > \frac{3}{2}$$

$$2 > 1.5$$

$$200\% > 150\%$$

- En la jarra A, a cada vaso de jamaica sólo le corresponde 1/2 vaso de agua, y en B a cada vaso de jamaica le corresponden 2/3 de vaso de agua, que es más de 1/2 [se elige el cociente menor]



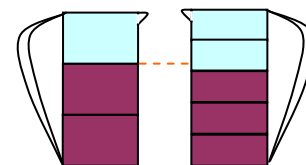
$$1:2 < 2:3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$0.5 < 0.67$$

$$50\% < 67\%$$

- En la jarra A hay 2/3 [ó 10/15, ó 67%] de jamaica y en la B sólo 3/5 [ó 9/15, ó 60%] [se elige el cociente mayor]



$$2:3 > 3:5$$

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$0.67 > 0.6$$

$$67\% > 60\%$$

- En la jarra A sólo hay 1/3 [ó 5/15, ó 33%] de agua y en la B es 2/5 [ó 6/15, ó 40%] [se elige el cociente menor]

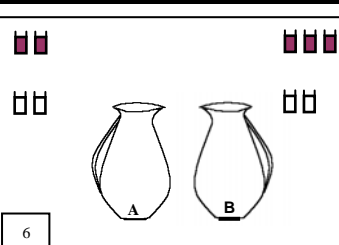
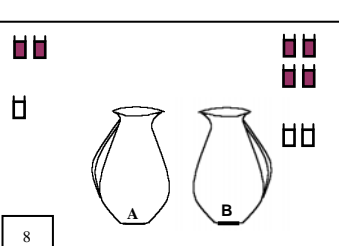
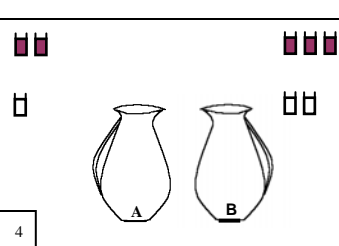
$$1:3 < 2:5$$

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} < \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$0.33 < 0.4$$

$$33\% < 40\%$$

### 2.3. COMPARACIÓN DE ESTRATEGIAS DE DISTINTOS TIPOS EN PREGUNTAS DE LOS TRES NIVELES

	COMPARACIONES		SUMA / RESTA	MULTIPLICACIÓN / DIVISIÓN
	de jamaica y/o agua y/o líquido	dentro de cada jarra		
 <p>6</p> <p><b>NIVEL I:</b> situación no proporcional en la que se pueden utilizar estrategias de comparación</p>	<p>Las dos tienen <b>igual</b> sabor porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tienen la misma cantidad de agua</li> </ul> <p><b>B tiene sabor más fuerte</b> porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tiene más jamaica que A</li> <li>✓ Tiene más jamaica que A y la misma cantidad de <u>agua</u></li> </ul>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Tiene más jamaica que agua, mientras que en A hay la misma cantidad</li> </ul>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Las 2 de agua "se van" con 2 de jamaica, pero en B hay 1 más de jamaica, mientras que en A no sobra nada</li> <li>* Si a cada vaso de agua le corresponde 1 de jamaica en A no sobra nada y en B sobra 1 de jamaica</li> </ul>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En A es 1 de jamaica con 1 de agua, y si en B hago lo mismo falta 1 de agua</li> <li>✓ En A hay <math>\frac{1}{2}</math> (o 50%) de jamaica, mientras que en B hay <math>\frac{3}{5}</math> (o 60%), y <math>\frac{1}{2} = \frac{5}{10}</math> es menor que <math>\frac{3}{5} = \frac{6}{10}</math></li> <li>✓ Si a cada vaso de agua le corresponde 1 de jamaica, en A no sobra nada y en B sobra 1 de jamaica, <u>que aunque se diluye en 2 de agua es un poco más de sabor</u></li> </ul>
 <p>8</p> <p><b>NIVEL II:</b> situación proporcional</p>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tiene más jamaica que A</li> <li>* Tiene más líquido que A</li> <li>* Tiene más jamaica y más líquido que A</li> </ul> <p><b>A</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tiene menos agua que B</li> </ul>	<p>Las dos tienen <b>igual</b> sabor porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* En ambas hay más jamaica que agua</li> </ul>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Las 2 de agua "se van" con 2 de jamaica y sobran 2 de jamaica, y en A sólo sobra 1</li> <li>* Si a cada vaso de agua le corresponde 1 de jamaica, en A sobra 1 de jamaica y en B sobran 2</li> </ul>	<p>Las dos tienen <b>igual</b> sabor porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En ambas cada vaso de agua va con 2 de jamaica</li> <li>✓ En A hay <math>\frac{2}{3}</math> de jamaica, y en B hay <math>\frac{4}{6}</math>, y <math>\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 67\%</math></li> <li>✓ Si a 1 vaso de agua le corresponde 1 de jamaica, en A sobra 1 de jamaica y en B sobran 2. Pero en A el sobrante se diluye en 1 de agua y en B los 2 se diluyen en 2 de agua: <u>en ambas se diluyen igual, cada vaso de jamaica sobrante se diluye en 1 de agua</u></li> </ul>
 <p>4</p> <p><b>NIVEL III:</b> situación no proporcional</p>	<p><b>B</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tiene más jamaica que A</li> </ul> <p><b>A</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Tiene menos agua que B</li> <li>* Tiene menos líquido que B</li> <li>* Tiene menos agua y menos líquido que B</li> </ul>	<p>Las dos tienen <b>igual</b> sabor porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* En ambas hay más jamaica que agua</li> </ul>	<p>Las dos tienen <b>igual</b> sabor porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* En A 1 de agua "se va" con 1 de jamaica y sobra 1 de jamaica, y en B las 2 de agua "se van" con 2 de jamaica y sobra 1 de jamaica</li> <li>* Si a cada vaso de agua le corresponde 1 de jamaica, en ambas sobra 1 de jamaica</li> </ul>	<p><b>A</b> tiene sabor más fuerte porque:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ En A es 1 de agua con 2 de jamaica y si en B hago lo mismo falta 1 de jamaica</li> <li>✓ En A hay <math>\frac{2}{3}</math> (o 67%) de jamaica, y en B hay <math>\frac{3}{5}</math> (60%), y <math>\frac{2}{3} = \frac{10}{15}</math> es mayor que <math>\frac{3}{5} = \frac{9}{15}</math></li> <li>✓ Si a cada vaso de agua le corresponde 1 de jamaica, en ambas sobra 1 de jamaica. Sin embargo en A ese vaso se diluye en 1 de agua y en B se pierde más el sabor porque se diluye en 2 vasos de agua</li> </ul>

# ANEXO 5: PREGUNTAS POR NIVEL DE DIFICULTAD

## PREGUNTAS DEL NIVEL I (EN LAS QUE SE PUEDEN UTILIZAR ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN)

<p>A ○○○ B</p> <p>7</p>	<p>A B</p> <p>7</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___</td> <td>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 0✗ Calificación: ___</td> </tr> </table> <p>A B</p> <p>7</p>	PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 0✗ Calificación: ___	<p>A B</p> <p>7</p>	
PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 0✗ Calificación: ___					
<p>A ○○○○ B ○○</p> <p>2</p>	<p>A B</p> <p>2</p>	<p>A B</p> <p>2</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 4✗ Calificación: ___</td> <td>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</td> </tr> </table> <p>A B</p> <p>2</p>	PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 4✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___	<p>A B</p> <p>2</p>
PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 4✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___					
<p>A ○○ B ○○○</p> <p>6</p>	<p>A B</p> <p>6</p>	<p>A B</p> <p>6</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</td> <td>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</td> </tr> </table> <p>A B</p> <p>6</p>	PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___	<p>A B</p> <p>6</p>
PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___					
<p>A ○○○ B ○○</p> <p>3</p>	<p>A B</p> <p>3</p>	<p>A B</p> <p>3</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___</td> <td>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</td> </tr> </table> <p>A B</p> <p>3</p>	PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___	<p>A B</p> <p>3</p>
PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___	SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___					

**PREGUNTAS DEL NIVEL II  
(CON PROPORCIONALIDAD, EN LAS QUE SÓLO SE PUEDEN UTILIZAR  
ESTRATEGIAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL)**

<p>5</p>	<p>5</p>	<p>5</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN</td> <td>SEGUNDO EXAMEN</td> </tr> <tr> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3✓</td> <td>Correctas: 1✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 3*</td> <td>Incorrectas: 1*</td> </tr> <tr> <td>Calificación: __</td> <td>Calificación: __</td> </tr> </table> <p>5</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>	Correctas: 3✓	Correctas: 1✓	Incorrectas: 3*	Incorrectas: 1*	Calificación: __	Calificación: __	<p>5</p>
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN													
Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>													
Correctas: 3✓	Correctas: 1✓													
Incorrectas: 3*	Incorrectas: 1*													
Calificación: __	Calificación: __													
<p>10</p>	<p>10</p>	<p>10</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN</td> <td>SEGUNDO EXAMEN</td> </tr> <tr> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 3✓</td> <td>Correctas: 1✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 6*</td> <td>Incorrectas: 1*</td> </tr> <tr> <td>Calificación: __</td> <td>Calificación: __</td> </tr> </table> <p>10</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>	Correctas: 3✓	Correctas: 1✓	Incorrectas: 6*	Incorrectas: 1*	Calificación: __	Calificación: __	<p>10</p>
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN													
Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>													
Correctas: 3✓	Correctas: 1✓													
Incorrectas: 6*	Incorrectas: 1*													
Calificación: __	Calificación: __													
<p>8</p>	<p>8</p>	<p>8</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN</td> <td>SEGUNDO EXAMEN</td> </tr> <tr> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 2✓</td> <td>Correctas: 4✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 1*</td> <td>Incorrectas: 2*</td> </tr> <tr> <td>Calificación: __</td> <td>Calificación: __</td> </tr> </table> <p>8</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>	Correctas: 2✓	Correctas: 4✓	Incorrectas: 1*	Incorrectas: 2*	Calificación: __	Calificación: __	<p>8</p>
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN													
Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>													
Correctas: 2✓	Correctas: 4✓													
Incorrectas: 1*	Incorrectas: 2*													
Calificación: __	Calificación: __													
<p>12</p>	<p>12</p>	<p>12</p>	<table border="1"> <tr> <td>PRIMER EXAMEN</td> <td>SEGUNDO EXAMEN</td> </tr> <tr> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> <td>Nombre: <u>Niada</u></td> </tr> <tr> <td>Correctas: 4✓</td> <td>Correctas: 2✓</td> </tr> <tr> <td>Incorrectas: 6*</td> <td>Incorrectas: 3*</td> </tr> <tr> <td>Calificación: __</td> <td>Calificación: __</td> </tr> </table> <p>12</p>	PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN	Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>	Correctas: 4✓	Correctas: 2✓	Incorrectas: 6*	Incorrectas: 3*	Calificación: __	Calificación: __	<p>12</p>
PRIMER EXAMEN	SEGUNDO EXAMEN													
Nombre: <u>Niada</u>	Nombre: <u>Niada</u>													
Correctas: 4✓	Correctas: 2✓													
Incorrectas: 6*	Incorrectas: 3*													
Calificación: __	Calificación: __													

**PREGUNTAS DEL NIVEL III  
(SIN PROPORCIONALIDAD, EN LAS QUE SÓLO SE PUEDEN UTILIZAR  
ESTRATEGIAS DE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL)**

<p>A ○</p> <p>4</p>	<p>B ○○</p> <p>4</p>	<p>A ○○</p> <p>4</p>	<p>B ○○</p> <p>4</p>	<p>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 1✗ Calificación: ___</p> <p>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</p>	<p>A ○○</p> <p>B ○○○</p>
<p>A ○</p> <p>9</p>	<p>B ○○</p> <p>9</p>	<p>A ○○</p> <p>9</p>	<p>B ○○</p> <p>9</p>	<p>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 2✓ Incorrectas: 5✗ Calificación: ___</p> <p>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 1✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___</p>	<p>A ○○</p> <p>B ○○○</p>
<p>A ○○</p> <p>13</p>	<p>B ○○○</p> <p>13</p>	<p>A ○○</p> <p>13</p>	<p>B ○○</p> <p>13</p>	<p>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 3✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</p> <p>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 5✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___</p>	<p>A ○○</p> <p>B ○○○</p>
<p>A ○○○</p> <p>11</p>	<p>B ○○○○</p> <p>11</p>	<p>A ○○</p> <p>11</p>	<p>B ○○</p> <p>11</p>	<p>PRIMER EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 5✓ Incorrectas: 2✗ Calificación: ___</p> <p>SEGUNDO EXAMEN Nombre: <u>Tisbe</u> Correctas: 7✓ Incorrectas: 3✗ Calificación: ___</p>	<p>A ○○</p> <p>B ○○○</p>



## ANEXO 6

### BANCO DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE RAZONES (RAZONAMIENTO PROPORCIONAL)

Los problemas de razonamiento proporcional llamados de comparación de razones constan de dos aspectos: por un lado, el **contexto** en el que están inmersos; por otro, los cuatro **números** involucrados, es decir, el **arreglo numérico**.

El presente material tiene por objetivo que el maestro pueda acudir a una variedad de contextos y de arreglos, combinándolos entre sí, para producir un gran surtido de preguntas distintas.

Se presentan en primer lugar **ocho contextos de proporcionalidad y dos que no lo son**. Algunos de ellos son problemas de **tasa**, es decir, problemas en los que hay dos magnitudes diferentes; estas dos magnitudes funcionan como el antecedente y el consecuente de las razones involucradas (por ejemplo, una magnitud es la cantidad de mercancías que se compran y la otra es cuánto se paga). Los demás problemas son de **mezcla**, es decir, problemas en los que hay una sola magnitud, en dos modalidades que funcionan como antecedente y consecuente de las razones (por ejemplo, la magnitud es “vasos” y las modalidades son –de jamaica y –de agua); dentro de los problemas de mezcla, una clase particular está representada por los contextos en los que la mezcla es una **mezcla aleatoria** y se involucra el concepto de probabilidad. En general, los problemas más fáciles son los de tasa, luego los de mezcla no aleatoria y finalmente los de mezcla aleatoria. El propósito de incluir los dos últimos problemas (*Camiones* y *Costureras*) es ver que no todos los problemas de cuatro números son de razonamiento proporcional.

Todos los problemas presentados en las páginas segunda a cuarta de este material corresponden al mismo arreglo numérico, que se forma de la siguiente manera: en el objeto A, **2** antecedentes y **1** consecuente, y en el objeto B, **3** antecedentes y **2** consecuentes. Representaremos este arreglo de la siguiente manera: **(2,1 ; 3,2)**. Si el problema es de razonamiento proporcional, entonces, dependiendo del arreglo numérico se pueden utilizar sólo estrategias de razonamiento proporcional –como en el arreglo (2,1 ; 3,2)– o también otras estrategias más sencillas. Se recomienda que estas situaciones se traten en clase en el siguiente orden, que a su vez corresponde a tres niveles de dificultad:

- 1) Nivel I: Situaciones de no proporcionalidad en las que se pueden utilizar estrategias sencillas
- 2) Nivel II: Situaciones de proporcionalidad en las que sólo se pueden utilizar estrategias de razonamiento proporcional

3) Nivel III: Situaciones de no proporcionalidad en las que sólo se pueden utilizar estrategias de razonamiento proporcional

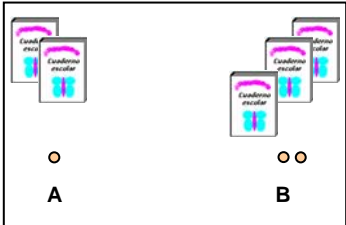
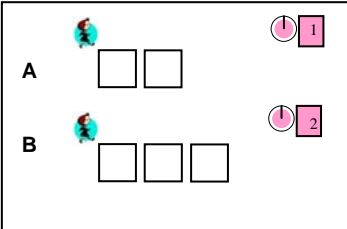
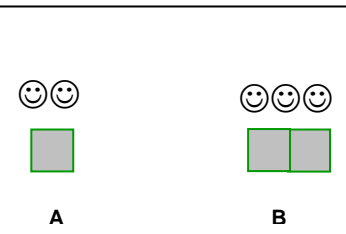
En ese mismo orden se presentan tres tablas de arreglos numéricos en las páginas 5 y 6, todos los cuales, salvo contadísimas excepciones, se pueden plantear en todos y cada uno de los contextos. Es importante observar que en los arreglos de la primera y la tercera tabla se ha puesto en primer lugar la pareja de números correspondiente a la razón más grande. Así, el arreglo (2,5 ; 4,4) no aparece, pero sí el arreglo (4,4 ; 2,5), ya que la razón 4:4 es mayor que la razón 2:5 (es el primer arreglo que aparece en la primera tabla). Para efectos de plantear problemas en el aula, **el profesor debe invertir aproximadamente la mitad** de los arreglos que se presentan aquí, para que no siempre la respuesta correcta sea “A”.

En la primera tabla se especifica cuáles de las estrategias de comparación (**ambos tipos de comparaciones**, o sólo **comparaciones “DENTRO”**, o sólo **comparaciones “ENTRE”**) se pueden utilizar en cada arreglo. En la segunda tabla se presentan las situaciones de proporcionalidad clasificadas según la relación antecedente/consecuente. En la tercera tabla se presentan las situaciones de no proporcionalidad clasificadas según dos criterios: la relación antecedente/consecuente, y la coincidencia o discrepancia entre las estrategias de suma/resta y las de multiplicación/división (razonamiento proporcional).

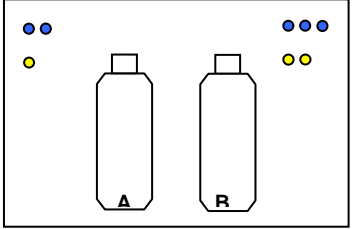
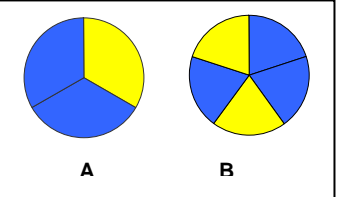
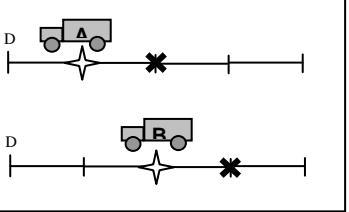
NOTAS:

- 1) se ha destacado en letras negritas tanto los contextos como los arreglos numéricos planteados en la entrevista realizada.
- 2) Salvo algunas excepciones, todos los números de estos arreglos son menores de 10

**OCHO CONTEXTOS DE COMPARACIÓN DE RAZONES Y DOS QUE NO LO SON**

Nombre	Planteamiento	Tipo	Objetos	Antecedentes	Consecuentes	Presentación gráfica
<b>Cuadernos</b>	En dos tiendas (A y B) se compraron distintas cantidades de cuadernos por distintos precios (en monedas). ¿En cuál tienda son más baratos los cuadernos, o están igualmente baratos en ambas?	Tasa	Tiendas	Cuadernos	Monedas	
<b>Velocidad</b>	Dos niñas (A y B) caminan distinta cantidad de cuadras en distintos tiempos (minutos). ¿Cuál niña camina más rápido, o caminan a la misma velocidad?	Tasa	Niñas	Cuadras	Minutos	
<b>Densidad</b>	En dos escuelas (A y B) van a jugar distintas cantidades de niños en distintos patios formados por baldosas cuadradas. ¿En cuál escuela los niños quedarán más apretados para jugar, o quedan igualmente apretados?	Tasa	Escuelas	Niños	Baldosas	

Nombre	Planteamiento	Tipo	Objetos	Antecedentes	Consecuentes	Presentación gráfica
<i>Limonada</i>	En dos jarras (A y B) se confecciona limonada con distintas cantidades de limones y distintas cantidades de agua azucarada (tazas). ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a limón, o tienen el mismo sabor?	Tasa	Jarras	Limones	Tazas de agua	
<i>Jamaica</i>	En dos jarras (A y B) se confecciona agua de jamaica con distintas cantidades de vasos con concentrado de jamaica y con agua. ¿En cuál jarra la preparación tiene sabor más fuerte a jamaica, o tienen el mismo sabor?	Mezcla	Jarras	Vasos de jamaica	Vasos de agua	
<i>Exámenes.</i>	Una niña presentó dos exámenes (A y B), en los que obtuvo distintas cantidades de respuestas correctas e incorrectas. ¿En cuál examen tuvo mejores resultados, o le fue igual en los dos? Pregunta adicional: ¿qué calificación obtuvo en cada examen?	Mezcla	Exámenes	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	

Nombre	Planteamiento	Tipo	Objetos	Antecedentes	Consecuentes	Presentación gráfica
<b>Botellas de canicas</b>	En dos botellas (A y B) se echan distintas cantidades de canicas azules y amarillas. Sólo se puede agitar una de las dos y sacar una canica de ella; si la canica que salga es azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál botella conviene agitar, o da igual?	Mezcla aleatoria	Botellas	Canicas azules	Canicas amarillas	
<b>Ruletas</b>	Dos ruletas (A y B) constan de distintas cantidades de sectores azules y amarillos; en cada ruleta todos los sectores tienen la misma área. Se puede girar con rapidez una de las dos y detenerla; si se detiene sobre un sector azul entonces se obtiene un premio. ¿Cuál ruleta conviene girar, o da igual?	Mezcla aleatoria	Ruletas	Sectores azules	Sectores amarillos	
<b>Camiones</b>	Dos camiones (A y B) viajan desde un depósito (D). Al hacer la primera entrega ( ) están a cierta cantidad de kilómetros del depósito (cada kilómetro está representado por  — ). Al hacer la segunda entrega ( ) están a otra distancia del depósito. ¿Cuál camión <b>ha viajado más entre la primera y la segunda entregas</b> : el A, el B, o da igual?	Problema aditivo: no es de razonamiento proporcional	Camiones	---	---	
				Para cada camión, las dos cantidades corresponden a kilómetros de distancia desde D, pero como no hay razones no se las puede denominar como antecedente ni consecuente		

Nombre	Planteamiento	Tipo	Objetos	Antecedentes	Consecuentes	Presentación gráfica
<i>Costureras</i>	Dos costureras (A y B) cosen pantalones en una fábrica. A mediodía cuentan cuántos pantalones ha cosido cada una, y al terminar la jornada cuentan los de la tarde. ¿Quién cosió más pantalones durante la jornada, A, B o cosieron la misma cantidad).	Problema aditivo: no es de razonamiento proporcional	Costureras	---	---	<p>mañana</p> <p>tarde</p>
				Para cada costurera, las dos cantidades corresponden a pantalones cosidos, pero como no hay razones no se las puede denominar como antecedente ni consecuente		

**PRIMERA TABLA DE ARREGLOS NUMÉRICOS**

NIVEL I  ALGUNOS ARREGLOS NUMÉRICOS DE SITUACIONES EN LAS QUE SE PUEDEN UTILIZAR ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN		CON ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN DENTRO DE CADA OBJETO						NINGUNA ESTRATEGIA DE COMPARACIÓN DENTRO DE CADA OBJETO	
		En un objeto <b>igual</b> de antecedentes y consecuentes, en el otro <b>menos</b> antecedentes que consecuentes		En un objeto <b>más</b> antecedentes que consecuentes, en el otro <b>menos</b> antecedentes que consecuentes		En un objeto <b>más</b> antecedentes que consecuentes, en el otro <b>igual</b> de antecedentes y consecuentes			
<b>CON ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN ENTRE OBJETOS</b>	Más antecedentes y menos consecuentes	(4,4 ; 2,5)	(3,3 ; 1,4)	(4,2 ; 2,3)	(5,4 ; 1,7)	(6,2 ; 3,3)	(9,1 ; 2,2)	(3,4 ; 1,5)	(5,1 ; 3,2)
	Menos consecuentes y más totales (SÓLO EN MEZCLAS tiene sentido hablar de totales)	(3,3 ; 1,4)	(4,4 ; 1,6)	(6,4 ; 3,5)	(7,2 ; 2,5)	(7,2 ; 3,3)	(4,1 ; 2,2)	(4,5 ; 2,6)	(7,3 ; 5,4)
	Más antecedentes y menos consecuentes	(5,5 ; 2,6)	(5,5 ; 1,6)	(6,3 ; 3,5)	(4,2 ; 1,3)	(7,3 ; 4,4)	(6,1 ; 3,3)	(3,5 ; 1,6)	(8,2 ; 4,3)
	Más antecedentes y menos totales (SÓLO EN MEZCLAS tiene sentido hablar de totales)	(4,3 ; 1,5)	(5,1 ; 1,4)	(5,2 ; 2,3)	(8,2 ; 3,5)	(4,1 ; 3,3)	(6,3 ; 5,5)	(4,6 ; 2,7)	(6,1 ; 4,2)
	Más antecedentes y menos consecuentes	(2,1 ; 1,3)	(5,1 ; 4,6)	(5,3 ; 4,6)	(3,1 ; 1,9)	(5,2 ; 4,4)	(6,1 ; 5,5)	(2,3 ; 1,5)	(5,1 ; 4,3)
	Más antecedentes y menos totales (SÓLO EN MEZCLAS tiene sentido hablar de totales)	(4,4 ; 2,7)	(3,3 ; 2,8)	(5,4 ; 4,6)	(5,2 ; 2,7)	(6,2 ; 5,5)	(7,1 ; 5,5)	(3,4 ; 2,6)	(7,2 ; 6,4)
	Más antecedentes e igual de totales (SÓLO EN MEZCLAS tiene sentido hablar de totales)	(3,3 ; 1,6)	(4,4 ; 1,9)	(3,2 ; 1,5)	(3,4 ; 2,4)	(4,1 ; 3,3)	(6,3 ; 5,5)	(4,5 ; 3,7)	(6,2 ; 5,4)
Menos antecedentes e igual de totales (SÓLO EN MEZCLAS tiene sentido hablar de totales)	(4,3 ; 2,7)	(4,2 ; 3,7)	(3,2 ; 1,4)	(6,4 ; 3,7)	(3,1 ; 2,2)	(5,3 ; 4,4)	(2,5 ; 1,7)	(8,1 ; 7,3)	
Más antecedentes e igual de consecuentes	(2,2 ; 1,3)	(5,5 ; 4,6)	(4,3 ; 2,5)	(5,2 ; 2,5)	(6,4 ; 5,5)	(5,1 ; 3,3)	(2,8 ; 1,9)	(4,1 ; 3,2)	
	(4,4 ; 2,6)	(3,3 ; 2,4)	(7,3 ; 4,6)	(6,1 ; 2,5)	(6,2 ; 4,4)	(4,2 ; 3,3)	(2,3 ; 1,4)	(6,3 ; 5,4)	
	(5,5 ; 1,9)	(4,4 ; 1,7)	(5,3 ; 3,5)	(4,1 ; 2,3)	(3,2 ; 2,2)	(2,1 ; 1,1)	(3,4 ; 1,6)	(6,1 ; 4,3)	
	(5,5 ; 3,5)	(4,4 ; 2,4)	(8,2 ; 4,6)	(4,2 ; 2,4)	(5,4 ; 4,4)	(5,3 ; 3,3)	(2,5 ; 1,6)	(5,2 ; 4,3)	
	(3,3 ; 2,3)	(4,4 ; 1,4)	(3,2 ; 1,2)	(5,3 ; 1,3)	(2,1 ; 1,1)	(4,1 ; 1,1)	(4,5 ; 1,8)	(9,1 ; 7,3)	
	(2,2 ; 1,2)	(3,3 ; 1,3)	(4,3 ; 2,3)	(5,2 ; 1,2)	(3,2 ; 2,2)	(2,1 ; 1,1)	(3,4 ; 2,4)	(4,2 ; 3,2)	
	(5,5 ; 3,5)	(4,4 ; 2,4)	(5,4 ; 1,4)	(6,2 ; 1,2)	(5,4 ; 4,4)	(5,3 ; 3,3)	(2,7 ; 1,7)	(3,1 ; 2,1)	
					(2,1 ; 1,1)	(4,1 ; 1,1)	(3,4 ; 1,4)	(5,2 ; 4,2)	
							(4,5 ; 2,5)	(4,1 ; 3,1)	

Menos consecuentes e igual de antecedentes		(2,2 ; 2,3) (4,4 ; 4,6) (3,3 ; 3,7)	(1,1 ; 1,9) (1,1 ; 1,4) (2,2 ; 2,8)	(2,1 ; 2,3) (4,2 ; 4,5) (2,1 ; 4,5)	(4,3 ; 4,6) (3,2 ; 3,7) (2,1 ; 2,4)	(3,2 ; 3,3) (5,4 ; 5,5) (3,1 ; 3,3)	(2,1 ; 2,2) (4,2 ; 4,4) (5,1 ; 5,5)	(2,3 ; 2,4) (2,5 ; 2,6) (1,4 ; 1,6) (2,3 ; 2,6) (2,3 ; 2,7)	(4,2 ; 4,3) (3,2 ; 3,2) (4,1 ; 4,2) (6,2 ; 6,4) (4,1 ; 4,3)
Menos consecuentes (no hay)	En algunos contextos pueden no tener sentido estas preguntas			(1,0 ; 2,3) (2,0 ; 4,5)	(2,0 ; 3,6) (3,0 ; 4,6)	(2,0 ; 3,3) (1,0 ; 2,2)	(3,0 ; 5,5) (4,0 ; 5,5)	(4,0 ; 5,2) (2,0 ; 3,3)	(4,0 ; 6,3) (3,0 ; 5,4)
Más antecedentes (en el otro objeto no hay)		(3,3 ; 0,2) (5,5 ; 0,2)	(3,3 ; 0,1) (4,4 ; 0,3)	(5,4 ; 0,2) (6,3 ; 0,2)	(4,2 ; 0,1) (3,2 ; 0,1)			(2,6 ; 0,5) (3,4 ; 0,2)	(3,5 ; 0,3) (3,7 ; 0,6)
NINGUNA ESTRATEGIA DE COMPARACIÓN DE ANTECEDENTES Y/O CONSECUENTES Y/O TOTALES ENTRE OBJETOS		(4,4 ; 2,3) (5,5 ; 2,4) (3,3 ; 1,2) (4,4 ; 1,2)	(1,1 ; 2,3) (3,3 ; 4,5) (2,2 ; 3,6) (2,2 ; 3,7)	(4,3 ; 1,2) (5,4 ; 2,3) (5,3 ; 1,2) (6,4 ; 1,3)	(2,1 ; 3,4) (3,2 ; 4,6) (3,1 ; 4,5) (2,1 ; 3,7)	(3,2 ; 1,1) (5,3 ; 2,2) (4,3 ; 2,2) (8,2 ; 1,1)	(3,2 ; 4,4) (4,1 ; 5,5) (3,2 ; 5,5) (2,1 ; 4,4)	Las situaciones de este caso se presentan en la tercera tabla	

## SEGUNDA TABLA DE ARREGLOS NUMÉRICOS

NIVEL II  ALGUNOS ARREGLOS NUMÉRICOS DE SITUACIONES DE  PROPORCIONALIDAD	Situaciones con menos antecedentes que consecuentes		Situaciones con la misma cantidad de antecedentes y consecuentes		Situaciones con más antecedentes que consecuentes	
	(1,2 ; 2,4)	(1,3 ; 3,9)	(1,1 ; 2,2)	(2,2 ; 5,5)	(2,1 ; 4,2)	(3,1 ; 9,3)
(1,2 ; 3,6)	(2,6 ; 3,9)	(1,1 ; 3,3)	(2,2 ; 6,6)	(2,1 ; 6,3)	(6,2 ; 9,3)	
(1,2 ; 4,8)	(1,4 ; 2,8)	(1,1 ; 4,4)	(3,3 ; 4,4)	(2,1 ; 8,4)	(4,1 ; 8,2)	
(2,4 ; 3,6)	(1,4 ; 3,12)	(1,1 ; 5,5)	(3,3 ; 5,5)	(4,2 ; 6,3)	(4,1 ; 12,3)	
(2,4 ; 4,8)	(2,8 ; 3,12)	(1,1 ; 6,6)	(3,3 ; 6,6)	(4,2 ; 8,4)	(8,2 ; 12,3)	
(3,6 ; 4,8)	(1,5 ; 2,10)	(2,2 ; 3,3)	(4,4 ; 5,5)	(6,3 ; 8,4)	(5,1 ; 10,2)	
(1,3 ; 2,6)	(2,3 ; 4,6)	(2,2 ; 4,4)	(4,4 ; 6,6)	(3,1 ; 6,2)	(3,2 ; 6,4)	
	(3,5 ; 6,10)		(5,5 ; 6,6)		(5,3 ; 10,6) ;	



**TERCERA TABLA DE ARREGLOS NUMÉRICOS**

<p><b>NIVEL III</b></p> <p><b>ALGUNOS ARREGLOS NUMÉRICOS DE SITUACIONES DE NO PROPORCIONALIDAD</b></p>	<p><b>Situaciones con menos antecedentes que consecuentes</b></p>				<p><b>Situaciones con más antecedentes que consecuentes</b></p>			
<p>Situaciones en las que las estrategias de suma/resta y las de multiplicación/división llevan elegir el mismo lado</p>	(3,4 ; 1,3) (4,6 ; 1,5) (4,5 ; 1,3)	(4,6 ; 1,5) (3,7 ; 1,6) (3,6 ; 1,5)	(2,3 ; 3,6) (1,2 ; 2,7) (2,3 ; 3,7)	(2,4 ; 3,7) (1,3 ; 2,8) (1,2 ; 2,5)	(6,3 ; 3,2) (7,3 ; 2,1) (7,3 ; 4,2)	<b>(5,3 ; 3,2)</b> (6,4 ; 4,3) (8,2 ; 2,1)	(3,1 ; 4,3) (4,1 ; 5,4) (5,1 ; 6,3)	(4,2 ; 5,4) (5,2 ; 6,4) (6,1 ; 7,3)
<p>Situaciones en las que las estrategias de suma/resta y las de multiplicación/división llevan a elegir lados diferentes</p>	<b>(2,5 ; 1,3)</b> (4,6 ; 1,2)	(3,7 ; 2,5) (2,8 ; 1,6)	(3,5 ; 1,2) (2,7 ; 1,4)	(2,8 ; 1,5) (2,6 ; 1,4)	<b>(5,2 ; 7,3)</b> (2,1 ; 6,4)	(2,1 ; 5,3) (6,1 ; 8,2)	(3,1 ; 6,3) (4,1 ; 7,2)	(4,1 ; 7,3) 5,1 ; 7,2)
<p>Situaciones en las que las estrategias de suma/resta llevan a la respuesta “da igual” y las de multiplicación/división llevan a elegir uno de los dos lados</p>	(2,3 ; 1,2) (3,4 ; 1,2) (4,6 ; 2,4) (2,4 ; 1,3)	(2,6 ; 1,5) (2,7 ; 1,6) (4,6 ; 1,3) (4,5 ; 1,2)	(3,5 ; 1,3) (3,7 ; 1,5) (2,3 ; 4,5) (2,4 ; 3,5)	(2,6 ; 3,7) (2,3 ; 3,4) (3,4 ; 4,5) (3,5 ; 4,6)	<b>(2,1 ; 3,2)</b> (2,1 ; 4,3) (4,2 ; 6,4) (3,1 ; 4,2)	(5,1 ; 6,2) (3,2 ; 5,4) (5,2 ; 6,3) (6,2 ; 7,3)	(4,2 ; 5,3) (3,2 ; 4,3) (5,3 ; 6,4) (7,1 ; 8,2)	(2,1 ; 5,4) (3,1 ; 6,4) (4,1 ; 6,3) (5,1 ; 7,3)