UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

"Las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad en una telesecundaria rural del Estado de México: Un estudio de caso"

Tesis que para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

Nydia Caro Hernández Reséndiz.

Director de tesis:

Dr. Armando Solares Rojas

México D. F. Febrero, 2015.

DEDICATORIA

A mis amores:

Diego, Alberto y la pequeña que esperamos,
por ser el motivo de mis ganas y mis esfuerzos por ser
mejor cada día.

AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos a mi muy estimado asesor Armando Solares Rojas, director de esta tesis. Gracias por sus aportaciones y enseñanzas que contribuyeron a la realización de este estudio y además, por el apoyo y comprensión que me brindó en todo momento.

A mis lectoras Alicia Ávila, Ivonne Sandoval, Edda Jiménez y Alicia Carvajal, gracias por su tiempo y por sus comentarios con los que contribuyeron a mejorar este trabajo. A mis profesores de la maestría, gracias por compartir sus conocimientos y su pasión por la educación.

Gracias también a los profesores que nos abrieron las puertas de sus salones de clase y que compartieron con nosotros su experiencia en el trabajo docente y a todas aquellas personas que fueron partícipes de la realización de esta investigación.

De manera muy especial, gracias a mi amada familia. A mi esposo Alberto, a mi pequeño Diego y a mi nena que viene en camino, por ser parte fundamental en mi crecimiento personal y profesional. A mis padres Francisco y Esther, a mis hermanos Carlos y Tania, a mi cuñada Magdalena, a mis sobrinos Jazmín y Emmanuel y a mi amiga Monse con los que tengo la certeza de contar siempre. Gracias también a Olga que nos abrió las puertas de su hogar y a Cris que se ha ocupado de cuidar de mi tesoro más valioso durante mis horas de estudio.

Y por supuesto a mis amigos y compañeros de la maestría Belem, Erika, Evelyn, Juan, Mario, Miguel, Miriam, Tisbe y Zoraida, gracias por compartir sus conocimientos y experiencias pero sobre todo su valiosa amistad y cariño.

Principalmente, gracias a Dios por permitirme llegar hasta aquí y aprender algo de todos ustedes.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Tomar distancia del quehacer diario es una experiencia enriquecedora para una profesora de secundaria. Ha representado para mí la posibilidad de estudiar mi propio trabajo pero desde una perspectiva diferente, no en la cotidianeidad del trabajo en el aula, en donde nos embargan las múltiples responsabilidades, las preocupaciones, los problemas y la diaria tarea de enseñar, con todo lo que ello implica: planear actividades, diseñar estrategias, llevarlas a cabo, valorarlas, evaluar el aprendizaje, etc.

Entre tanto, resulta complicado poder escudriñar en la propia labor para tratar de comprender lo que sucede con lo que hacemos cada día. Durante el estudio de la Maestría en Desarrollo Educativo, en la Universidad Pedagógica Nacional, tuve la oportunidad de separarme del trabajo diario de enseñar y transformarlo en mi objeto de estudio. Decidí para ello, hacerlo en una modalidad diferente a la que he estado trabajando, con lo que no solo tomé distancia del trabajo diario sino también de las condiciones en las que se realiza.

Visualizar la enseñanza desde una perspectiva diferente me ha permitido contemplarla como algo que es susceptible de ser analizado y comprendido desde diversas consideraciones: sus características, sus resultados y sus condiciones. Particularmente, el análisis secuencial de las propuestas didácticas para el estudio de la proporcionalidad y de su puesta en práctica en el aula a través de la enseñanza, me ha llevado a ser más consciente de mis propias acciones en el salón de clases tales como la elección o el diseño de las actividades, la manera en que transformo los problemas a través de mis intervenciones y el resultado de mi trabajo.

La reflexión sobre mi propia práctica de enseñanza, me ha dado la posibilidad de valorarla y reconstruirla con miras a mejorarla y favorecer el aprendizaje de mis alumnos.

Además de lo que ha representado para mi propio desarrollo profesional, el presente estudio agrega información para comprender el modo en que se desarrolla la enseñanza de la proporcionalidad, específicamente en telesecundaria. El conocimiento sobre ello puede favorecer el diseño de propuestas didácticas dirigidas al apoyo de la enseñanza, así como de programas de capacitación y acompañamiento a los profesores de esta modalidad educativa.

El trabajo está estructurado en tres capítulos. En el primero presentamos los antecedentes en los cuales se basa la investigación y que permiten identificar, desde la perspectiva de diversos estudios, las características del modelo educativo de telesecundaria y los resultados de diferentes análisis sobre la enseñanza de la proporcionalidad. Asimismo, contiene la problematización del objeto de estudio y los objetivos que nos planteamos para el desarrollo de esta tesis.

El segundo capítulo mostramos los aspectos teóricos y metodológicos que fundamentaron la investigación. Se describen los elementos teóricos de la doble aproximación (Robert, 2007), en los cuales basamos nuestros análisis y se especifica la metodología que empleamos para realizarlos. También se presentan aquellos elementos teóricos sobre la proporcionalidad (Block, Mendoza & Ramírez, 2010) en los que nos apoyamos para el estudio de este contenido matemático.

En el tercer capítulo presentamos un análisis de las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad, el cual se basa en la observación de dos de las clases impartidas por una profesora de primer grado de telesecundaria en las que se abordó el tema de la proporcionalidad. Dicho análisis se realizó a través del estudio de las transformaciones que la profesora hace de la propuesta didáctica presentada en los libros de texto oficiales. Además, presentamos un breve estudio sobre las condiciones bajo las cuales los profesores de telesecundaria realizan las actividades de enseñanza y la manera en que éstas influyen en su labor.

Finalmente presentamos las conclusiones de nuestro trabajo, así como las fuentes bibliográficas que consultamos para la realización de esta investigación.

CAPÍTULO I

1. ANTECEDENTES

En los siguientes apartados presentamos algunos aspectos que, consideramos, es importante conocer sobre la enseñanza de la proporcionalidad en telesecundaria, campo de estudio al cual hemos accedido mediante la revisión de diversas investigaciones que nos permitieron identificar las características del modelo educativo de telesecundaria, así como algunos de los resultados derivados de deferentes estudios sobre la enseñanza y, particularmente, de la enseñanza de la proporcionalidad.

En un primer apartado presentamos una breve descripción del modelo educativo de telesecundaria. El estudio del desarrollo y de las características de esta modalidad educativa nos ha servido para entender las condiciones en las que se lleva a cabo la enseñanza y ha guiado también nuestro interés por realizar nuestro estudio en una escuela telesecundaria rural.

En el segundo apartado nos referimos al contenido matemático de la proporcionalidad y a su enseñanza. El estudio de este aspecto nos ha permitido conocer algunas características de la enseñanza de este contenido matemático y lo han colocado en el centro de los intereses de esta tesis.

Finalmente planteamos las preguntas que guiaron el desarrollo de nuestra investigación y los objetivos que nos fijamos cumplir a través de ella.

1.1. El modelo educativo de la telesecundaria

Actualmente la telesecundaria es una de las modalidades mediante las cuales se imparte la educación secundaria en México, comparte con la secundaria general y la secundaria técnica un mismo currículo nacional pero se distingue de ellas por su organización[1]. En la telesecundaria las clases se dan con la participación de un solo profesor por grupo, quien cubre todas las asignaturas apoyando su labor con recursos didácticos diseñados por la Secretaría de Educación Pública, para la enseñanza en esta modalidad educativa. Dichos recursos didácticos constan de programas de televisión y de libros de texto, principalmente, aunque también se cuenta con otros materiales audiovisuales, impresos e informáticos.

1.1.1. Los inicios y la evolución de la telesecundaria

El modelo educativo de telesecundaria surgió a mediados de la década de los 60 como respuesta a la necesidad de expansión del servicio educativo, fundamentalmente en zonas rurales del país donde por la cantidad de alumnos y las condiciones de la comunidad, resultaba incosteable establecer secundarias generales o técnicas (Santos & Carvajal, 2001; Calixto & Rebollar, 2008).

Los estudiantes, conformados en grupos de entre 15 y 30 alumnos, recibían las clases en *teleaulas* por medio de una transmisión televisiva de aproximadamente 20 minutos, la cual era organizada e impartida en vivo por los llamados *telemaestros*, quienes paulatinamente recibieron el apoyo de especialistas y técnicos para favorecer la enseñanza de los contenidos escolares. Posteriormente se incorporó también un material impreso en apoyo a las clases por televisión, llamado *Guía para las lecciones televisadas de segunda enseñanza* (Jiménez, Martínez & García, 2010).

En las aulas, los grupos contaban con un coordinador cuya función era organizar las actividades en torno a la clase televisada, vigilar la puntualidad, la asistencia y el comportamiento de los alumnos; elaborar informes y documentación escolar y evaluar las actividades.

[1] En México la educación secundaria se imparte en las modalidades de secundaria general, técnica, telesecundaria, para trabajadores y comunitaria. La secundaria para trabajadores tiene un currículo más reducido, mientras que la comunitaria opera con el modelo de telesecundaria y es regulada por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE).

Desde su creación, la telesecundaria ha crecido y se ha fortalecido considerablemente. Entre 1990 y 1999 este servicio tuvo un importante crecimiento. La telesecundaria pasó de atender al 11%, a dar servicio al 20% de la población estudiantil de secundaria. Asimismo el número de escuelas se incrementó hasta llegar a duplicarse. Este aumento estuvo por encima del crecimiento que experimentaron las secundarias técnicas y las secundarias generales en el mismo periodo (Jiménez, Martínez & García, 2010).

Con este crecimiento, según Calixto & Rebolar (2008: 7), “la telesecundaria se consolidaba como una de las más eficaces en la ampliación de la cobertura y la búsqueda de equidad en el acceso a la educación secundaria, particularmente de jóvenes en zonas rurales y urbanas marginadas del país”. Torres y Tenti (citado en Carvajal, 2006: 129), lo calificaron como un modelo “pionero y ejemplar” con el cual México respondía a la demanda de cobertura, equidad y formación continua del capital humano, derivadas del desarrollo de una sociedad del conocimiento en una economía que tiende a la globalización y que provoca el surgimiento de formas diversas de educación entre las que destacan la educación a distancia y la incorporación de las TIC en las aulas (Calixto & Rebollar, 2008).

Además, con el propósito fundamental de ser un vínculo entre escuela y comunidad, algunos estudios indicaron que la telesecundaria fue ganando popularidad entre los usuarios. Un estudio de Quiroz (2003) reportó los juicios que los estudiantes se formaban sobre el modelo pedagógico de la telesecundaria. En general, los alumnos lo calificaban como un modelo favorable para adaptarse a él, convivir con compañeros y profesores y para aprender y aprobar los cursos. Dada su experiencia de trabajar con un solo profesor, con clases televisadas y con libros de texto tanto de consulta como de actividades, los alumnos lo consideraban una buena opción para estudiar al brindarles confianza en su aprendizaje y un sentido de identidad con su escuela.

En 1993, a raíz de la Reforma Educativa de ese año, se estableció un nuevo modelo educativo para telesecundaria, el cual se definía como “un proceso interactivo, participativo, democrático y formativo entre alumnos, maestros, grupos, escuelas, familias y comunidades; que se daba con el apoyo de información de calidad, transmitida por televisión y publicada en materiales impresos" (Jiménez, Martínez & García, 2010: 79). El nuevo modelo educativo representó sobre todo cambios en el modelo pedagógico, aunque también los hubo en los ámbitos organizativos y administrativos del sistema de telesecundaria.

Respecto al modelo pedagógico, el proceso estaba centrado en la participación activa del alumno para construir sus propios conocimientos. En un contexto donde el constructivismo enmarcaba los principios de la reforma educativa, era el estudiante quien, a partir de la información recibida, debía realizar el proceso de aprendizaje al relacionar la nueva información con sus conocimientos previos e incorporarla a sus estructuras mentales.

Si bien las clases continuaron siendo televisadas, en las aulas el coordinador fue sustituido por un profesor responsable de orientar el proceso de enseñanza y de aprendizaje mediante la creación del ambiente propicio para el intercambio de conocimientos y experiencias a partir del empleo de los materiales y los recursos informativos disponibles (SEP/ ILCE, 1997 citado en Carvajal 2003; Jiménez, Martínez & García, 2010). Una de las acciones para favorecer dicho cambio fue la creación, en las Escuelas Normales de algunos estados de la República, de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en telesecundaria.

Bajo la consideración de que en la telesecundaria las transmisiones televisivas y los materiales impresos son un referente principal de la información que apoya los procesos de enseñanza y de aprendizaje, la reforma de 1993 puso el énfasis en su reformulación. La transmisión televisiva evolucionó transformándose de una clase impartida en vivo a programas grabados diseñados y elaborados por expertos y presentados por actores.

Los medios impresos fueron sustituidos por tres materiales de apoyo: el *Libro de Conceptos Básicos* que contenía el desarrollo de los contenidos temáticos a tratar, organizados de manera semejante a una enciclopedia, la *Guía de Aprendizaje* que era un cuaderno de trabajo con la función de organizar el proceso didáctico mediante actividades diversas y la *Guía Didáctica* que era un apoyo para el profesor al ofrecerle información sobre los contenidos, orientaciones didácticas, ejercicios extras y sugerencias para la organización de las clases y para la evaluación.

El nuevo modelo educativo se presentaba como un proyecto innovador para el sistema de telesecundaria. Sin embargo, la realidad de las aulas no siempre favorece que los elementos de un modelo operen conforme a lo prescrito. Algunos estudios (Quiroz, 2003; Carvajal, 2006; Kalman & Carvajal, 2007) refieren la forma en que a partir de este modelo educativo, derivado del plan de estudios de 1993, se constituyeron las prácticas cotidianas en las escuelas.

En general las clases se estructuraban alrededor del programa de televisión. El horario en el que se presentara, ya sea al inicio, en medio o al final de la sesión, determinaba la organización de las actividades. Cuando correspondía verlo al inicio de la sesión (en los grupos de primer grado) el programa fungía como una explicación introductoria, la cual se ampliaba con la exposición del profesor. Si por el contrario, el programa se presentaba en medio o al final de la clase (en los grupos de segundo y tercer grados, respectivamente), se utilizaba para complementar o corroborar lo que el docente ya había explicado o lo que antes se había leído y solucionado en los libros.

La rigidez de los horarios y de la organización en la transmisión de los programas de televisión, provocaba que a menudo hubiera un desfase entre el contenido que se presentaba y el que se estudiaban en la clase. Los profesores debían adecuar el tiempo y los temas. A veces se veía el programa sin que correspondiera al tema que se trabajaría, esperando que los alumnos lo recordaran cuando llegara el momento de estudiar ese contenido. Otras ocasiones se omitía esta actividad y el profesor se hacía cargo de explicar los temas conforme las condiciones del grupo le permitían avanzar en el programa de estudios.

Complementar la *Guía de Aprendizaje*[2] constituía la parte fundamental de las clases, este trabajo era el producto de la actividad de los estudiantes y la demostración de lo aprendido. De la Guía se desprendían las actividades que

[2] En adelante, nos referiremos a la Guía de Aprendizaje como la Guía.

conformaban cada sesión y a partir de las cuales los docentes construían su labor y obtenían la evaluación de los alumnos. Resolver los ejercicios y problemas o contestar los cuestionarios que contenía llegó a convertirse, en muchas aulas, en la finalidad del proceso (Carvajal, 2003).

Sin embargo, la estructura de la Guía favorecía muy poco el aprendizaje y la participación del alumno tal y como se establecía en el modelo pedagógico. Los alumnos generalmente hacían uso del *Libro de Conceptos Básicos,* en el cual se presentaba la información precisa para resolver los ejercicios y cuestionarios planteados, sin que el alumno tuviera que poner mayor empeño en buscarla, discriminarla o valorarla.

Al respecto, Calixto & Rebollar (2008) aseguraron que había una gran distancia entre lo planteado teóricamente por el modelo de telesecundaria y las prácticas que se efectuaban en los salones de clase. Por lo que aseguraron que a pesar de ser una oportunidad para que los jóvenes de zonas ruares y marginadas estudiaran la secundaria, la subordinación a los recursos técnicos estaban limitando las condiciones de desarrollo tanto de los estudiantes como de los profesores.

Pero este no era el único problema que afectaba al sistema de telesecundaria. En una investigación sobre la operación de este servicio en zonas rurales marginadas, Santos & Carvajal (2001), reportaron datos importantes sobre las circunstancias en las que se estaban desarrollando las actividades de este modelo educativo. En el estudio destaca la información sobre las carencias en infraestructura, servicios y materiales para la enseñanza.

En un modelo en el que el programa de televisión y los materiales impresos constituían componentes didácticos centrales, había escuelas que no contaban con antena o decodificador para recibir la señal, algunas otras no contaban con televisor o luz eléctrica y varias no recibían los libros a tiempo o de manera suficiente para la cantidad de alumnos que atendían. A esto se sumaba la falta en algunas escuelas de drenaje, agua, sanitarios, biblioteca, laboratorio o mobiliario.

De importancia son también los datos sobre la falta de recursos humanos. Varias escuelas no contaban con director o con personal administrativo o de intendencia. Pero lo más preocupante era la falta de profesores, lo que propiciaba la existencia de escuelas multigrado, unitarias o bidocentes[3], en las que los profesores deben además de atender a los alumnos, hacer labores administrativas, secretariales, de gestión y de aseo, entre otras. Esto representa una gran dificultad si se considera que en telesecundaria los profesores deben hacerse cargo de la enseñanza de todas las asignaturas (y de múltiples tareas más), bajo condiciones laborales poco favorables, en general. Esto sin contar con la capacitación ni con los materiales necesarios para la enseñanza multigrado, puesto que este modelo no está diseñado para trabajar en esas condiciones (Santos, 2001).

Estas características y condiciones en que se estaba desarrollando la educación de telesecundaria, se vería reflejada en el nivel de logro de los estudiantes. En su estudio, Santos encontró que la mayoría de los estudiantes no alcanzban los estándares de aprovechamiento establecidos[4], especialmente en matemáticas, hecho que además se acentuaba en las poblaciones más pobres o de procedencia indígena.

Por su parte, Santos & Carvajal (2001: 95) aseguraron que “el modelo no estaba operando con criterios que permitieran dar atención preferencial a los alumnos y maestros de las escuelas más pobres”. La telesecundaria estaba siendo ineficaz e inequitativa (Santos, 2001) al estar reproduciendo las desigualdades, en la medida en que los problemas señalados se concentraron en las zonas más pobres.

---

[3] Las escuelas secundarias multigrado son aquellas en las que un solo profesor se hace cargo de la enseñanza en los tres grados escolares. Comúnmente se organizan como escuelas unitarias, las cuales cuentan con un sólo grupo formado por estudiantes de los tres grados escolares del nivel de secundaria, en los que profesor, además, se hace cargo de las funciones directivas; estas escuelas representaban el 8.4% del total de telesecundarias en 2003. En el mismo año había 12.5% de escuelas bidocentes, en las que dos profesores atendían la escuela, en estos casos por lo general se organizaban para que uno atienda dos grados y el otro el grado restante y las labores directivas.

[4] El estudio se basa en los resultados de las Pruebas de Estándares Nacionales diseñadas por la Dirección General de Evaluación y aplicadas en el año 2000 (Véase Santos, 2001).

1.1.2. El modelo actual de telesecundaria

En 2001, el panorama sobre el Sistema Educativo Nacional presentado en el Programa Nacional de Educación 2001-2006 señalaba la existencia de una relación entre los niveles de logro educativo y de eficiencia terminal más bajos, y los niveles de marginación más altos. Estas condiciones se concentraban en las poblaciones que atiende, comúnmente, la telesecundaria. Con lo anterior se concluía que esta modalidad no estaba sirviendo como un contrapeso a las condiciones socioeconómicas de los sectores más pobres (SEP, 2001).

Se planteaba así la necesidad de reformar la educación secundaria, incluyendo de manera especial a la telesecundaria (SEP, 2001), con la finalidad de mejorar la cobertura, la calidad y la equidad de los servicios educativos y garantizar con ello el desarrollo integral de los estudiantes.

En 2005 se realizó la Consulta Nacional de la Reforma, con los resultados obtenidos se definieron algunas líneas de acción sobre las cuales orientar los cambios que se hacían necesarios en el nivel educativo de secundaria. Una de ellas fue la de "renovar el modelo pedagógico de la telesecundaria atendiendo las necesidades de actualización de materiales, formación inicial y continua de docentes y renovación de la infraestructura y el equipamiento" (DOF, 2006: 2).

Específicamente para la telesecundaria, la reforma educativa implicaba:

> reorganizar el tiempo en el aula, renovar sus materiales didácticos, diversificar los recursos y materiales educativos, transformar de manera paulatina la práctica docente, incorporar el uso de la tecnología –incluida la inserción de herramientas computacionales– y proponer diferentes escenarios y modos de uso para éstos (Eternod, Villarreal & Becerril, 2006: 9).

Esta consigna se puntualizó en 2006, año en que se publicó el Acuerdo 384 en el que se establecía el nuevo Plan y Programas de Estudio de Educación Secundaria. Entre sus artículos transitorios, el Acuerdo indicaba que "para la modalidad de telesecundaria, la Secretaría de Educación Pública [presentaría] un modelo pedagógico, acorde con el nuevo plan y programas de estudio" (DOF, 2006: 21).

En este marco se inició otra renovación del modelo pedagógico de telesecundaria, el cual:

> orientaba sólo el desarrollo de actividades didácticas, con la elaboración de nuevos materiales impresos y la inclusión de recursos tecnológicos adicionales […] y, sobre todo, la incorporación de una nueva orientación didáctica que respondiera a los objetivos y enfoques planteados en la reforma y que fuera pertinente para las características y expectativas del adolescente actual (Jiménez, Martínez & García, 2010: 108).

En 2011, la Secretaría de Educación Pública definió el Modelo Educativo para el Fortalecimiento de la telesecundaria, documento en el que se establecen los principios legales, filosóficos, sociales y pedagógicos en base a los cuales opera actualmente esta modalidad educativa. En él se establece un eje rector desde el que se organizan sus planteamientos, y que está conformado por tres elementos: El Plan de Estudios 2006, el Diseño Instruccional y las Estrategias de Reforzamiento a la Formación y el Aprendizaje.

El Plan de Estudios 2006 representa la base sobre la cual se fundamenta la formación educativa, toda vez que el modelo pedagógico de telesecundaria se apega a su propuesta curricular. El Diseño Instruccional define como una estrategia, planificar y estructurar los procesos de enseñanza y aprendizaje, tiene la finalidad de brindar soporte y confianza al cumplimiento de los aprendizajes esperados para cada asignatura. Las Estrategias de Reforzamiento a la Formación y el Aprendizaje tienen la función de complementar las actividades curriculares, para fortalecer la formación de los estudiantes (SEP, 2011b).

De estos tres elementos, el Diseño Instruccional destaca por ser el vínculo de la interacción entre el profesor, los alumnos y los contenidos representados por los materiales educativos. Asimismo, porque habría de resultar de una mediación pedagógica entre dos rubros: las secuencias de aprendizaje elaboradas y presentadas por los materiales educativos, y la participación del docente para adecuar las diferentes propuestas (SEP, 2011b).

Con base en lo anterior, se introdujeron nuevos materiales, libros de texto para el alumno y para el maestro organizados, de acuerdo al nuevo plan y programas de estudio, en *Secuencias* para trabajar en varias *Sesiones* de clase un mismo proyecto o contenido. Los programas televisivos pasaron de ser uno para cada clase, a ser uno para cada Secuencia (tema) de estudio, dando mayor flexibilidad a su uso en clase y dejando al docente la posibilidad de decidir el momento en el que es conveniente observarlo. Se incluyeron también otros materiales impresos, audiovisuales e informáticos, así como diversas orientaciones y sugerencias sobre la organización de las clases, la actividad del docente y la del alumno, el uso de los materiales, el enfoque de las asignaturas y las formas de evaluación.

En 2011 se publicó el Acuerdo Número 592, por el que se establece la articulación de la educación básica. Este acuerdo repercutió, entre otras cosas, en el reordenamiento del plan y los programas de estudio de la Educación Secundaria. El Acuerdo también señala que se dará continuación a la renovación del modelo pedagógico de telesecundaria de acuerdo a las necesidades de actualización de los materiales, la formación de docentes y la renovación de la infraestructura del equipamiento (SEP, 2011a).

Actualmente, los Indicadores del Sistema Educativo Nacional (INEE, 2013) muestran que casi la mitad (49.7%) de las escuelas de nivel secundaria son telesecundarias, las cuales operan con un promedio de 70 alumnos y 4 docentes por escuela, y atienden a poco más de la quinta parte (20.7%) de la matrícula nacional. Se sabe que casi 90% de las telesecundarias se encuentran en localidades rurales. El 75.2% se encuentran en comunidades de muy alta a media marginación, las cuales atienden el 72.7% de los alumnos de esta modalidad de educación secundaria.

Se señala también que en los últimos doce años la telesecundaria ha mostrado avances importantes. Se crearon 3172 escuelas y se logró disminuir el porcentaje de las que se encuentran en situación multigrado (de 24.7% a 18.2%). También aumentó la cantidad de docentes con al menos título de licenciatura (57.4% a 80.6%). Además, es en esta modalidad en la que se reporta la mayor parte de profesores contratados de tiempo completo y tres cuartos de tiempo (38.1% y 59.8%, respectivamente); así como el porcentaje más alto de docentes incorporados al programa de Carrera Magisterial, en el sector público, con el 28.7%.

Sin embargo aún no se logra mejorar los resultados de aprendizaje. Los bajos resultados constituyen un problema que se describe por el informe del INEE (2013) como algo paradójico, toda vez que es esta modalidad la que presenta la mayor tasa de aprobación de sus estudiantes, con cerca de 95%.

La telesecundaria concentra los mayores porcentajes de alumnos con desempeño *insuficiente* en los EXCALE[5], tanto en Español, como en Matemáticas. Pero es esta última la que reporta el mayor porcentaje de alumnos en dicho nivel, con 62.1% para esta modalidad educativa.

Esta situación ha sido corroborada por otras evaluaciones nacionales e internacionales (ENLACE y PISA[6]) en las que si bien es evidente que existe un problema para el logro de los aprendizajes y las competencias necesarias para la vida en los estudiantes del nivel secundaria en general, lo cierto es que las brechas más grandes se encuentran en la modalidad de telesecundaria con una tendencia de aumento en este problema, el cual se enfatiza en las comunidades más pobres del país.

Con estos antecedentes es posible identificar las características generales con las que opera actualmente la telesecundaria en México y se puede argumentar que es

[5] Los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) son aplicados por el INEE cada tres años a una muestra de estudiantes inscritos en uno de los grados con los que se concluye cada nivel educativo: 3° de Preescolar, 3° de Primaria, 6° de Primaria, 3° de Secundaria y 3° de Medio Superior. En Secundaria (EXCALE 09) su aplicación se realizó en los años 2005 y 2008. Los resultados de los EXCALE son analizados con referencia a cuatro niveles de logro: insuficiente, básico, medio y avanzado.

[6] La Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) se realizaba mediante un examen censal aplicado en educación básica y más recientemente en el nivel medio superior. El Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) es una evaluación realizada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) a estudiantes de 15 años de edad.

un modelo que ha contribuido a dar cobertura a la demanda del servicio educativo del nivel secundaria en nuestro país, sobre todo en zonas rurales y marginadas.

Sin embargo, los bajos resultados en términos del aprendizaje que logran sus estudiantes ponen en cuestión la calidad de su servicio y el principio de equidad para las poblaciones más vulnerables y demanda a su vez acciones para revisar, analizar y comprender la forma en la que opera la telesecundaria desde sus diferentes ámbitos, administrativo, académico, sociocultural, pedagógico, etc. Esta revisión tendría la finalidad de generar información que contribuya a la creación y realización de acciones para la mejora de esta modalidad de la educación secundaria que atiende cada vez a un mayor número de alumnos.

1.2. La proporcionalidad y su enseñanza en educación básica

Hemos enunciado algunos datos que permiten ver que los resultados de aprendizaje más bajos se concentran en telesecundaria y, especialmente, en el área de matemáticas. Según el INEE (2006) uno de los contenidos de estudio de esta asignatura que presenta serias deficiencias en el aprendizaje es el de la proporcionalidad.

Lo anterior llama la atención debido a que los bajos resultados se presentan a pesar de que se trata de un contenido matemático que se aborda en todos los niveles educativos y que, además, su uso trasciende el ámbito escolar ya que constituye un conocimiento con numerosas aplicaciones en diversas situaciones de la vida cotidiana relacionadas con el comercio, el cálculo de medidas, la cocina, los oficios, entre otras.

Uno de los factores a los que podría atribuirse las deficiencias en el aprendizaje de la proporcionalidad es la manera en que es enseñada. A continuación presentamos algunos resultados de diversos estudios que nos permiten tener un panorama sobre la proporcionalidad y su enseñanza. Complementamos nuestra perspectiva con otras investigaciones centradas solo en la enseñanza y en la enseñanza de las matemáticas.

1.2.1. La proporcionalidad en la educación básica

De acuerdo con Rivas, Godino & Castro (2012), en la escuela el uso de la proporcionalidad resulta ser una habilidad relevante para el aprendizaje de las matemáticas. Lo anterior es debido a que dicho contenido "subyace en múltiples nociones matemáticas como la multiplicación, la división, la razón, la escala, el porcentaje, la probabilidad, la función lineal, entre otras" (Block, Mendoza & Ramírez, 2010: 19).

En este sentido, la proporcionalidad funge como un elemento que vincula diversos temas matemáticos, permite comprender conceptos elementales y fundamentar otros más complejos (NCTM, 2000 y Lamon, 2005, citados en Rivas, Godino & Castro, 2012). Además, tiene diversas aplicaciones en otras disciplinas y es fundamental para la estructura descriptiva de otras ciencias como la física (Mochón, 2012).

Actualmente en México el estudio de la proporcionalidad en educación básica, se aborda a través del *eje temático*[7] denominado *Manejo de la Información*, puesto que las nociones y técnicas que provee resultan útiles para la interpretación y la comunicación de información. No obstante, debido a su naturaleza es posible que también se relacione con los otros dos ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico* y *Forma espacio y medida* (SEP, 2011c). En tabla 1.1 se muestran algunos vínculos de la proporcionalidad con otros temas del currículum de educación básica.

[7] El actual programa de estudios de matemáticas para el nivel de secundaria organiza los contenidos curriculares en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida y Manejo de la información.

Tabla 1.1. VÍNCULOS DE LA PROPORCIONALIDAD CON OTROS TEMAS DEL CURRÍCULUM DE EDUCACIÓN BÁSICA[8]	
Contenidos vinculados	**Aspectos vinculados con proporcionalidad**
Multiplicación, división	• Problemas multiplicativos
Medición	• Pi: constante de proporcionalidad en la relación que asocia un diámetro y la circunferencia que le corresponde • Superficie del rectángulo, proporcional a cada lado, cuando el otro es fijo (proporcionalidad múltiple) • Volumen, proporcional a una arista, cuando las otras dos son fijas (proporcionalidad múltiple) • La relación entre dos cantidades de magnitud es proporcional a la relación entre sus medidas (si una longitud es *n* veces otra, su medida, no importa con qué unidad, también es *n* veces la anterior) • Cambios de unidad
Geometría	• Escala
Manejo de la información/ Probabilidad	• Razón • Porcentaje
Fracciones	• La multiplicación por una fracción *a/b* como la composición de dos factores de proporcionalidad: $\times a$ y : *b* O bien • La multiplicación por una fracción *a/b* como el factor de proporcionalidad de la relación en la que a *b* le corresponde *a*, o en la que a 1 le corresponde *a/b* • Razones (n, m) equivalentes corresponden al racional *n/m*
Álgebra	• Relación funcional, ecuaciones

El estudio de la proporcionalidad comienza en el cuarto grado de primaria aunque desde los primeros tres grados de este nivel educativo, se estudian contenidos relacionados con esta noción. Su estudio se continúa durante la educación secundaria, articulándose con la noción de función lineal (Block, Mendoza & Ramírez, 2010). A manera de síntesis, la tabla 1.2 muestra los aspectos de la proporcionalidad que se estudian a lo largo de la educación básica[9].

[8] Tomada de Block, Mendoza & Ramírez, 2010: 97.

[9] La tabla 1.2 está basada en los programas de estudio 2006, puesto que son con los que opera actualmente la telesecundaria, modalidad educativa en la que centramos esta estudio.

Tabla 1.2. LA PROPORCIONALIDAD A LO LARGO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA[10]

Forma de intervención	Grados escolares	Aspectos
Implícita	Primero	• Situaciones multiplicativas en las que se da el valor unitario (por ejemplo, poner tres lápices en cada bote…) • Resolución por conteo, suma repetida
	Segundo	• Primeros problemas de multiplicación explícita • Valor unitario dado • Resolución por conteo, suma repetida
	Tercero	• Problemas de multiplicación • Valor unitario dado • Uso de “veces” en tanto razón interna que se conserva (seis manzanas cuestan seis veces lo de una manzana)
Explícita	Cuarto	• Problemas de multiplicación y de división • Valor unitario dado o no dado • Uso de “veces” en tanto razón interna que se conserva (al doble, el doble; al triple, el triple)
	Quinto	• Factor constante de proporcionalidad • Variación proporcional y no proporcional • Porcentaje
	Sexto	• Porcentaje • Dos o más factores constantes de proporcionalidad (entero o fraccionario) • Comparación de razones • Propiedades de la relación proporcional
	Secundaria	• Reparto proporcional • Factores de proporcionalidad fraccionarios y decimales • Aplicación sucesiva de factores de proporcionalidad • Porcentaje • Proporcionalidad inversa • Proporcionalidad múltiple • Comparación de razones, razón de cambio

1.2.2. Estudios sobre la proporcionalidad y su enseñanza.

No obstante su importancia y fuerte presencia en el currículum de educación básica, la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad presentan serias dificultades. Algunas investigaciones sostienen que buena parte de las personas no llegan a

[10] Tomada de Block, Mendoza & Ramírez, 2010: 96

desarrollar esta forma de razonamiento de manera adecuada (Lamon, 2005; Onuchic; Allevato, 2008; citados en Rivas, Godino & Castro, 2012: 572).

Al respecto, el Instituto Nacional de Evaluación Educativa reportó que según los resultados de la prueba EXCALE 2006:

> Con respecto a la proporcionalidad, los estudiantes lograron identificar tablas y gráficas de datos que mantienen esta relación, sin embargo sólo 5.8 por ciento tiene buena probabilidad de resolver problemas de reparto proporcional y 3 por ciento de resolver problemas de proporcionalidad donde el valor unitario es un número decimal o fraccionario. Mientras que sólo 1.6 por ciento tiene buena probabilidad de resolver problemas de aplicación o cálculo de un porcentaje (INEE, 2006).

Rivas, Godino & Castro (2012), refieren diferentes estudios en los que se concluye que la escuela se limita a la enseñanza de reglas (tales como la regla de tres, producto cruzado, cálculo de la constante de proporcionalidad) que si bien permite a los estudiantes resolver de manera correcta problemas que implican relaciones de proporcionalidad, constituyen procedimientos que carecen de significado para los alumnos y que no permiten que se ponga en juego un razonamiento proporcional.

Consideramos que el uso de técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad tiene un valor importante en el aprendizaje, sin embargo un problema sería que su aplicación se limite al ámbito escolar y su aplicación no trascienda a situaciones de la vida cotidiana, donde el uso de procedimientos personales basados en propiedades de las relaciones de proporcionalidad, tales como las razones internas o la propiedad aditiva, suelen ser utilizadas de manera muy eficiente por personas que, incluso, carecen de escolaridad.

Por su parte, Rivas & Godino (2010: 190) señalan que de acuerdo a diversos investigaciones, los alumnos inscritos en la tercera etapa de educación básica, presentan dificultades para resolver problemas que involucran el razonamiento proporcional. Los autores atribuyen los problemas en el aprendizaje de la proporcionalidad a las deficiencias en la tarea de enseñanza; la cual, afirman, es en gran medida responsabilidad del docente.

Se observa que para algunos autores la enseñanza se posiciona en el centro de las explicaciones sobre los malos resultados en el aprendizaje. Sin embargo, ello también la coloca en el interés de múltiples investigaciones cuya finalidad es analizarla y estudiar diversas posibilidades de contribuir a su mejora.

Así, la enseñanza como objeto de estudio, ha sido analizada desde diferentes perspectivas. Específicamente sobre la enseñanza de la proporcionalidad Balderas (2010) realizó una investigación desde la perspectiva del conocimiento que maestros de secundaria tienen sobre el tema y su didáctica.

Este autor presenta como resultado de su estudio una marcada diferencia entre los conocimientos técnico-prácticos y los tecnológico-teóricos que poseen los profesores. En los primeros, los maestros tuvieron un desempeño bueno en la resolución de problemas, sobre todo los de comparación de razones, valor faltante y reparto proporcional. Presentaron mayor dificultad en problemas de valor faltante que implicaban una relación aditiva, los de composición de escalas sucesivas y de reconocimiento de escala. En cuanto al uso de las técnicas, la regla de tres y el valor unitario fueron los procedimientos más utilizados, aun cuando las variables didácticas favorecían otros procedimientos como las razones internas.

En los conocimientos tecnológico-teóricos se encontraron mayores problemas tales como errores en los argumentos escritos de los maestros para justificar la presencia o ausencia de proporcionalidad en las situaciones que se les plantearon. Los profesores también manifestaron establecer escasas conexiones de la proporcionalidad con otros temas y fuertes dificultades para argumentar por escrito.

Por medio de este estudio Balderas encontró también correlaciones entre tareas: 1) resolver bien los problemas no garantiza identificar la relación ni argumentar bien; 2) identificar el tipo de relación implica en cierto grado resolver bien los problemas pero no argumentar bien; 3) quien argumenta bien tiene tendencia a resolver e identificar bien.

Los maestros que participaron en el estudio consideraron que sus alumnos utilizarían los mismos procedimientos que ellos. Por otra parte atribuyeron las dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad principalmente a cuestiones de aprendizaje del alumno, y no a deficiencias en la enseñanza.

Otro estudio sobre la enseñanza de la proporcionalidad es el de Ramírez (2004). La autora centra su interés en recuperar formas de trabajo de un maestro de primaria al enfrentar la tarea de enseñar la proporcionalidad, así como en la intención de identificar algunos rasgos específicos de las prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir del análisis de la problemática del contenido a enseñar.

Como parte de los resultados de dicha investigación, se identificaron algunas dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad, las cuales se sitúan en dos planos: en el nivel del manejo del saber que fue objeto de enseñanza y en el conjunto de decisiones y acciones para propiciar el aprendizaje de dicho saber.

Una dificultad recurrente fue la articulación entre lo implícito y lo explícito. Según Ramírez, aun cuando el maestro se esforzó por manejar un discurso explícito, hubo ocasiones en los que sus acercamientos y los de los alumnos no se tocaron. El origen de estas dificultades se atribuye a una consideración insuficiente por parte del maestro, de la existencia y potencial de los conocimientos no formales de los alumnos. Se distinguen así dos tipos de dificultad: la de reconocer los procedimientos personales de los alumnos como conocimientos válidos y, disponer de los conocimientos asociados a una noción como parte de los saberes docentes.

Otra dificultad que identifica la autora, se refiere a la organización de los procesos de contextualización de las nociones con su contraparte, los de descontextualizacón y de generalización. A lo largo de las clases se observaron diferentes momentos en los que el profesor propició el trabajo con magnitudes concretas y otros momentos en los que buscó que los alumnos hicieran inferencias, o ejercicios puramente numéricos, regidos por reglas sintácticas. No se identificaron los criterios que regularon la ordenación de estos momentos, las transiciones fueron abruptas.

También se encontraron dificultades en la discriminación de los aspectos del conocimiento que corresponde desarrollar a los alumnos y los que le toca al maestro proporcionar. La dificultad para identificar el origen de los errores cometidos por los alumnos y para desarrollar estrategias eficaces para enfrentarlos, fue también identificada.

Se observaron además otras dificultades relacionadas, específicamente, con el contenido. Una fue que se hizo poco énfasis en el hecho de saber si una situación era o no de proporcionalidad, dejando de lado las características de este tipo de relaciones. Entre las causas que se atribuye a este hecho está la organización de los contenidos hecha por el profesor, así como las confusiones conceptuales que se tuvieron en el desarrollo de las clases y los vacíos en el currículum. Otra confusión fue ocasionada por la introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad. Se presentaron confusiones también en la noción de porcentaje, luego de que intentó estudiarse como una razón, como fracción y como fracción decimal sin que se lograra hacer converger las diversas representaciones en un mismo sentido. Una dificultad más fue la de la inserción de la regla de tres.

1.2.3. Estudios sobre la enseñanza de las matemáticas.

Existen otras investigaciones (Thompson, 1992; Ball, Hoover & Phelps, 2008; Hill, Ball & Shilling, 2008; Rivas & Godino, 2010; Robert, 2007) cuyo objeto de estudio es la enseñanza de las matemáticas en general. Estos estudios, aunque no se basan de manera específica en la proporcionalidad, nos han permitido comprender diferentes perspectivas desde las cuales se ha analizado la enseñanza de esta asignatura.

Algunos de estos trabajos se enfocan en investigar las concepciones y creencias que los profesores tienen sobre las matemáticas y su enseñanza. Este tipo de estudios procuran entender las relaciones que se generan entre las prácticas de enseñanza que realiza un profesor y sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, los objetivos de aprendizaje y la enseñanza misma.

En su estudio, Thompson (1992) argumenta que existe cierta coherencia entre lo que los profesores creen y la manera en que enseñan. Según el autor, las creencias, conceptos, opiniones y preferencias que los profesores tienen sobre la naturaleza de las matemáticas, constituyen una filosofía de esta disciplina.

En este sentido, Ernest (1988, citado en Thompson, 1992) distingue tres concepciones de las matemáticas. La primera se enfoca a la resolución de problemas, los cuales son un impulso a la continua expansión de la creación y la invención humanas. Esta concepción considera que las matemáticas no son un producto terminado, sino que siguen un proceso en el que los patrones que se generan dan lugar al conocimiento que permanece abierto a la revisión y la creación humanas. La segunda tiene un enfoque platónico, es decir, una visión de las matemáticas como un cuerpo unificado estático e inmutable del conocimiento, por lo que debe ser descubierto, no creado. La tercera es una concepción instrumentalista; en ella, las matemáticas son vistas como una "caja de herramientas", un conjunto de relaciones, factores y reglas para ser utilizadas por hábiles personas educadas para un fin externo.

No obstante Thompson (1992) advierte que la concepción individual de un maestro de matemáticas, puede incluir aspectos de más de una de las definidas por Ernest, incluso las que son aparentemente contradictorias. El autor también señala que las investigaciones han dado muestra de diferentes grados de coherencia entre las creencias de los profesores acerca de la naturaleza de las matemáticas y sus prácticas de enseñanza.

El autor, también considera las concepciones que los profesores poseen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que afirma que "es difícil concebir modelos de enseñanza sin una teoría subyacente de cómo los estudiantes aprenden matemáticas, incluso si la teoría es incompleta o implícita" (Thompson, 1992: 135). Señala que las concepciones de los maestros tienden a ser colecciones eclécticas de creencias y puntos de vista que parecen ser más el resultado de sus años de experiencia en el aula que de algún tipo de instrucción.

Bajo la consideración de que existe una diferencia entre lo que los profesores creen y lo que conocen, algunos estudios (Ball, Hoover & Phelps, 2008; Hill, Ball & Shilling, 2008; Rivas & Godino, 2010) se basan en el análisis de los conocimientos que los profesores poseen respecto a la disciplina, la enseñanza y el aprendizaje. Rivas & Godino (2010) argumentan que el conocimiento que los profesores tengan sobre el contenido es fundamental para el logro de ambientes de aprendizaje favorables en el aula.

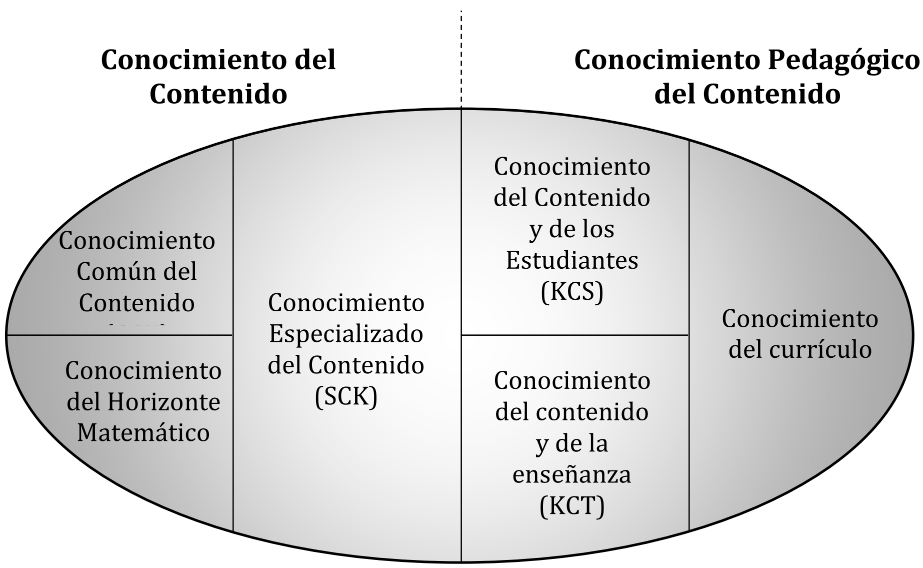
No obstante, también reconocen que dicho conocimiento puede ser insuficiente aludiendo a la importancia del conocimiento sobre la enseñanza que poseen los maestros. Al respecto, en la investigación se han generado diversos enfoques vinculados al estudio del conocimiento sobre la enseñanza. Shulman propuso siete categorías del conocimiento que hacen posible la enseñanza (ver tabla 1.3).

TABLA 1.3. CATEGORÍAS DE CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA[11]
• Conocimiento pedagógico general, con especial referencia a aquellos principios amplios y estrategias de gestión y organización en el aula que parecen trascender la materia. • El conocimiento de los estudiantes y sus características. • Conocimiento de los contextos educativos, que van desde el funcionamiento del grupo o el aula, la gobernanza y la financiación de los distritos escolares, a las características de las comunidades y las culturas. • Conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores, y sus bases filosóficas e históricas. • Conocimiento del contenido. • Conocimiento del currículo, con particular comprensión de los materiales y los programas que sirven como "herramientas de trabajo" para los profesores. • Conocimiento pedagógico del contenido, que es una amalgama especial de contenido y pedagogía que es únicamente dominio de los maestros, su forma propia y especial de comprensión profesional.

[11] Tomado de Shulman, 1987: 8, citado en Ball, Hoover & Phelps, 2008: 391

Según Ponte y Chapman (2006, citado en Rivas & Godino, 2010), el *Conocimiento Pedagógico del Contenido* es en el que se han centrado los esfuerzos de la investigación desde la perspectiva de los conocimientos del profesor. Al respecto, la propuesta de Hill, Ball & Shilling (2008) constituye una de las más recientes, en ella los autores se centran en el estudio del *Conocimiento Matemático para Enseñar* (MKT, por sus siglas en inglés), el cual dividen en seis categorías, tres de las cuales corresponden al conocimiento del contenido y las otras tres al conocimiento pedagógico del contenido (Ver figura 1.1).

FIGURA 1.1. MAPA DE DOMINIO DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA[12]



Otros autores sugieren analizar la enseñanza como un trabajo complejo por lo que toman en cuenta, para su estudio, las condiciones en las que se realiza. Robert (2007) propone el análisis de las prácticas de enseñanza desde una doble aproximación.

[12] Tomado de Hill, Ball & Shilling, 2008: 377 (Traducción propia del inglés al español)

Las autoras basan una primera aproximación en el análisis de la enseñanza a través de sus resultados, los cuales se hacen visibles por medio de la actividad de los alumnos y sus aprendizajes potenciales sobre el contenido matemático estudiado. La segunda aproximación estudia la enseñanza como parte del oficio docente; para ello considera las condiciones bajo las cuales se realiza y la manera en que éstas influyen en la actividad de los profesores y en el desarrollo de las clases.

1.2.4. Estudios sobre la enseñanza.

Otras investigaciones (Rockwell, 1995, 2011; Mercado & Luna, 2013; Ávila, 1996; Ávila et al., 2004; Block, Moscoso, Ramírez & Solares, 2007; Silas & Gómez, 2013), aunque no se centran específicamente en la enseñanza de las matemáticas, nos han permitido conocer distintas perspectivas para su análisis al considerar que el estudio de la enseñanza debe abordarse desde un enfoque más amplio que la contempla como parte del *trabajo*[13] que realizan los profesores y, de acuerdo con Rockwell (1995), como uno de los diversos elementos que conforman el proceso escolar, el cual constituye el contexto formativo en el que los alumnos se apropian de diversos conocimientos, valores y formas de vivir. Desde esta perspectiva, el aprendizaje no depende únicamente de la enseñanza y ésta, no es la única tarea del trabajo docente.

El trabajo de los profesores no está definido de manera universal se conforma dentro de las relaciones y las prácticas escolares bajo una tradición institucional particular. Así, las implicaciones del trabajo docente varían de escuela en escuela. Se encuentran variaciones incluso entre los estados, las generaciones de maestros, los sistemas, tipos o turnos de las escuelas (Rockwell, 1995).

No obstante, la manera en que los maestros se apropian del deber que les corresponde parece ser común. Según Rockwell (1995: 26-27), "es por medio de

[13] Nos referimos al *trabajo* de los profesores o *trabajo docente,* en el sentido que lo hace Rockwell (2011), quien define la actividad de los maestros como "trabajo" debido a que tiene propiedades particulares que no se ajustan a las condiciones del ejercicio de una profesión o del esquema mercantil de un proceso de producción clásico.

la organización de las prácticas escolares como se comunican las orientaciones y prioridades reales que definen el trabajo de los maestros en cada escuela". Más allá de la formación inicial, los profesores aprenden sobre la marcha, lo que se acostumbra hacer en cada institución que comúnmente:

> (…) rebasa la función de enseñanza sobre la cual se centra la formación normalista. El trabajo del maestro incluye otra serie de funciones que se relaciona con la organización de su grupo y la operación de la escuela. Los maestros manejan una gran cantidad de documentación; se encargan de la construcción, el mantenimiento y el aseo de la escuela; recogen cuotas, venden timbres, reparten desayunos o meriendas; se relacionan con padres y les dan consejos e información; participan en comisiones de cooperativa, economía, acción social, deportes y otros; preparan bailables, tablas y declamaciones para concursos entre escuelas. Además, cumplen con actividades que les asignan sin pago otras dependencias, como levantar censos, promover campañas, organizar las fiestas patrias, redactar solicitudes y documentos, organizar comités, integrar expedientes, presentarse en actos cívicos y políticos oficiales (Rockwell, 1995: 27)[14].

El trabajo de los maestros está sujeto además a los continuos cambios generados por la dinámica social, económica y política. De acuerdo con Rockwell (2011) entre las transformaciones que más lo han afectado en los últimos años se encuentra la fragmentación del tiempo, la digitalización del control burocrático y la intensificación del trabajo docente

En medio del quehacer cotidiano de los profesores, se encuentra la enseñanza, la cual se construye, de acuerdo con Mercado y Luna (2013: 22), en el día a día de la vida escolar, en contextos sociales complejos y variables que difícilmente pueden ser previstos por aquellos modelos que proponen una docencia ideal.

Las autoras describen cinco de los aspectos que constituyen la complejidad de la enseñanza. El primero se refiere a la participación de los alumnos en clase. Señalan

[14] Si bien estos datos corresponden a un estudio con docentes de primaria, consideramos que el trabajo de los profesores de telesecundaria se asemeja a lo descrito, debido a que al igual que en educación primaria, es un solo docente quien se hace cargo de cada grupo, de la enseñanza de todas las asignaturas y de otras tareas como las que se mencionan en el estudio de Rockwell (1995).

que a través de sus intervenciones, los estudiantes contribuyen a una construcción colectiva de la enseñanza, toda vez que los profesores retoman de estas aportaciones tanto los conocimientos previos de los niños como sus experiencias e intereses para orientar sus decisiones sobre el trabajo en el aula. El conocimiento que de esta manera logra sobre los estudiantes y la manera en que las incorpora, es fundamental para propiciar la participación de los alumnos y su interés por aprender.

El segundo aspecto corresponde a los múltiples acontecimientos que ocurren durante la enseñanza sobre los cuales los maestros deben ser capaces de discernir y tomar decisiones de tal forma, que pueda incorporarlos a la clase, o evitar que afecten el proceso que dirige. Entre esos acontecimientos se encuentran las manifestaciones de desinterés, entusiasmo, aceptación o confusión que los alumnos muestran ante lo que el maestro les propone. También están las situaciones que ocurren entre ellos, tales como conversaciones, juegos, discusiones o conflictos.

> Las acciones descritas ocurren también muy velozmente, de tal modo que la enseñanza exige un alto grado de atención y dedicación sostenida por parte del maestro. Debe hacerlo así para mantener el interés y la participación de todos los alumnos en la clase, así como su propia concentración en los contenidos y procedimientos con los que está trabajando (Mercado & Luna, 2013: 27).

El tercer aspecto es el del conocimiento sobre la enseñanza misma que los profesores construyen y utilizan sobre la marcha. Si bien la experiencia sola no es garantía para que los alumnos aprendan, también es posible distinguir prácticas de enseñanza exitosas que son logradas aún en condiciones frecuentemente difíciles de muchos salones de clase en México.

El cuarto aspecto se refiere a la demanda de abordar todos los contenidos curriculares en un tiempo determinado. Estos elementos (currículo y tiempo) son parámetros en la valoración del trabajo docente y para los maestros resultan un referente esencial para la planificación de las clases, aunque las autoras señalan que, de acuerdo a diversas investigaciones, más que en ellos, para preparar y desarrollar las actividades de enseñanza muchos profesores se centran en los alumnos y lo que conocen de ellos.

El quinto es la relación con los padres de familia y otros actores escolares (directivos, supervisores, otros maestros) cuyas expectativas y percepciones sobre la enseñanza ejercen cierta influencia en el trabajo de los profesores.

Mediante estos cinco aspectos las autoras muestran la complejidad de la enseñanza y la dificultad de realizarlo planamente, es decir, “de manera que tenga significación para los alumnos permitiéndoles construir aprendizajes duraderos” (Mercado & Luna, 2013: 33).

Hasta aquí, hemos descrito algunas perspectivas desde las cuales es posible analizar la enseñanza. Lo que prevalece en todas ellas es que ésta se considera como uno de los principales elementos del proceso educativo.

Entre las implicaciones que tiene el poner la enseñanza al centro de las explicaciones y las acciones sobre los resultados educativos se encuentra la planeación y el desarrollo de diversas estrategias encaminadas a apoyarla y a mejorarla las cuales se sustentan en las reformas educativas cuyos principios se traducen en propuestas didácticas que se concretan, comúnmente, en libros de texto y otros materiales educativos que tienen la finalidad de apoyar el trabajo de los profesores y optimizar los procesos de enseñanza. A continuación presentamos los resultados de algunos estudios que abordan el papel que los recursos didácticos tienen en las prácticas de enseñanza.

- **El papel de los recursos didácticos en las prácticas de enseñanza.**

De los recursos didácticos diseñados para el estudio en educación básica, los libros de texto cobran gran importancia como uno de los principales sustentos de las prácticas de enseñanza de los profesores (Ávila, 1996, 2004; Rockwell, 1995). De acuerdo con Rockwell (1995:31) “constituyen la presencia más objetiva del programa oficial dentro del salón de clase”.

Sin embargo, la forma en que las propuestas didácticas, se hacen efectivas en las escuelas, y más específicamente en las aulas, no puede ser tal como dictan los principios curriculares debido a que necesariamente pasan por diversos factores que influyen su puesta en práctica. Entre esos factores, destaca el trabajo docente, por ser los profesores quienes en última instancia, llevan a cabo en sus salones de clases y con sus alumnos, las actividades educativas que consideran pertinentes.

De acuerdo con Block, Moscoso, Ramírez & Solares (2007), la forma en que se realiza la propuesta curricular está relacionada con la manera en que el profesor se *apropia* de ella. La forma en que los maestros la comprenden, la interpreten y la lleven a cabo en sus salones de clase, es determinante en el éxito de la propuesta didáctica (Silas & Gómez, 2013).

> Los maestros, desde esta perspectiva, no se limitan a hacer uso de las propuestas pedagógicas tal como éstas son prescritas. Al hacer uso de éstas, los maestros las reelaboran, las reformulan, porque "las llenan con sus propias intenciones". Esta manera de ver la apropiación advierte sobre la diversidad de usos y significados que adquieren las propuestas al ser incorporadas por los maestros a sus prácticas cotidianas (Espinosa, 2004: 8, citado en Block, Moscoso, Ramírez & Solares, 2007: 734).

Si bien las propuestas didácticas brindan importantes aportaciones al trabajo de los profesores, éstas adquieren un efecto peculiar acorde a las decisiones que el maestro toma al enseñar un conocimiento, lo cual hace desde sus propias concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el contenido, el aprendizaje de los alumnos, el currículum, etc. (Block, Moscoso, Ramírez & Solares, 2007; Mercado & Luna, 2013). Así, las decisiones que los profesores toman para enseñar los contenidos matemáticos en sus clases, implican transformaciones de los materiales y recursos didácticos que utilizan para apoyar sus prácticas de enseñanza.

A partir de los estudios que hemos presentado sobre la enseñanza de la proporcionalidad en educación básica y sobre las características de las telesecundarias en México, es que formulamos el problema de investigación que se aborda en esta tesis.

1.3. Problematización.

El aprendizaje en matemáticas constituye una problemática toda vez que es el área que presenta los resultados más bajos en todo el sistema educativo, dato que se incrementa para la modalidad de telesecundaria (INEE, 2013). De entre los contenidos de matemáticas, nos enfocamos en el de la proporcionalidad por ser un tipo de conocimiento útil tanto en la vida cotidiana como en la escuela, que sin embargo, presenta deficiencias en su aprendizaje.

Esta situación deja a sus estudiantes en una clara desventaja en oportunidades dentro y fuera de la escuela, en la medida en que los alumnos no adquieren las competencias necesarias tanto para resolver problemas de la vida cotidiana, como para poder acceder a niveles superiores de conocimiento y avanzar en su escolaridad.

Consideramos que las características particulares en las que se desarrolla el trabajo de los docentes de telesecundaria, imprimen rasgos especiales a su labor. Particularmente tomamos en cuenta el hecho de que existen materiales, tales como libros de texto, programas televisivos y recursos tecnológicos diseñados especialmente para esta modalidad educativa y que han sido uno de los elementos determinantes en la constitución de las prácticas de enseñanza que se realizan en ella. Bajo estas consideraciones, nos interesa conocer cómo los profesores de telesecundaria transforman y adecúan los recursos didácticos a su disposición para sus clases específicas.

Como una aproximación al estudio de esta problemática, en esta tesis nos concentramos en las transformaciones y adecuaciones que una profesora de primer grado de telesecundaria hace de los problemas de proporcionalidad presentados en los libros de texto.

Con estas acotaciones, la pregunta de investigación que se aborda en esta investigación es:

- ¿Cómo una profesora de telesecundaria transforma y adapta los problemas de proporcionalidad presentados en los libros de texto para sus clases específicas?

1.4. Objetivos de la investigación.

Las investigaciones arriba mencionadas (Block, Moscoso, Ramírez & Solares, 2007; Silas & Gómez, 2013; Mercado & Luna, 2013), proporcionan evidencia de las adaptaciones que los profesores hacen a los contenidos de los libros de texto para presentarlos en clase. En esta investigación se busca comprender la manera en que los profesores adaptan y ponen en práctica en situaciones reales de enseñanza la propuesta didáctica de los libros de telesecundaria para la enseñanza proporcionalidad.

Siguiendo los planteamientos de las aproximaciones etnográficas (Rockwell, 1995, 2011; Mercado & Luna, 2013), buscamos comprender la forma en la que se enseña la proporcionalidad en telesecundaria, vista a partir de las prácticas de enseñanza de una maestra. Consideramos que estudiar las actividades de enseñanza de un profesor específico en un salón de clases específico, con restricciones y dinámicas particulares y en condiciones reales, nos permitirá profundizar en la comprensión de las adaptaciones y transformaciones que lleva a cabo.

La información obtenida puede ser de utilidad para la creación de materiales y propuestas didácticas diseñadas a partir de la consideración de las condiciones reales en que son llevadas a cabo las prácticas de enseñanza.

De esta manera, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general:

- Estudiar la manera en que una profesora de primer grado de telesecundaria transforma y adecúa los problemas de proporcionalidad presentados en los libros de texto para sus clases específicas.

Objetivos particulares:

- Analizar los problemas para la enseñanza de la proporcionalidad, que son propuestos en los libros de texto de primer grado de telesecundaria.
- Identificar y analizar las transformaciones de los problemas de proporcionalidad que realiza la profesora para gestionar sus clases.
- Identificar y analizar las acciones que la profesora lleva a cabo para favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

CAPÍTULO II.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS: LA DOBLE APROXIMACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Concebimos el trabajo docente como algo sumamente complejo, debido a las múltiples actividades que el profesor realiza dentro y fuera del aula. Entre estas, la enseñanza es probablemente la principal de sus responsabilidades[15], debido a que en ella confluyen los propósitos educativos de lo que el alumno debe aprender en la escuela y las acciones que para lograrlo se llevan a cabo.

Desde esta perspectiva, las actividades que los profesores organizan para el estudio de los contenidos matemáticos y la manera en que las gestionan en clase, así como las adecuaciones que hacen de las propuestas didácticas presentadas en los libros de texto, tiene una importante relación con lo que los alumnos pueden aprender sobre un tema determinado (Rockwell, 1995). Para dar respuesta a la pregunta que nos hemos planteado al respecto, trabajamos en el estudio de un caso; mediante el cual, analizamos las prácticas para la enseñanza de la proporcionalidad, realizadas por una profesora con un grupo de primer grado en una telesecundaria rural del Estado de México.

Sustentamos el presente estudio en la perspectiva teórica de la *doble aproximación*, definida por Robert (2007). La primera aproximación estudia las prácticas de enseñanza y su impacto en los aprendizajes que se desea favorecer mediante las actividades realizadas en clase, la segunda revisa las condiciones bajo las cuales los profesores realizan su trabajo.

[15] Considerando, de acuerdo con Rockwell (1995), que la enseñanza no es la única tarea del trabajo docente.

Nuestra investigación está apoyada en gran medida en la primera aproximación, dado que permite realizar un estudio amplio del proceso de enseñanza a través de las actividades que son propuestas y realizadas en clase para el estudio de un contenido en particular: la proporcionalidad en este caso.

A continuación describimos los elementos teóricos de la doble aproximación.

2.1. Las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen.

Las prácticas de enseñanza son analizadas desde la doble aproximación a través de las interacciones que se generan en clase a partir de las acciones del profesor. El objetivo de estudiar de esta manera el trabajo de los maestros, es el de caracterizar el impacto que las actividades de enseñanza tienen sobre los aprendizajes que se pretende favorecer[16] mediante el estudio de un contenido matemático.

Para el estudio de las prácticas de enseñanza consideramos el seguimiento de actividades realizadas en clase en dos tiempos: el primero comprende un análisis *a priori* de las tareas que son propuestas para el estudio del contenido y el segundo es un análisis *a posteriori* del desarrollo de la sesión (Robert, 2007).

En los siguientes apartados describimos los elementos teóricos para el análisis de la enseñanza a partir de los dos tiempos antes mencionados.

[16] Robert (2007) llama a esto aprendizajes potenciales.

2.1.1. Elementos teóricos para el análisis *a priori* de los problemas propuestos[17].

El análisis *a priori* de las tareas que son propuestas a los alumnos, para el estudio de un contenido matemático, se realiza a partir de la caracterización de los problemas y las actividades que son diseñadas para tal fin. Dicha caracterización considera la forma en que el planteamiento de la tarea puede movilizar los conocimientos previos y nuevos[18] de los estudiantes, así como la manera en que promueve el uso de las nociones matemáticas necesarias para la resolución.

Robert (2007) llama *adaptaciones* al tipo de conocimiento que moviliza una persona para la resolución de un problema determinado. La autora reconoce también la existencia de tareas simples y aisladas (TSI) que no demandan la movilización de conocimientos debido a que consisten sólo en la aplicación inmediata de una propiedad recién estudiada.

Las adaptaciones son clasificadas por Robert (2007) en seis categorías codificadas de A1 a A6 y las describe mediante los hallazgos obtenidos de un estudio hecho en clases de geometría en las cuales se estudió el teorema de Tales[19]. A continuación presentamos las características de cada tipo de adaptación con apoyo en los ejemplos proporcionados por la autora los cuales se basan en el planteamiento del siguiente problema:

> EFG es un triángulo tal que EF=5, EG=7, FG=9 (la unidad es el centímetro). Se toma un punto M sobre el segmento EF, se nombra EM=X. Un punto N es sobre el segmento EG tal que las rectas (MN) y (FG) son paralelas.
>
> 1. Expresar EN y MN en función de X.
> 2. Calcular X para que el perímetro del trapecio MNGF sea igual a 19.8 (Robert, 2007: 87[20])

[17] El análisis *a priori* es en el sentido propio de la doble aproximación y no en el sentido de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2000).

[18] Consideramos los conocimientos previos como aquellos que los alumnos ya han adquirido y son capaces de utilizar para resolver problemas o para relacionar distintas nociones matemáticas. Los conocimientos nuevos son, para nosotros, aquellos que se pretende sean adquiridos por los estudiantes a partir de la resolución de la tarea propuesta.

[19] En su estudio Robert analiza las adaptaciones hechas por estudiantes de tercer grado del segundo ciclo educativo en Francia, es decir, alumnos de entre catorce y quince años de edad.

[20] Traducción propia del francés al español.

- ***Adaptaciones A1.***

Consiste en el reconocimiento del modo en que pueden aplicarse diferentes nociones, propiedades, fórmulas, métodos, teoremas, etc., para la resolución del problema que se enfrenta. Por ejemplo, en relación al problema presentado arriba, reconocer las configuraciones donde se utiliza el teorema de Tales lo cual puede incluir el reconocimiento de variables, notaciones, fórmulas o condiciones de aplicación.

- ***Adaptaciones A2.***

Es la introducción de objetos matemáticos que fungen como intermediarios favoreciendo el análisis o la resolución del problema. Por ejemplo, a partir del problema anterior, introducir una paralela o designar un punto que hagan factible el uso del teorema de Tales.

- ***Adaptaciones A3.***

Es la mezcla y vinculación de diferentes marcos conceptuales provenientes de distintas áreas del conocimiento matemático. Por ejemplo, respecto al problema anterior, utilizar el cálculo algebraico para obtener un resultado.

- ***Adaptaciones A4.***

Se trata de la introducción de etapas para la organización del razonamiento o los cálculos, los cuales pueden ser convencionales o no. Por ejemplo, en geometría, utilizar varias veces el teorema de Tales y su recíproco, de manera no independiente.

- ***Adaptaciones A5.***

Utilización de los métodos que preceden al planteamiento del problema.

- ***Adaptaciones A6.***

Elección de utilizar o no un método acordado previo al planteamiento del problema.

Para nosotros, las adaptaciones que se siguen mediante el análisis *a priori* de los problemas propuestos son aquellas movilizaciones del conocimiento que los alumnos podrían realizar a partir del planteamiento del problema, sus condiciones y sus características.

2.1.2. Elementos teóricos para el análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase.

El análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase comprende los diversos factores que influyen en las actividades que se realizan en clase y que, por lo tanto, influyen en la construcción de los conocimientos. Así, se toma en cuenta la organización del grupo, las intervenciones de los alumnos y del profesor y sus interacciones, los conflictos, las validaciones, las explicaciones y las formalizaciones hechas sobre el contenido y los procedimientos de solución (Robert, 2007).

De manera particular, Robert (2007) identifica en la forma de trabajo bajo la cual se desarrolla la clase, las *ayudas* que el maestro aporta a los alumnos. Estas ayudas o recapitulaciones son aquellas intervenciones del profesor cuya finalidad es simplificar los problemas o favorecer su comprensión.

En su estudio, la autora analiza las intervenciones que el profesor hace durante la clase en la que se resolvió el problema sobre el teorema de Tales que presentamos en el apartado anterior. Retomamos aquí algunos de sus hallazgos para ejemplificar los dos tipos de ayuda que ella propone:

- ***Ayudas tipo 1.***

Son aquellas que modifican las tareas prescritas en relación a lo que se demanda originalmente. Corresponden a las indicaciones que el profesor da, antes y durante el trabajo de los alumnos, mediante las cuales simplifica la tarea, la divide o introduce algún método para su tratamiento.

Por ejemplo, luego de haber planteado a sus alumnos el problema sobre el teorema de Tales, el profesor pide hacer la figura que representa la situación. Dirige después una reflexión sobre la ubicación de los puntos M y N y el significado de X a partir de la cual organiza la búsqueda individual de una estrategia de solución. Interroga entonces a un alumno sobre la forma en que resolvió el problema, el maestro retoma lo dicho por el estudiante, lo complementa o lo delimita hasta obtener una pregunta de la que obtiene la respuesta correcta. Se observa que, con sus intervenciones, el profesor contribuye a simplificar el problema, es decir, proporciona una ayuda del tipo 1.

- ***Ayudas tipo 2*.**

Contribuyen a la modificación de las construcciones hechas por los alumnos, sobre el conocimiento puesto en juego. Conciernen a las recapitulaciones o recordatorios que el profesor hace y que permiten a los alumnos tomar distancia de lo que han hecho hasta el momento.

Siguiendo el ejemplo del problema de Tales, una vez que se resolvió el problema, el profesor dio a sus alumnos algunas orientaciones sobre como redactar la justificación de sus respuestas a partir de este teorema. Con estas intervenciones, el profesor recapituló lo realizado durante la resolución del problema, es decir, proporcionó una ayuda del tipo 2.

Para el análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase, nos fijamos en las *ayudas* que el profesor proporciona para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Estas *ayudas* son construidas por el profesor en el desarrollo mismo de la clase, a partir de las intervenciones y dificultades que tienen sus alumnos, y de las necesidades de explicaciones, formalizaciones y discusiones del contenido y los procedimientos de solución. De manera particular, en esta tesis nos interesa estudiar la manera en que dichas ayudas contribuyen a modificar los problemas y los conocimientos que los alumnos tienen que movilizar para resolverlos (en palabras de Robert, las adaptaciones de los estudiantes).

2.1.3. Elementos teóricos para el estudio del contenido matemático enseñado: la proporcionalidad

El análisis *a priori* de los problemas propuestos así como el análisis *a posteriori* de la forma en que dichos problemas son resueltos en el desarrollo de las clases, implican un estudio minucioso de las nociones matemáticas presentes tanto en el planteamiento inicial, como en cada momento de la sesión. Para ello, hicimos uso de los elementos teóricos sobre la proporcionalidad expuestos por Block, Mendoza & Ramírez (2010).

A continuación presentamos las nociones de proporcionalidad que nos permitieron analizar la enseñanza de este contenido matemático y que han sido de suma importancia para el análisis de los problemas así como para la identificación del tipo de adaptaciones del conocimiento hechas por los estudiantes y de las ayudas introducidas por la profesora durante el desarrollo de las clases.

2.1.3.1. La proporcionalidad

La proporcionalidad es una relación que se establece entre dos conjuntos de cantidades, y que cumple con algunas propiedades distintivas. Entre ellas, probablemente las más significativas son: la igualdad de los *factores internos* correspondientes y la existencia de un *factor externo constante*.

- ***Los factores internos.***

Los factores internos son los números que resultan de una razón interna[21]. Es decir, es el resultado de la relación entre dos cantidades de un mismo conjunto. En una relación de proporcionalidad, se cumple que los factores internos que se corresponden entre ambos conjuntos de cantidades, son iguales.

[21] Existe una diferencia entre factores y razones, según Block, Mendoza & Ramírez (2010: 27), "La diferencia es sutil: con el término *razón* se destaca la relación que guarda una cantidad respecto a otra. La razón entre 1 y 4 es la misma que entre 2 y 8. El *factor* en cambio, es un solo número que resulta de una relación, por ejemplo, el factor que transforma 1 en 4 y 2 en 8 es x4"

Por ejemplo, en la relación de proporcionalidad entre la cantidad de piezas de pan compradas, y su costo; el factor interno (x3) formado por la razón 6:2 panes, es igual al factor interno (x3) formado por la razón de sus precios correspondientes: 15:5 pesos (ver figura 2.1).

FIGURA 2.1. IGUALDAD DE LOS FACTORES INTERNOS CORRESPONDIENTES EN UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD.

	Piezas de pan	Costo ($)	
x3	2	5	x3
	6	15	

Los factores internos no tienen dimensión debido a que relacionan dos cantidades de la misma naturaleza, medidas con un mismo tipo de unidades, toda vez que se trata de cantidades de un mismo conjunto. De acuerdo con Block, Mendoza & Ramírez (2010), los factores internos son números de veces, por lo que también son llamados factores escalares.

Resulta así, que al multiplicar el factor interno correspondiente, por la primera cantidad, da como resultado la segunda. Estas propiedades son de utilidad para la resolución de problemas que involucran cantidades relacionadas en forma proporcional.

Debido a que los factores internos son el resultado de la razón entre dos cantidades, en una relación de proporcionalidad, es posible encontrar tantos, como relaciones puedan establecerse entre pares de cantidades (ver ejemplo en la figura 2.2).

FIGURA 2.2. DIFERENTES FACTORES INTERNOS EN UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD.

Conjunto A	Conjunto B
2	3
4	6
6	9

x3 x2 x1.5 x2 x1.5 x3

- ***Factor externo constante.***

En una relación de proporcionalidad, el factor externo constante es un número que resulta de una razón externa. Es decir, el resultado de la relación entre dos cantidades de diferentes conjuntos.

Su calificativo de constante, se debe a que aunque es posible formar varias razones externas entre los dos conjuntos, todas resultan ser equivalentes, por lo que en una relación de proporcionalidad existe sólo un factor externo.

Por ejemplo (ver figura 2.3), en la relación de proporcionalidad entre la cantidad de litros de agua y la cantidad de vasos que es posible llenar con ella, las razones entre ambos conjuntos de cantidades (5:1, 10:2, 15:3) son equivalentes, por lo que hay un solo factor externo (x5).

Como se puede ver en el ejemplo, al multiplicar las cantidades del primer conjunto por el factor externo, se obtienen las cantidades del segundo conjunto, por lo que esta propiedad es de utilidad en la resolución de problemas de proporcionalidad.

FIGURA 2.3. FACTOR EXTERNO CONSTANTE EN UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD.

Cantidad de agua (l)	Número de vasos
1	5
2	10
3	15

x5

Razones externas equivalentes:

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = 5$$

Debido a que el factor externo es producto de la relación entre dos cantidades pertenecientes a diferentes conjuntos, puede tratarse de un número con dimensión o sin dimensión. El primer caso ocurre cuando las cantidades son de distinta naturaleza o que aun teniendo la misma naturaleza, estén expresadas en diferentes unidades de medida, con lo que se tiene un factor de conversión (Block, Mendoza & Ramírez, 2010).

Por ejemplo (ver figura 2.4), en la relación de proporcionalidad entre la cantidad de gasolina, en litros, que gasta un automóvil y los kilómetros que con ella puede recorrer; se tienen dos magnitudes de distinta naturaleza: una de capacidad (litros de gasolina) y otra de longitud (kilómetros que recorre), por lo que resulta un factor externo constante con dimensión: 13.5 km/l.

FIGURA 2.4. FACTOR EXTERNO CONSTANTE CON DIMENSIÓN.

Cantidad de gasolina (l)	Kilómetros que recorre
2	27
3	40.5
6	81

x 13.5 km/l

Otro ejemplo (ver figura 2.5) está dado por la relación de proporcionalidad que existe entre la cantidad de kilogramos y su equivalente en libras, cuyo factor externo constante, es un factor de conversión. Se trata de un número con dimensión (2.205 lb/kg), puesto que aun cuando los dos conjuntos de cantidades pertenecen a la misma magnitud (masa), están representados con unidades de medida diferentes (kilogramos y libras, respectivamente).

FIGURA 2.5. FACTOR EXTERNO CONSTANTE CON DIMENSIÓN (FACTOR DE CONVERSIÓN).

Kilogramos (kg)	Libras (lb)
3	6.615
4	8.82
5	11.025

2.205 lb/kg

El factor externo es un número sin dimensión cuando las cantidades son de la misma naturaleza y están expresadas en unidades de medición iguales, dando como resultado un factor escalar (Block, Mendoza & Ramírez, 2010).

Por ejemplo (ver figura 2.6), en la relación de proporcionalidad entre las medidas de una figura y las de su reproducción a escala, el factor es un número sin dimensión puesto que las medidas de ambas figuras pertenecen a la misma magnitud (longitud) y están expresadas en las mismas unidades de medida (centímetros). El factor es escalar y representa un número de veces.

FIGURA 2.6. FACTOR EXTERNO CONSTANTE SIN DIMENSIÓN (FACTOR ESCALAR).

Medidas de la figura original (cm)	Medidas de la reproducción (cm)
4	12
2	6
5	15

x3

La existencia de un factor externo constante y la igualdad de los factores internos correspondientes son propiedades suficientes y necesarias para caracterizar una relación de proporcionalidad por lo que a partir de ellas es posible definirla. Block, Mendoza & Ramírez (2010) proponen las siguientes definiciones de proporcionalidad:

> **Definición 1.** Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales.
>
> **Definición 2.** Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante (Block, Mendoza & Ramírez, 2010: 27).

Cabe mencionar que las razones que dan origen a los factores, son razones geométricas, es decir, de tipo multiplicativo. Por lo que expresan cuántas veces una cantidad es la otra (su cociente). Las relaciones de proporcionalidad no obedecen a razones aritméticas o de tipo aditivo, las cuales expresan la diferencia entre dos cantidades (Block, Mendoza & Ramírez, 2010).

Por ejemplo (ver figura 2.7), la relación entre el número de paletas compradas y su costo, es una relación de proporcionalidad en la que el triple de paletas, cuestan el triple de dinero (razón geométrica). En cambio, la relación entre la edad de Ana y Juan, no es una relación de proporcionalidad, pues al paso de cinco años (razón aditiva), la edad de Ana aumenta al doble, pero la edad de Juan no se duplica.

FIGURA 2.7. DIFERENCIA DE RELACIONES DADAS POR RAZONES GEOMÉTRICAS Y RAZONES ARITMÉTICAS.

Relación proporcional (razones geométricas)

	Número de paletas	Costo ($)	
x3	4	2	x3
	12	6	

Relación no proporcional (razones aritméticas)

	Edad de Ana	Edad de Juan	
+5	5	3	+5
	10	8	

La proporcionalidad cuenta con otras propiedades que aunque no son suficientes y necesarias, son útiles para su caracterización y en la resolución de problemas que implican este tipo de relación entre cantidades, a continuación mencionamos algunas de ellas:

- ***El valor unitario***

El valor unitario, es la cantidad de uno de los conjuntos, que corresponde a la unidad en el otro conjunto. Es así, que en toda relación entre dos conjuntos, hay dos valores unitarios (Block, Mendoza & Ramírez, 2010). Por ejemplo, en la relación de proporcionalidad entre la cantidad de azúcar (en kilogramos) y su costo (en pesos), un valor unitario está dado por el costo de un kilogramo de azúcar. Otro valor unitario corresponde a la cantidad de azúcar cuyo costo es de un peso (ver figura 2.8).

FIGURA 2.8. VALORES UNITARIOS EN UNA RELACIÓN ENTRE CANTIDADES.

Valor unitario del costo:
0.1 kilogramos

Azúcar (kg)	Costo ($)
1	10
3	45
0.1	1
0.5	5

Valor unitario del azúcar:
10 pesos

En una relación de proporcionalidad, el valor unitario es igual al valor del factor externo constante. La diferencia entre ambos, de acuerdo con Block, Mendoza & Ramírez (2010), radica en que el valor unitario es, en sí, una relación (1:x); mientras que el factor externo constante es un número, resultado de una razón y funge como un multiplicador.

Por ejemplo (ver figura 2.9), en la relación de proporcionalidad entre la distancia recorrida por un automóvil y el tiempo transcurrido, el factor externo constante es x80 km/h. El valor unitario que corresponde al tiempo es 80 kilómetros, lo cual quiere decir que por cada 1 hora transcurrida, el automóvil recorre 80 kilómetros (1:80).

FIGURA 2.9. FACTOR EXTERNO CONSTANTE Y VALOR UNITARIO DE UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD.

Recorrido de un automóvil	
Tiempo (h)	Distancia (km)
1	80
2	160
3	240

Valor unitario del tiempo: 80 km

x80 km/h
Factor externo constante

- ***Propiedad aditiva.***

En una relación de proporcionalidad, la suma de dos cantidades pertenecientes al mismo conjunto está relacionada con la suma de las cantidades que les corresponden en el otro conjunto.

Por ejemplo (ver figura 2.10), en la relación de proporcionalidad entre la cantidad de pintura (en litros) y su precio (en pesos), la suma (4 litros) de uno más tres litros de pintura, corresponde a la suma (180 pesos) de cuarenta y cinco más ciento treinta y cinco pesos los cuales son los precios de uno y tres litros, respectivamente.

FIGURA 2.10. PROPIEDAD ADITIVA EN UNA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

Pintura (l)	Precio ($)
1	45
3	135
4	180

1 + 3 = 4

45 + 135 = 180

2.1.3.2. Tipos de problemas de proporcionalidad.

Los problemas de proporcionalidad son aquellos que involucran cantidades que se relacionan de forma proporcional. De acuerdo a las características de la situación en la que se presentan, los datos que se proporcionan y lo que se solicita hacer, Block, Mendoza & Ramírez (2010) proponen una clasificación de seis tipos de problemas: de *valor faltante*, de *comparación de razones*, de *composición de relaciones*, de *proporcionalidad múltiple*, de *reparto proporcional* y de *determinación de la existencia de proporcionalidad entre dos cantidades*. Nosotros añadimos el problema de *mezclas*, debido a que consideramos que no puede caracterizarse con los que han sido definidos por los autores.

A continuación describimos las características de los problemas de valor faltante y de los problemas de mezclas los cuales identificamos en la *Secuencia 6. Proporcionalidad*, que estudiamos en esta tesis.

- ***Problemas típicos de valor faltante.***

En los problemas típicos de valor faltante, se solicita hallar una cantidad desconocida dentro de una relación de proporcionalidad. Dicha cantidad pertenece a uno de los dos conjuntos relacionados. En el enunciado del problema, se dan a conocer tres de los valores involucrados en la relación, a partir de ellos es posible calcular el valor faltante. Block, Mendoza & Ramírez (2010: 41) esquematizan este tipo de problemas con la tabla de la figura 2.11.

FIGURA 2.11. ESQUEMA GENERAL DEL PROBLEMA TÍPICO DE VALOR FALTANTE.

Magnitud 1	Magnitud 2
a	b
c	?

Cabe señalar que la incógnita puede ocupar cualquier lugar de la relación entre las cantidades, lo que da pie a la formulación de diferentes problemas. Por ejemplo (ver figura 2.12), en la relación de proporcionalidad entre cantidad de lápices y su costo, pueden formularse diferentes problemas, dependiendo tanto de la redacción del enunciado, como del lugar que ocupa la incógnita en la relación que se establece entre los dos conjuntos de cantidades.

FIGURA 2.12. EJEMPLOS DE DISTINTOS PROBLEMAS DE VALOR FALTANTE.

Problema 1. El precio de dos lápices es de seis pesos, ¿cuánto se habrá de pagar si se quieren comprar siete lápices?

Número de lápices	Costo ($)
2	6
7	?

Problema 2. Si con seis pesos se pueden comprar dos lápices, ¿cuántos lápices pueden comprarse con veintiún pesos?

Número de lápices	Costo ($)
2	6
?	21

Problema 3. El costo de siete lápices es de veintiún pesos, ¿cuál será el precio de dos lápices?

Número de lápices	Costo ($)
2	?
7	21

Problema 4. Si se pagan veintiún pesos por siete lápices, ¿cuántos lápices se pueden comprar con seis pesos?

Número de lápices	Costo ($)
?	6
7	21

- ***Problemas de mezclas***

Los problemas de mezclas demandan encontrar el resultado de la unión de dos cantidades involucradas, cada una, en una relación de proporcionalidad diferente.

Por lo general, las cantidades que hay que unir son valores desconocidos que deben calcularse para poder realizar la mezcla (ver figura 2.13).

FIGURA 2.13. EJEMPLO DE UN PROBLEMA DE MEZCLAS[22]

Problema: Para obtener medio litro de pintura verde claro, es necesario mezclar trescientos cincuenta mililitros de pintura amarilla y ciento cincuenta mililitros de pintura azul. ¿Cuál es el costo de esa cantidad de pintura verde claro, si se sabe que un litro de pintura amarilla cuesta setecientos pesos y un litro de pintura azul cuesta trescientos pesos?

Pintura amarilla (ml)	Costo ($)
1000	700
350	

Pintura azul (ml)	Costo ($)
1000	300
150	

Pintura verde claro (ml)	Costo ($)
500	

2.1.3.3. Variables didácticas.

Las variables didácticas son las características de un problema que al ser modificadas tienen un efecto cualitativo importante sobre los procedimientos que se utilizan para abordarlo (Brousseau, 1981: 68; citado en Block, Mendoza & Ramírez, 2010).

Hacer variar las características de los elementos de un problema puede hacerlos más fáciles o más difíciles para los alumnos. Asimismo pueden inducir al uso de algún procedimiento de solución en particular. A continuación se presentan algunas de las variables didácticas de los problemas de proporcionalidad:

[22] Tomado de SEP, 2006a: 74-75.

- ***Los factores internos***

Los factores internos que subyacen en una relación de proporcionalidad, pueden ser números enteros o no enteros, también pueden ser relativamente grandes o pequeños. Cuando se trata de números enteros y pequeños, por ejemplo 2, 3 o 10, son más fáciles de calcular o identificar lo que hace más factible su uso en la resolución de problemas.

- ***El factor externo constante***

Al igual que los factores internos, el hecho de que el factor externo constante sea un número entero y pequeño, hace más probable su uso en la resolución de problemas. El hecho de que se trate de un factor escalar, también hace más factible su uso.

- ***El valor unitario***

El valor unitario puede estar dado en el problema o ser un dato desconocido, ser un número entero o no, tener sentido en el contexto del problema o carecer de él. Su uso en la resolución de problemas se hace más factible cuando es un dato dado en el enunciado, cuando es un número entero y cuando posee sentido dentro del contexto.

- ***El contexto***

El contexto en el que se plantea la problemática puede ser familiar o ajena para los alumnos, lo cual facilita o dificulta su resolución. Un contexto en el que se inscriben problemas que son comunes en situaciones cotidianas, puede evocar el uso de procedimientos de solución que estén relacionados con los conocimientos previos de los alumnos.

2.1.3.4. Procedimientos de solución.

Existen diferentes formas de afrontar un problema de proporcionalidad. Consideramos que el procedimiento que se elija está determinado, por una parte, por las variables didácticas que lo componen. Reconocemos sin embargo, que hay otros factores que influyen en la elección del método, tales como los conocimientos previos del alumno o el contrato didáctico (Brousseau, 2000) que se genera durante el estudio de un contenido matemático en particular.

Presentamos a continuación algunos de los procedimientos descriptos por Block, Mendoza & Ramírez (2010) para la resolución de problemas de proporcionalidad.

- ***Procedimientos sobre la marcha.***

Los procedimientos basados en el uso de factores internos y en la propiedad aditiva son denominados procedimientos sobre la marcha debido a que, con frecuencia, no se anticipa por cuánto se sumará o se multiplicará. Hart (1988, citado en Block, Mendoza & Ramírez, 2010) encontró que estos procedimientos aun cuando son limitados, son muy intuitivos y son utilizados regularmente por los estudiantes.

Este tipo de procedimiento es factible en la solución de problemas de valor faltante y otros en los que se demanda encontrar una cantidad desconocida, tales como los problemas de proporcionalidad múltiple, de reparto proporcional o de mezclas. En problemas de comparación de razones o que implican determinar la existencia de proporcionalidad entre dos magnitudes, este procedimiento consiste en identificar los factores internos y verificar su relación.

En los siguientes dos apartados se detalla el uso de los factores internos y de la propiedad aditiva.

- ***El uso de factores internos***

El uso de factores internos para la resolución de problemas de proporcionalidad se basa en mantener la igualdad entre las razones internas correspondientes. Consiste en identificar el factor interno subyacente en la relación de dos cantidades y multiplicarlo (o dividirlo) por la cantidad conocida de la otra relación para encontrar el valor desconocido.

Por ejemplo (ver figura 2.14), en la relación de proporcionalidad entre el número de dulces comprados y su costo (en pesos), se identifica el factor interno (x4) entre dos cantidades de dulces dadas (4 y 16). Luego, se multiplica de cuatro dulces ($5) por el mismo factor interno (x4), para obtener el precio de dieciséis dulces.

FIGURA 2.14. USO DE FACTORES INTERNOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD.

	Número de paletas	Costo ($)	
Factor interno: x4	4	5	x4
	16	?	

- ***Uso de la propiedad aditiva***

El uso de la propiedad aditiva consiste en identificar, de entre las cantidades que conforman los conjuntos relacionados, aquellos que sumados den el valor correspondiente con el dato desconocido. Al sumar dichas cantidades, se obtendrá el valor faltante.

Por ejemplo (ver figura 2.15), en la relación de proporcionalidad entre el tiempo de trabajo (en horas) y el salario (en pesos), al sumar siete más once horas, se obtienen dieciocho horas laboradas. El salario que corresponde a siete y once horas de trabajo son quinientos sesenta y ochocientos ochenta pesos, respectivamente. Al sumar estas dos cantidades se obtiene el salario para dieciocho horas trabajadas.

FIGURA 2.15. USO DE LA PROPIEDAD ADITIVA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

	Tiempo trabajado (h)	Salario ($)	
7 + 11	7	560	560 + 880
	11	880	
= 18	18	?	= 1440

- ***El uso del factor externo constante***

El uso del factor externo constante consiste en identificar la relación que guardan los conjuntos de cantidades relacionados proporcionalmente. Una vez encontrado el factor externo puede utilizarse para multiplicar o dividir los valores de un conjunto para encontrar los del otro.

Por ejemplo (ver figura 2.16), en la relación de proporcionalidad entre el número de porciones de un postre que se quiere preparar y la cantidad de fresas que se requiere, se identifica el factor externo constante (x8) y luego se multiplica por el número de porciones que se desea preparar, para obtener la cantidad de fresas necesarias.

FIGURA 2.16. USO DEL FACTOR EXTERNO CONSTANTE PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD.

Factor externo = 8

Número de porciones	Número de Fresas
3	24
5	?

x8

Este método es útil para resolver problemas que implican el cálculo de valores faltantes como el problema típico de valor faltante, el de proporcionalidad múltiple, el de reparto proporcional y el de mezclas. La identificación y uso del factor externo constante sirve también en problemas de composición de relaciones, de comparación de razones y los que implican determinar existencia de proporcionalidad.

- **El *uso de la regla de tres***

El procedimiento de la regla de tres se basa en la propiedad que implica que en una igualdad de razones, los productos cruzados son iguales. A partir de esto se establece la igualdad entre dos razones extraídas de la relación de proporcionalidad, una de las cuales contiene el valor desconocido, motivo del problema. Encontrar dicho valor implica plantearlo como la incógnita de una ecuación y resolverla.

Por ejemplo (ver figura 2.17), en la relación de proporcionalidad entre el número de vueltas que da un engrane y el tiempo (en minutos) en que lo hace, se establece la igualdad entre la razón del tiempo (5:3) y la razón del número de vueltas (x:24). Aplicando la propiedad de los productos cruzados se obtiene una ecuación ($3x$=5(24)), cuyo resultado es el valor faltante en la relación.

FIGURA 2.17. USO DE LA REGLA DE TRES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Tiempo (min)	Número de vueltas
3	24
5	?

Planteamiento de la regla de tres:

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{24}$$

Planteamiento de la ecuación:

$$3x = 5(24)$$

No obstante, es común que el planteamiento de la regla de tres obedezca sólo a una forma acostumbrada de acomodar las cantidades y que su resolución se base en una serie de operaciones predeterminadas: multiplicar los valores conocidos que se encuentran cruzados en la igualdad y dividir el resultado entre el valor que queda opuesto a la incógnita. El procedimiento tal cual no considera la propiedad de la igualdad de los productos cruzados.

En nuestro ejemplo, el acomodo corresponde a colocar en una razón las cantidades dadas del conjunto “tiempo” e igualarla a la razón formada por las cantidades del conjunto “número de vueltas”. Luego, multiplicar los dos valores conocidos que quedan opuestos en la expresión escrita (5 x 24), y dividir el resultado entre la cantidad que quedó opuesta al valor faltante (120÷3) (ver figura 2.18).

FIGURA 2.18. USO DE LA REGLA DE TRES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Tiempo (min)	Número de vueltas
3	24
5	?

Planteamiento de la regla de tres:

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{24}$$

Resolución de la regla de tres:

$$x = \frac{5 \times 24}{3}$$

Este procedimiento es útil en los problemas que consisten en encontrar una cantidad desconocida, como el problema típico de valor faltante, el de proporcionalidad múltiple, el de reparto proporcional o el de mezclas. Aunque también puede usarse en los problemas de comparación de razones y en los que implican determinar la existencia de proporcionalidad en una relación, esto si se tiene en cuenta la propiedad de los productos cruzados.

- ***Uso del valor unitario***

El uso del valor unitario, consiste en calcular el valor de una magnitud, que corresponde a la unidad en la otra magnitud. O bien, si ya está dado entre los datos del problema, hacer uso de él multiplicando o dividiendo por la cantidad conocida que corresponde al valor desconocido, para calcular este último.

Por ejemplo (ver figura 2.19), en la relación de proporcionalidad entre el número de galletas que contiene cada paquete, se identifica el valor unitario para la cantidad de paquetes (8 galletas) y se multiplica por la el número de paquetes (3) cuya cantidad de galletas se desea conocer.

Este procedimiento es útil en problemas de valor faltante, de proporcionalidad múltiple, de reparto proporcional y de mezclas.

FIGURA 2.19. USO DEL VALOR UNITARIO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Número de paquetes	Número de galletas
1	8
3	?

x8

Valor unitario de la cantidad de paquetes: 8 galletas

2.2. El impacto de las condiciones del oficio docente en la enseñanza

La segunda aproximación (Robert, 2007) para el análisis de las prácticas de enseñanza, comprende dos aspectos: el primero considera los factores que determinan la práctica docente, el segundo se refiere al trabajo real de los maestros. A continuación describimos cada una de ellos.

2.2.1. Los factores que determinan la práctica docente

Para integrar los factores que determinan la práctica docente al análisis de las prácticas de enseñanza, Robert (2007) distingue tres componentes en las prácticas docentes, aunque advierte que no siempre son observables en clase. Se trata de una componente personal, una social y otra institucional.

En la componente personal se incluyen las representaciones del profesor sobre los riesgos que toma en el ejercicio de su oficio, así como del confort del que tiene necesidad. Comprende, además, las acciones que toma, de manera consciente, a partir de dichas representaciones. Cabe señalar que este análisis se realiza únicamente con los datos que se proporcionan de manera racional, dada la dificultad para acceder a aspectos más específicos del pensamiento.

La componente institucional hace referencia a los elementos institucionales que norman el ejercicio del trabajo docente, tales como programas curriculares, horarios, libros de texto, requisitos administrativos los cuales ponen ciertas limitaciones a las decisiones que el profesor toma en el ejercicio de su oficio.

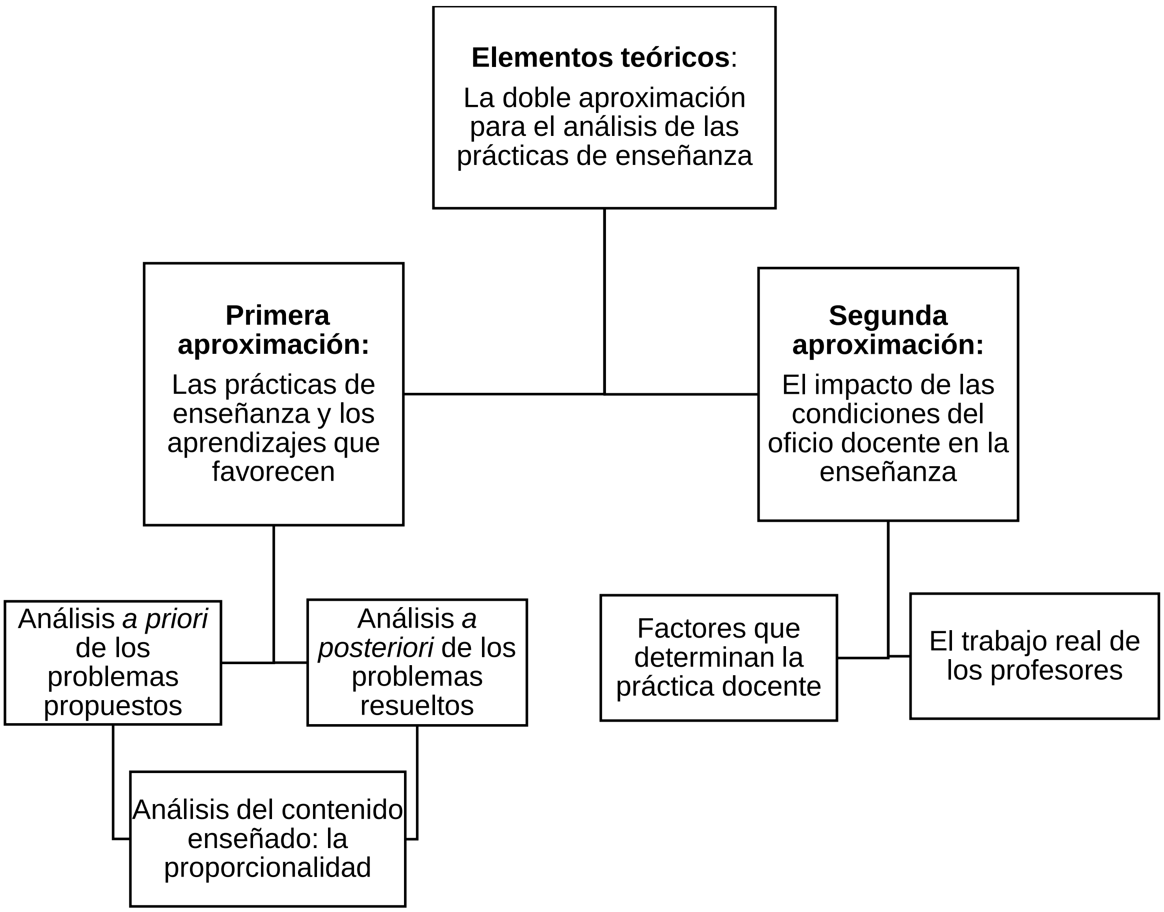
Finalmente, la componente social corresponde al hecho de que la labor docente es una actividad social que se desarrolla cotidianamente con personas que no sólo pueden verse como colectivo, sino como individuos que provienen de diversos grupos sociales.

2.2.2. El trabajo real de los profesores

El propósito de considerar el trabajo real de los profesores, para el análisis de sus prácticas de enseñanza, es tener una perspectiva más amplia sobre las variabilidades y las evoluciones individuales en el trabajo que realizan. Para ello, Robert (2007) considera tres escalas de actividad del maestro: un nivel micro, que consiste en estudiar lo que es automático, las acciones básicas, la escritura en el pizarrón, el discurso, el desplazamiento en el aula, etc. Un nivel local, el cual comprende el estudio de lo que sucede cotidianamente en el aula: las preparaciones, las improvisaciones, las adaptaciones, etc. Un nivel macro, en el que se estudia aquello que constituye el eje rector de las actividades del profesor, los proyectos escolares, las preparaciones, las líneas de acción, los conceptos y los valores.

En este capítulo hemos presentado los elementos teóricos en los que sustentamos esta investigación. En la figura 2.20 sintetizamos los aspectos más relevantes de nuestro marco teórico.

FIGURA 2.20. ELEMENTOS TEÓRICOS



CAPÍTULO III

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA EL ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

En este capítulo presentamos los aspectos metodológicos que hemos tomado en cuenta para la realización de esta investigación. Los separamos de acuerdo al trabajo realizado en relación a las dos aproximaciones propuestas por Robert (2007) y a cada uno de los elementos que las componen.

3.1. Aspectos metodológicos para el análisis de las prácticas de enseñanza en relación a los aprendizajes que favorecen

En los siguientes apartados describimos los aspectos metodológicos que tomamos en cuenta para el análisis de las prácticas de enseñanza en relación a los aprendizajes que, mediante ellas, se favorecen. Especificamos las acciones llevadas a cabo para la realización del análisis *a priori* de los problemas propuestos y del análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase.

3.1.1. Aspectos metodológicos para el análisis *a priori* de los problemas propuestos

Nuestro estudio de caso contempla que una de las características principales del modelo educativo de telesecundaria es la existencia de materiales didácticos impresos, audiovisuales e informáticos, mediante los cuales se apoyan las actividades de enseñanza y de aprendizaje. De entre ellos, los libros de texto constituyen el eje rector de las clases, toda vez que de su contenido se desprenden, generalmente, las tareas propuestas y desarrolladas en clase para el estudio de los contenidos de matemáticas (Quiroz, 2003; Carvajal, 2006; Kalman & Carvajal, 2007).

Es por ello que para el análisis *a priori* de los problemas propuestos, partimos de la revisión de las *Secuencias*[23] didácticas que, para el estudio de la proporcionalidad, son presentadas en los libros de texto de matemáticas para primer grado de telesecundaria., tanto los dirigidos a los alumnos como los del maestro. El objetivo fue identificar, en los problemas planteados, el tipo de adaptaciones de los conocimientos que son promovidos a partir de sus características.

La revisión de los libros para el maestro[24] nos permitió, además, identificar el tipo de orientaciones didácticas, soluciones y organizaciones que se sugieren a los profesores, para la enseñanza de la proporcionalidad y para el abordaje de cada problema en particular. Lo anterior nos permitió complementar nuestra interpretación sobre los tipos de adaptaciones del conocimiento que son promovidos por las actividades propuestas.

La tabla 3.1 resume nuestros principales hallazgos a partir del análisis de las diez *Secuencias* dedicadas al estudio de la proporcionalidad, planteadas en los libros de texto de matemáticas de primer grado de telesecundaria.

---

[23] El libro de texto de matemáticas para el alumno de primer grado de telesecundaria comprende dos volúmenes. Su contenido está organizado en *Secuencias*, cada una de las cuales está dividida en un promedio de tres *Sesiones* en las cuales se presentan las actividades sugeridas para el estudio de uno de los contenidos señalados por el Programa de Estudios de Matemáticas para Secundaria, 2006

[24] El libro para el maestro contiene una reproducción del libro para el alumno, sobre la que se señalan propósitos, orientaciones didácticas, sugerencias de organización y evaluación, respuestas a los problemas e ideas sobre qué enfatizar, cómo orientar a los alumnos y cómo enfrentar posibles dificultades y errores. También se agrega un recuadro con información acerca del contenido, el eje temático, los propósitos de las sesiones, sus vínculos con otras asignaturas y los recursos didácticos en los que puede apoyarse el estudio. Estos libros incluyen, al inicio, algunos textos en los que se dan a conocer a los profesores las características del modelo renovado de telesecundaria y de los materiales, así como sugerencias para el uso de estos últimos en la enseñanza.

TABLA 3.1. SECUENCIAS PARA EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD			
Secuencia		**Tipo de problemas de proporcionalidad que contiene**	**Procedimientos de resolución que puede inducir**
Núm.	**Nombre**		
6	Proporcionalidad	• Mezclas	• Procedimientos sobre la marcha • Uso de razones internas • Uso del valor unitario
7	Reparto proporcional	• Reparto proporcional	• Uso del valor unitario
15	La constante de proporcionalidad	• Valor faltante • Comparación de razones	• Uso de la constante de proporcionalidad como factor de escala • Uso de razones internas • Uso del valor unitario
16	Aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad	• Composición de relaciones	• Uso de razones internas • Uso de la constante de proporcionalidad • Uso del valor unitario
21	Porcentajes	• Valor faltante	• Uso de la constante de proporcionalidad • Uso del valor unitario
27	Relación funcional	• Valor faltante • Determinación de la existencia de proporcionalidad	• Uso del valor unitario • Uso de los factores internos • Uso de la constante de proporcionalidad
31	Relaciones de proporcionalidad	• Valor faltante • Determinación de la existencia de proporcionalidad • Composición de relaciones	• Uso de la constante de proporcionalidad • Uso del valor unitario
32	Gráficas asociadas a relaciones de proporcionalidad	• Determinación de la existencia de proporcionalidad	• Uso de la constante de proporcionalidad • Uso de los factores internos
36	Gráficas, tablas y expresiones algebraicas	• Valor faltante • Determinación de la existencia de proporcionalidad	• Uso de la constante de proporcionalidad
37	Proporcionalidad Inversa	• Valor faltante • Determinación de la existencia de proporcionalidad	• Uso de los factores internos • Uso de la constante de proporcionalidad

Con la finalidad de acotar nuestro estudio de caso, seleccionamos la S*ecuencia 6. Proporcionalidad* con la finalidad de profundizar en el análisis de los problemas que en ella se plantean. La elección se hizo bajo las siguientes consideraciones:

- Es la secuencia con la que se inicia el estudio de la proporcionalidad en la telesecundaria por lo que sirven de vínculo entre lo que los alumnos ya han aprendido durante la primaria y lo que deberán aprender en secundaria, permitiéndonos ubicar sus conocimientos previos, así como sus posibles aprendizajes sobre el tema.
- Contiene problemas de valor faltante, los cuales son los más comunes tanto en la escuela como en la vida cotidiana.
- Los problemas que plantea propician, para su resolución, procedimientos sobre la marcha, uso de razones internas y uso del valor unitario, los cuales pueden llegar a ser un tanto intuitivos (Block, Mendoza & Ramírez, 2010), pero también pueden formalizarse mediante su estudio.

Finalmente, el análisis *a priori* de los problemas propuestos se realizó sobre lo que se presenta en la *Secuencia 6. Proporcionalidad* en relación al contenido matemático de la proporcionalidad: el tipo de problemas que se plantea, sus variables didácticas y el tipo de solución que pueden inducir. A partir de lo anterior se hicieron algunas conjeturas sobre las adaptaciones del conocimiento que los alumnos podrían hacer para la resolver de las tareas que les serían propuestas en clase.

3.1.2. Aspectos metodológicos para el análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase

Para la realización del análisis *a posteriori* de los problemas resueltos comenzamos por seleccionar el caso de estudio, para ello nos basamos en diversas consideraciones las cuales describimos a continuación:

- ***La elección de la escuela telesecundaria.***

A pesar de que la telesecundaria fue creada originalmente para dar servicio en zonas rurales, el servicio se ha extendido también a comunidades urbanas. Para conocer aunque someramente ambos tipos de servicio visitamos y nos entrevistamos con algunos profesores de cuatro escuelas, dos urbanas ubicadas en las delegaciones Coyoacan y Gustavo A. Madero del Distrito Federal y dos rurales ubicadas en los municipios de Texcoco y Tepetlaoxtoc, en el Estado de México.

A partir del acercamiento a estas escuelas, seleccionamos para nuestro estudio la telesecundaria rural ubicada en el municipio de Tepetlaoxtoc, en el Estado de México.

Nuestra elección se basó en el hecho de que esta modalidad educativa fue creada con la intención de llevar la educación secundaria a localidades rurales y que actualmente casi el 90% de las telesecundarias se localizan en este tipo de comunidades (INEE, 2013). Además de que la escuela seleccionada se ubica en el Estado de México, una de las entidades del país en las que se concentra un importante número de telesecundarias[25]. Por lo anterior, consideramos de importancia generar información sobre la enseñanza en este ámbito.

Se trata también de una escuela de organización completa que cuenta con todos los servicios, consideramos que estas características podrían reducir la influencia que pudieran ejercer sobre el trabajo docente, las condiciones multigrado o de organizaciones unidocentes o bidocentes, así como la carencia de uno o varios servicios.

- ***<u>La elección de la profesora.</u>***

Además de las condiciones de la escuela que guiaron nuestra elección, contemplamos las características que, mediante una entrevista, identificamos en la profesora de primer grado de la telesecundaria seleccionada.

[25] De acuerdo con un informe del INEE (2013) en el Estado de México existen 1025 telesecundarias las cuales representan el 5.6% del total nacional.

La profesora tiene una Licenciatura en Ciencias Políticas y Administración Pública, otra Licenciatura en Pedagogía y una Maestría en Ciencias de la Educación, esto podría reducir las dificultades en el trabajo docente generadas por una escasa preparación profesional. En el momento del estudio, la maestra contaba con doce años de experiencia laboral en telesecundaria, los últimos cinco trabajando con grupos de primer grado por lo que conocía y tenía experiencia trabajado con los materiales educativos diseñados para la enseñanza de las matemáticas en esta modalidad educativa.

Una vez acotado el caso de estudio, decidimos realizar observación no participante de las clases de matemáticas dedicadas al estudio de la *Secuencia 6. Proporcionalidad* propuesta en el libro de texto oficial que fueron dirigidas por la profesora seleccionada. El tipo de observación que hicimos se debió a que queríamos contar con una visión lo más clara y real posible de las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad en clases comunes (no experimentales) de telesecundaria.

Dado que el libro de texto se había identificado con anterioridad como el eje rector de las actividades en clase, se tomó como referente el análisis *a priori* de las tareas propuestas en él, así como la estructura de su contenido, para la elaboración de un guion de observación que permitió centrar la mirada en las características iniciales de las tareas y la manera en que son transformadas en el desarrollo de la clase a partir de las intervenciones de la profesora y los alumnos.

De los datos recabados se realizó una selección de los momentos en los que se distinguió una importante interacción entre la profesora, los alumnos y el contenido matemático. Dichos momentos los identificamos en el desarrollo de las clases dedicadas a la resolución de los problemas presentados en la *Sesión 1. Las cantidades directamente proporcionales* y en la *Sesión 2. El valor unitario*, de la *Secuencia 6. Proporcionalidad*, del libro de texto oficial.

Complementamos la información que obtuvimos mediante la observación con dos entrevistas realizadas a la profesora, una previa y una posterior al desarrollo de las clases que observamos.

La entrevista previa fue semiestructurada y tuvo la finalidad de identificar los elementos que, sobre el desarrollo de la clase, el contenido matemático y los recursos didácticos, la maestra considera durante la planeación de la clase, los que pondera y los que omite. Ello permitiría contrastarlos luego con lo que finalmente tiene lugar durante las sesiones.

La entrevista posterior a la observación de clases fue estructurada y tuvo el propósito de recabar información sobre las percepciones de la profesora acerca de lo que finalmente sucedió en las clases.

Las preguntas estuvieron dirigidas a la indagación de lo que la profesora percibió durante el desarrollo de las clases sobre las nociones matemáticas utilizadas, el tipo de procedimientos de resolución ponderados, las variables didácticas de los problemas que fueron manipuladas, así como de la organización, la evaluación y los recursos utilizados.

Finalmente, construimos nuestro análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase, mediante una vinculación entre las tareas propuestas y la forma en que fueron transformadas en el desarrollo de la clase a partir de las intervenciones de la profesora y los estudiantes, el tipo de ayudas proporcionadas por la maestra y las adaptaciones del conocimiento que se hacen necesarias dadas las características que las tareas adquieren en cada momento de la clase.

3.2. Aspectos metodológicos para el análisis del impacto de las condiciones del oficio docente en la enseñanza

Si bien el estudio del oficio docente no fue el foco principal de esta tesis, consideramos necesario indagar sobre las condiciones del trabajo de los profesores de telesecundaria que influyen en la forma en que ejercen la enseñanza. Para ello entrevistamos a los maestros de primer grado de las cuatro escuelas que visitamos al inicio de nuestro estudio (dos urbanas y dos rurales), entre los cuales se incluye a la profesora que luego observaríamos.

Las entrevistas fueron semiestructuradas y se centraron en indagar las opiniones y experiencias que los profesores poseen acerca de su trabajo y particularmente sobre la enseñanza de la proporcionalidad realizada mediante el uso de los recursos diseñados para el estudio de las matemáticas en telesecundaria.

Por lo anterior, elegimos para la entrevista a profesores que tuvieran una experiencia laboral de al menos cinco años con grupos de primer grado de telesecundaria, esto con la finalidad de que tuvieran conocimiento del modelo educativo, de los planes y programas de primer grado, de los materiales educativos y sobre todo, cierta experiencia en la enseñanza de la proporcionalidad.

Finalmente, a partir de la información recabada realizamos algunas conjeturas sobre el impacto que las condiciones del trabajo de los profesores de telesecundaria, puede tener en sus prácticas de enseñanza.

En este capítulo describimos los aspectos metodológicos que utilizamos para la realización de este estudio. En la tabla 3.2 presentamos una síntesis de dichos aspectos.

<table>
<tr><th colspan="4">TABLA 3.2. ASPECTOS METODOLÓGICOS PARA EL ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD DESDE LA DOBLE APROXIMACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Primera aproximación: Las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen</td><td>Análisis a priori de los problemas propuestos</td><td>Análisis previo de las secuencias</td><td>▪ Revisión de las secuencias dedicadas al estudio de la proporcionalidad en el libro de texto de matemáticas para primer grado de telesecundaria.
▪ Elección de las secuencias
▪ Análisis de los problemas planteados</td></tr>
<tr><td>Análisis a posteriori de los problemas resueltos en clase</td><td>Análisis de las actividades realizadas en clase</td><td>▪ Elección de la telesecundaria y la profesora a observar.
▪ Observación de clases
▪ Análisis de las actividades de enseñanza realizadas por la profesora</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Segunda aproximación: El impacto de las condiciones del oficio docente en la enseñanza</td><td>Análisis de los factores que determinan la práctica docente</td><td rowspan="2">Análisis de las condiciones del trabajo docente</td><td rowspan="2">▪ Elección de los tópicos a investigar
▪ Entrevista a profesores de telesecundaria
▪ Análisis de las condiciones del trabajo docente</td></tr>
<tr><td>Análisis del trabajo real de los profesores</td></tr>
</table>

CAPÍTULO IV.

4. ANÁLISIS

En el presente capítulo mostramos los resultados de nuestra investigación. Basándonos en los elementos teóricos de la doble aproximación (Robert 2007), presentamos en el primer apartado el estudio sobre las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen. En el segundo apartado exponemos el análisis sobre el impacto de las condiciones del oficio docente. Finalmente presentamos algunos comentarios acerca de nuestros hallazgos.

4.1. Análisis de las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen

Siguiendo la organización de las clases que observamos presentamos el análisis de las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen a partir de lo sucedido en la *Sesión 1*. Las *cantidades directamente proporcionales* y en la *Sesión* 2. *El valor unitario* de la *Secuencia 6. Proporcionalidad,* del libro de texto de matemáticas para primer grado de telesecundaria[26]. Para cada una de las dos sesiones, incluimos el análisis a *priori* de los problemas propuestos y el análisis *a posteriori* de la resolución de dichos problemas durante las clases que observamos.

[26] Con la finalidad de facilitar la lectura, en adelante nos referiremos a la *Sesión 1. Las cantidades directamente proporcionales* como la "*Sesión 1*", a la *Secuencia 2. El valor unitario*, como la "*Sesión 2*", a la *Secuencia 6. Proporcionalidad*, como la "*Secuencia*" y al libro de texto de matemáticas 1 para telesecundaria, como el "libro de texto".

4.1.1. Primera Sesión. La invalidación del uso la lógica y la introducción de la regla de tres.

La primera clase que observamos tuvo como eje rector los problemas planteados en la *Sesión 1* de la *Secuencia 6* del libro de texto. El propósito de esta sesión de acuerdo con el libro para el maestro es el de "caracterizar las situaciones en las que hay cantidades directamente proporcionales, resolver algunas de esas situaciones mediante el uso de tablas y utilizar la suma y la multiplicación de cantidades directamente proporcionales como estrategias de resolución" (SEP, 2006b:110).

Los problemas se presentan en diferentes apartados. El primero, *Para empezar,* proporciona algunos datos acerca de la mezcla de colores de pintura, con dicha información se abre paso al apartado *Consideremos lo siguiente* en el que se presenta el problema inicial de la sesión, alrededor del cual se plantean las actividades a realizar en el siguiente apartado: *Manos a la obra.* Un último apartado, *Lo que aprendimos*, contiene información sobre las características de las relaciones de proporcionalidad.

A continuación presentamos el análisis *a priori* de los problemas planteados en la *Sesión 1* y el análisis *a posteriori* de su resolución en clase.

4.1.1.1. Análisis *a priori* de los problemas propuestos.

La *Sesión 1* se compone de seis problemas. El problema inicial del apartado *Consideremos lo siguiente* y los problemas I, II, III, IV y V del apartado *Manos a la obra*:

- ***El problema inicial.***

El problema inicial de la *Sesión 1* (ver figura 4.1) se trata de un problema de proporcionalidad del tipo de mezclas. Lo clasificamos como tal debido a que este tipo de problemas demanda encontrar el resultado de la unión de dos cantidades involucradas, cada una, en una relación de proporcionalidad diferente. En este caso se trata de la unión de ciento cincuenta mililitros de pintura azul con trescientos cincuenta mililitros de pintura amarilla. La consigna es calcular el costo del resultado de esta unión: quinientos mililitros de pintura verde claro.

FIGURA 4.1. PROBLEMA INICIAL[27]

Manuel es pintor y quiere saber cuánto cuesta medio litro de pintura de aceite de color verde claro. Fue a una tienda de pinturas, pero como no tenían pintura verde claro, le ofrecieron los colores que puede mezclar para obtenerla.

La siguiente tabla muestra los colores que hay que mezclar para obtener la pintura verde claro que Manuel quiere:

Pintura azul	Pintura amarilla	Color final de la mezcla: pintura verde claro
150 mililitros	350 mililitros	500 mililitros

El costo de la pintura varía dependiendo del color. La siguiente tabla muestra los costos de los colores primarios de la pintura de aceite:

Color de la pintura	Azul	Rojo	Amarillo
Precio por litro	$ 300	$ 500	$ 700

Comenten y contesten:

¿Cuál es el costo de 500 ml de pintura verde claro?

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

En este problema es posible identificar como relaciones de proporcionalidad las que se establecen entre la cantidad de pintura azul y su costo, la de la cantidad de pintura amarilla y su costo y la de la pintura verde claro y su costo. Si bien entre los datos dados no se encuentran los necesarios para formular ésta última, puede considerarse que se trata de una. En la figura 4.2 representamos, mediante una tabla, cada una de estas relaciones en las cuales subyace un valor faltante:

[27] Tomado de SEP, 2006a: 74-75.

FIGURA 4.2. RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD IDENTIFICADAS EN EL PROBLEMA INICIAL

Pintura azul (ml)	Costo ($)
1000	300
150	a

Pintura amarilla (ml)	Costo ($)
1000	700
350	b

Pintura verde claro (ml)	Costo ($)
500	c

Para resolver este problema los estudiantes tendrían que realizar adaptaciones A1, es decir, identificar que el tipo de relación que existe entre las cantidades es de proporcionalidad, así como las propiedades y el tipo de procedimientos de solución es factible utilizar para resolverlo.

Aunque es probable que el reconocimiento de las propiedades y procedimientos de solución no se haga de manera explícita, los alumnos han tenido experiencia con problemas de proporcionalidad directa tanto en la escuela como fuera de ella, por lo que cuentan con algunos conocimientos con los que podrían abordar el problema y bosquejar algunos procedimientos para resolverlo.

Debido a que se trata de un problema de mezclas y a que la disposición de los contenidos curriculares en los planes y programas de estudio, no contempla este tipo de situaciones, es poco probable que los alumnos hayan estudiado procedimientos de solución específicos para este tipo de problemas. Por lo anterior, puede requerirse además una adaptación A4, en la que los alumnos introduzcan etapas para la resolución las cuales estarían dirigidas a identificar las relaciones de proporcionalidad existentes y calcular cada uno de los valores faltantes (*a*, *b* y *c* en la figura 4.2).

El cálculo de dichos valores puede hacerse mediante diferentes procedimientos. No obstante, las variables didácticas que caracterizan a este problema limitan el uso de algunos de ellos y favorecen otros. Consideramos que uno de los más factibles de ser utilizado son los procedimientos sobre la marcha (factores internos y propiedad aditiva), debido a que pone en juego conocimientos que se utilizan en la vida cotidiana, por ejemplo, el hecho de que al duplicar la cantidad de un artículo o producto a comprar, su costo también se duplicará.

Aunque los factores internos resultan números no enteros, es posible la introducción de factores internos enteros para obtener otras cantidades pertenecientes a cada una de las relaciones de proporcionalidad establecidas hasta llegar a encontrar el valor faltante. En este caso se requeriría, además, de una adaptación A2, en la que los alumnos introdujeran otras cantidades pertenecientes a la misma relación de proporcionalidad, mediante los cuales poder llegar al cálculo del valor desconocido.

El uso del valor unitario puede ser un procedimiento con el que los alumnos estén familiarizados. No obstante, en el caso de las relaciones establecidas en este problema, se trata de un número no entero, lo que dificulta su cálculo, la comprensión de su significado y su uso. Por otra parte, el uso del factor externo constante y de la regla de tres es factible en medida del conocimiento que, sobre ellos, posean los alumnos.

- ***Los problemas I y II***

Luego del planteamiento del problema inicial, en el apartado *Manos a la obra* se añaden dos problemas (ver figura 4.3) cuyo propósito es confrontar los procedimientos de solución y los resultados de los alumnos respecto al primero.

FIGURA 4.3. PROBLEMAS I Y II[28]

I. En un grupo de otra telesecundaria hicieron el siguiente procedimiento para calcular el costo de 500 mililitros de pintura verde claro:

Y al final dijeron: "como dos litros de pintura verde claro cuestan 1000 pesos, entonces dividimos todo entre cuatro y tenemos que 500 mililitros cuestan $250".

Comenten

¿Consideran correcto el procedimiento que encontraron en la otra telesecundaria?

Argumenten su respuesta.

II. Cuando Manuel fue a cobrar le cobraron $290.

Comenten:

¿Le cobraron bien a Manuel en la tienda?

El problema I, explica un procedimiento erróneo, el cual es muy probable que los alumnos hayan considerado para la resolución del problema inicial. Subyacen en él procedimientos sobre la marcha, particularmente el uso de factores internos, al dividir entre cuatro el costo obtenido, para obtener el que le corresponde a quinientos mililitros que es, a su vez, la cuarta parte de dos litros.

[28] Tomado de SEP, 2006a: 75.

El problema II ofrece la respuesta correcta y según el libro para el maestro, tiene el propósito de “que los alumnos se percaten de que el procedimiento anterior es erróneo y corrijan su respuesta” (SEP, 2006b: 75). Sin embargo, es probable que los alumnos encuentren lógica en el procedimiento del problema I, debido a que el uso de factores internos y la adición utilizada son parte de sus conocimientos previos; en cambio, en el segundo problema no se ofrece un procedimiento para justificar el cobro de doscientos noventa pesos que se le hace a Manuel. Así, es posible que crean que el error no está en el procedimiento presentado en el primer problema, sino en que le cobraron mal a Manuel en la tienda.

- ***El problema III.***

Se presenta a continuación el problema III (ver figura 4.4) cuyo propósito es que a través del llenado de las tablas, los alumnos “identifiquen que en las cantidades directamente proporcionales, el aumento o disminución de una cantidad produce un aumento o disminución proporcional en la otra cantidad” (SEP, 2006b: 76)

FIGURA 4.4. PROBLEMA III[29]

III. Completen las siguientes tablas para calcular los costos de 150 ml de pintura azul y de 350 ml de pintura amarilla:

Cantidades de pintura azul	Costo de la pintura azul
1000 ml	$ 300
100 ml	
50 ml	
150 ml	

Cantidades de la pintura amarilla	Costo de la pintura amarilla
1000 ml	$ 700
100 ml	
50 ml	
350 ml	

Ahora que ya saben el costo de la cantidad de pintura azul y de la cantidad de pintura amarilla que necesita Manuel para obtener el verde claro, completen lo siguiente:

Cantidad de pintura amarilla	350 ml	+	Cantidad de pintura azul	150 ml	=	Cantidad de pintura verde claro	500 ml
Costo de la pintura amarilla	___ pesos		Costo de la pintura azul	___ pesos		Costo de la pintura verde claro	___ pesos

[29] Tomado de SEP, 2006a: 76.

Se introducen las *tablas de variación* como un recurso para la organización de los datos y la resolución del problema inicial. Para completarlas, se favorece el uso de procedimientos sobre la marcha (factores internos y propiedad aditiva), puesto que las cantidades involucradas son múltiplos de diez y los factores internos resultan ser números enteros pequeños, asimismo dan pie al uso de la propiedad aditiva (ver figura 4.5).

FIGURA 4.5. USO DE PROCEDIMIENTOS SOBRE LA MARCHA PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3 DEL APARTADO MANOS A LA OBRA.

	Cantidades de pintura azul	Costo de la pintura azul	
	1000 ml	$ 300	
÷10	100 ml		÷10
÷2	50 ml		÷2
100 + 50 →	150 ml		

	Cantidades de la pintura amarilla	Costo de la pintura amarilla	
	1000 ml	$ 700	
÷10	100 ml		÷10
÷2	50 ml		÷2
100+100+100+50 →	350 ml		

- ***El problema IV***

El problema IV (ver figura 4.6) consiste en responder dos preguntas sobre el costo de diferentes cantidades de pintura verde claro las cuales pueden solucionarse a partir del costo encontrado en el problema anterior.

FIGURA 4.6. PROBLEMA IV[30]

IV. Contesten las siguientes preguntas en sus cuadernos. Pueden usar tablas para hacer sus cálculos:

a) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde claro?
b) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde claro?

[30] Tomado de SEP, 2006a: 76.

Las cantidades involucradas favorecen el uso de procedimientos sobre la marcha pues se trata de números enteros, múltiplos de cien y de diez, respectivamente (ver figura 4.7). Además se sugiere el uso de tablas, lo que puede inducir a repetir el procedimiento planteado en el problema tres.

FIGURA 4.7. USO DE PROCEDIMIENTOS SOBRE LA MARCHA PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA IV.

	Cantidad de pintura verde claro (ml)	Costo ($)	
	500	290	
÷5	100	58	÷5
÷10	10	5.80	÷10
x2	20	11.60	x2
x8	**800**	464	x8
100+20	**120**	69.60	58+11.60

Para concluir la sesión se presenta el problema V (ver figura 4.8) en el cual se pregunta el costo de distintas cantidades de pintura verde oscuro. El problema es semejante al inicial y plantea una mezcla diferente de pintura azul y amarilla.

FIGURA 4.8. PROBLEMA V[31]

V. Como no le alcanzaba el dinero, Manuel preguntó qué otro color con menor precio podía llevar. El vendedor le dijo que comprara verde oscuro, que era más barato porque lleva 300 ml de pintura azul y 200 ml de pintura amarilla. En sus cuadernos contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto cuestan 500 ml de pintura verde oscuro?
b) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde oscuro?
c) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde oscuro?

[31] Tomado de SEP, 2006a: 77.

La complejidad de este problema está en que se trata de un problema de mezclas, aunque una vez obtenida una de las respuestas, las otras derivan de ella, por lo que se constituyen como problemas típicos de valor faltante.

- ***En resumen.***

El problema inicial es un problema de proporcionalidad de mezclas, para su resolución los estudiantes tendrían que poner en juego adaptaciones del conocimiento de tipo A1 al reconocer el tipo de relación entre las cantidades y poner en juego sus propiedades para la resolución. La complejidad del problema dado su tipo, podría también motivar en los alumnos adaptaciones A4 al establecer etapas para solucionarlo. En el caso de hacer uso de los factores internos, la introducción de otros valores, no expresados en el planteamiento del problema, mediante los cuales podrían llegar a la solución, los alumnos realizarían adaptaciones A2.

Los cinco problemas del apartado *Manos a la obra* movilizan adaptaciones A1 pues demandan que los estudiantes reconozcan las propiedades de las relaciones de proporcionalidad puestas en juego, así como posibles procedimientos de solución . respecto al problema inicial.

4.1.1.2. Análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase

De las clases que observamos, la primera se dedicó a la resolución del problema inicial y de los tres problemas del apartado *Manos a la obra*, correspondientes a la S*esión 1.* Vimos que aunque los problemas ya están definidos, son transformados a partir de las intervenciones de la profesora y las interacciones que se generan entre ella y los estudiantes. Con ello, la propuesta adquiere sentidos distintos a los que se plantean en el libro de texto.

Identificamos en esta primera sesión tres momentos mediante los cuales estructuramos nuestro análisis: el planteamiento del problema inicial, la invalidación del uso de procedimientos sobre la marcha y la introducción de la regla de tres para la resolución del problema.

- ***El planteamiento del problema inicial.***

Luego de ver el programa y de un breve intercambio de ideas sobre el uso de la proporcionalidad, la maestra pidió a un alumno leer el problema inicial planteado en el libro de texto. Después, ella toma la palabra para hacer explicita la equivalencia entre mil mililitros y un litro, también se refiere al uso de las tablas como un recurso para abordar los problemas de proporcionalidad.

Ambas acciones contribuyen a simplificar el problema con el que se enfrentan los alumnos: con la primera previene la dificultad que pudieran encontrar en el hecho de que las cantidades se expresan en diferentes unidades de medida. Con la segunda introduce un recurso para la resolución, si bien no es un procedimiento completo, adelanta el uso que de ellas se hará más adelante, en los problemas del apartado *Manos a la obra*. Es probable también que la maestra hiciera referencia a las tablas, puesto que su uso, es parte del propósito de la sesión. El siguiente diálogo[32] muestra lo sucedido en clase:

> **Ma:** ¡Recuerden! (*lee esta palabra en el libro, luego sólo explica*). Ahí en el cuadrito amarillo nos dice que 1000 mililitros van a corresponder a ¿cuántos litros?
>
> **Aos***:* ¡A uno! ¡Un litro!
>
> **Ma:** ¡A uno! efectivamente. Algo que nos manejaba el programa, si ustedes pusieron atención, nos decía que vamos a utilizar algo para poder resolver este tipo de problema. ¿Alguien puso atención o recuerda qué recurso vamos a utilizar para resolver este tipo de problemas?, y les marcaron cuando les preguntaron de las distancias.
>
> **Ao1**: ¡La multiplicación!
>
> **Ma**: ¿La qué?
>
> **Ao1**: La multiplicación
>
> **Ma**: Ok. Esa es una de las, este, de las operaciones, ¡Ajá!.. *(Escribe en el pizarrón la palabra: multiplicación*). ¿Algo más que recuerden? ¿El uso de qué...? (E*scribe en el pizarrón las palabras: Uso de tablas)*

[32] En los diálogos que se presentan hemos utilizado las siguientes abreviaturas: Maestra (Ma), Alumno 1, Alumno 2, Alumno 3… (Ao1, Ao2 , Ao3…), Alumnos (Aos). Se utilizan también puntos suspensivos (…) para indicar un silencio, letras cursivas dentro de paréntesis para especificar una acción que se realiza y letras cursivas entre comillas para señalar algo que fue leído.

Aos: ¡Tablas! (*Lo leen del pizarrón*)

Ma: ¡Tablas! Vamos a ver, cómo este recurso nos puede ser útil si nosotros queremos saber cantidades directamente proporcionales. Ok. Tenemos el problema, su compañero nos lo leyó, voy a darle nuevamente lectura y quiero que localicen los datos que nos está dando el problema (…)

A pesar de que un alumno ya había leído el problema, la profesora vuelve a dar lectura, enfatizando algunas palabras. En el siguiente diálogo se muestran las preguntas que, luego de leer el problema, dirige al grupo y con las cuales hace explícitos los datos del problema:

Ma: (…) Entonces ya tenemos una cuestión. ¿Cuál es nuestra cuestión de nuestro problema?... ¿Qué se quiere comprar?

Aos: ¡Pintura!

Ma: ¿Color?

Aos: ¡Verde claro!

Ma: ¡Ok! Verde Claro (*lo escribe en el pizarrón)*. ¿Cuánto se quiere comprar?

Aos: ¡Medio litro!

Ma: Se quiere comprar medio litro, (*escribe en el pizarrón: quinientos).* Que corresponde a ¿cuánto?

Aos: ¡Quinientos mililitros!

Ma: ¿Hay pintura verde claro?

Aos*:* ¡No!

Ma: Ustedes saben que la gama de colores que tenemos se desprende de tres colores primarios y nos lo acaban de decir en el mismo libro. ¿Cuáles son?

Aos: ¡Azul, rojo y amarillo! (*los nombran en diferente orden)*

Ma: ¡Ok! ¡Bueno, escuché a todos! Azul, verde y amarillo. Y, ¿cuáles son los que necesitamos?

Aos: ¡Azul! ¡Amarillo!

Ma: Azul ¿y?…

Aos: ¡Amarillo!

La anterior intervención de la profesora, representa una adecuación respecto a la propuesta hecha por el libro para el maestro, la cual consiste en permitir que los alumnos lean el problema en parejas y luego se les pregunte de qué se trata, para ver si lo han comprendido, también se sugiere no adelantar resultados o estrategias de solución (SEP, 2006b).

Con las preguntas planteadas en el momento de la clase que se muestra arriba, la profesora contribuye nuevamente a simplificar el problema, esta vez haciendo explícitas las condiciones que implica la situación en la que se inscribe el problema: que se desea comprar pintura verde claro, que no hay en la tienda y que se forma a partir de la mezcla de pintura azul y pintura amarilla.

Hasta aquí es la maestra quien tiene el control de la actividad, los alumnos participan en la clase respondiendo a sus preguntas, lo cual hasta ahora es una tarea simple que no les demanda la adaptación de conocimientos previos sino, solamente, hacer una lectura de los datos del problema que sin embargo no son identificados por ellos mismos, sino que son solicitados por la profesora.

En la interacción, sólo un alumno hace una inferencia sobre los datos, más allá de la lectura del problema. Aunque erróneamente, él determina por sí mismo que para obtener medio litro de pintura verde claro, se necesitan doscientos cincuenta mililitros de pintura azul y doscientos cincuenta mililitros de pintura amarilla. Sin embargo, como puede apreciarse en el siguiente diálogo, su aportación es invalidada sin discutirse

> **Ao2:** Necesitamos doscientos cincuenta gramos de cada uno…
>
> **Ma:** Ok. Vamos viendo cómo sacar datos. ¡Azul y Amarillo! *(escribe: azul y amarillo en el pizarrón).* Ahora sí, te escucho Brayan, ¿Cuánto necesitamos para poder hacer este color?
>
> **Ao2:** Doscientos cincuenta mililitros de cada… color.
>
> **Ma:** ¿Cuánto? perdón.
>
> **Ao2:** Doscientos cincuenta mililitros…
>
> **Ma:** Eh… ¡No es cierto! (*Varios alumnos hablan a la vez)* ¡Escuchamos! Si alguien levanta la mano. ¡A ver te escuchamos Noé!
>
> **Ao3**: Ciento cincuenta mililitros de pintura azul y trescientos cincuenta de amarillo.
>
> **Ma:** ¡Sí! ¿Ya checamos en la tabla de abajo, Brayan, que ya nos específica cuánto? Entonces de azul vamos a necesitar ciento cincuenta mililitros y ¿de amarilla? (*escribe los datos en el pizarrón).*
>
> **Aos**: ¡Trescientos cincuenta!

Ma: ¡Trescientos cincuenta! (*lo escribe en el pizarrón*). ¡Bien! Y qué si nosotros sumamos esas dos cantidades, ¿cuánto nos da?

Aos: ¡Quinientos!

Ma: Quinientos, que corresponde al medio litro que se quiere comprar, ¿estamos de acuerdo?

Aos: ¡Sí!

La participación de los estudiantes, como se evidencia en el dialogo anterior, se reduce a responder las preguntas que les son dirigidas y cuyas respuestas, en varias ocasiones, son inducidas o dadas (de manera oral o escrita) por la profesora. La maestra escribe en el pizarrón los datos del problema, y los organiza haciendo explícitas las relaciones entre ellos: cantidad de pintura azul requerida con su costo por litro y cantidad de pintura amarilla requerida con su costo por litro.

En el siguiente diálogo se observa que aunque dirige preguntas a los alumnos, es ella quien va estableciendo las respuestas necesarias para formular las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema:

Ma: Bien. Entonces dice: *"El costo de la pintura varía dependiendo del color. La siguiente tabla muestra los costos de los colores primarios de la pintura de aceite".* ¿Cuáles son los costos? Dice, bueno, de la azul son trescientos pesos, de la roja quinientos y de la amarilla setecientos. ¿Cuáles son los dos colores que nosotros vamos a utilizar para la pintura…?

Aos: Azul y amarilla (*se oye la voz en diferente orden).*

Ma: ¡Azul y amarilla! ¿Cuánto cuesta?

Aos: La azul trescientos (se oyen diferentes voces)

Ma: La azul, por litro ¿cuesta?... Trescientos pesos y la amarilla setecientos pesos (*escribe estos datos en el pizarrón).* Ojo con los datos que se nos están dando, ¿sí?

Consideramos que las intervenciones de la profesora se constituyen en este primer momento, en ayudas tipo 1, puesto que con ellas, contribuye a simplificar los problemas haciendo explícitos los datos, enfatizando los que serán necesarios para la resolución del problema y estableciendo algunas relaciones entre ellos.

La interacción que hasta este momento se generó entre la maestra y el grupo, no exigió de los alumnos la adaptación del conocimiento matemático sobre la proporcionalidad aunque, como se describe en el siguiente subapartado, al parecer algunos de ellos, en forma independiente, comenzaron a bosquejar la resolución del problema poniendo en juego algunos conocimientos previos sobre el tema.

- ***La invalidación del uso de procedimientos sobre la marcha***

Siguiendo las indicaciones del libro de texto y la sugerencia del libro para el maestro sobre trabajar en binas, la profesora indica a los alumnos que se reúnan con un compañero que esté cerca de ellos para responder la pregunta del problema inicial, pide que sea de esa manera para evitar perder tiempo. Es quizá esta misma condición lo que lleva a la maestra a conducir ella misma todas las actividades y a dejar poco tiempo a los estudiantes para el trabajo autónomo.

No obstante, como vemos en el siguiente diálogo, antes de que se diera inicio al trabajo en binas, un alumno da una respuesta adelantada. La maestra la retoma, dando paso a una breve discusión grupal, en la que fue posible observar que algunos de los alumnos ya habían hecho de manera individual y autónoma, algunas conjeturas sobre el problema inicial.

> **Ma**: (…) "*Comenten y contesten*"… Van a trabajar rápido en binas con el primero que tengan a lado, para no perder tanto tiempo. "*¿Cuál es el costo de quinientos mililitros de pintura verde…?*"
>
> **Ao4:** ¡Doscientos cincuenta pesos!
>
> **Ma:** Doscientos cincuenta pesos. ¡Ok! Bueno, su compañero se nos adelantó porque les dije que íbamos a trabajar en binas, pero está bien, no hay problema. Vamos a considerar a la respuesta de Víctor. Vamos a considerar su procedimiento y ahorita ya se juntan… O si alguien dice que sí, eso es lo que cuesta, pues adelante *(anota en el pizarrón el nombre del alumno y su respuesta).*

La respuesta dada por el alumno coincide con la que se contempla en el primer problema del apartado *Manos a la obra*. Parece ser que los alumnos se han adelantado a la lectura del siguiente problema en el libro de texto y considerado el resultado como correcto. No obstante, también han construido algunos procedimientos de manera autónoma. Ello se hace evidente en siguiente diálogo, en el que los alumnos proponen una forma de resolver el problema en la que es posible distinguir el uso de factores internos, al obtener la mitad del costo de un litro de pintura ($700), toda vez que se requiere la mitad de un litro (500 ml).

Ma: ¿Cómo determinaste tú, Víctor, que cuesta doscientos cincuenta el medio litro?

Ao4: Este... porque dice que…aquí (*señalando el libro)*, que el litro cuesta setecientos pesos...yo lo dividí, entonces me dio doscientos cincuenta pesos.

Ma: ¿Qué dividiste?

Ao4: Setecientos entre… (*Pensativo no termina la frase)*

Ao3: (*interviene)* ¡Maestra!

Ma: A ver Noe

Ao3: ¡Trescientos cincuenta mililitros! ¡Ah no! ¡Trescientos cincuenta pesos!

Ma: Eh… ¿De dónde sacaste los trescientos cincuenta pesos?

Ao3: Porque quinientos mililitros equivale a medio litro.

Ma: Ajá…

Ao3: Y setecientos lo dividimos entre dos, da trescientos cincuenta.

Si bien los alumnos solo han considerado el costo de la pintura amarilla, y no el de la mezcla de pinturas con la razón determinada en el planteamiento del problema, es posible distinguir adaptaciones A1 en sus procedimientos. Dichas adaptaciones consisten, en este caso, en reconocer que la relación entre la cantidad de pintura que se vende (litro) y la que se requiere (500 ml) es de la mitad (1:2). Por lo que dividen entre dos el costo de un litro de pintura para obtener el precio de medio litro.

Es probable que este reconocimiento no pertenezca a un conocimiento formalizado sobre las propiedades de las relaciones de proporcionalidad, sin embargo su uso pone de manifiesto lo que los alumnos saben hacer al respecto de este tipo de problemas.

No obstante, aunque la existencia de factores internos iguales es una propiedad necesaria y suficiente de la proporcionalidad y que su uso es parte del propósito de la sesión, el uso que de ellos hicieron los alumnos no fue hecho explícito ni por ellos, ni por la profesora.

En el siguiente diálogo se muestra la discusión sobre el procedimiento propuesto por algunos alumnos, observamos que las intervenciones de la profesora tienen el objetivo de hacer notar el error de considerar sólo el costo de la pintura amarilla.

Ma: ¿Y de dónde…? ¿Por qué dividen el setecientos? ¿De dónde...? Sí, ¿por qué los trescientos cincuenta? *(Un niño levanta la mano pero no es considerado por la maestra)* ¿A partir de qué idea, tú divides entre dos el setecientos? ¿Por qué el setecientos?, es la pregunta... ¿Alguien? (*Una niña levanta la mano, pero no es percibida por la maestra, todos los demás niños están atentos en sus libros)*. ¿Estás correcto en lo que tú creías Víctor? (*el alumno asiente)* ¿Sigues con la misma posición? Adelante.

Ao4: Es que aquí abajo**…**

Ma: A ver Vlady…

Ao5: Porque es el precio de…

Ma: Porque es el precio ¿de qué?

Ao5: De la pintura

Ma: De la pintura... ¿Dónde nos dice que la pintura verde claro cuesta setecientos pesos?

Ao1: Cuesta, eh… aquí dice: Dos litros de pintura verde claro cuestan mil pesos, así que un litro cuesta quinientos pesos.

Ma: ¡Ah! Ok, pero ya se nos bajaron a lo que es “Manos a la obra”. No, no se adelantaron. No, no pedí que todavía se adelantaran. Quedamos en la parte de arriba. A ver, ahora sí, tienen… Vamos a recortar tiempo, tres minutos para platicarlo con el compañero que este a lado, de qué manera ustedes le pueden encontrar solución. Rápido, ahora sí que platíquenlo y traten de encontrar la solución *(algunos alumnos se juntan en parejas para trabajar juntos, otros permanecen en modo individual observando el problema en sus libros).*

Luego de aproximadamente tres minutos, la profesora pide los resultados de la discusión. A partir de las respuestas dadas por los alumnos, la maestra plantea algunas preguntas mediante las cuales hace notar el error de dividir setecientos entre dos, pues ese procedimiento se basa en considerar sólo el costo de la pintura amarilla. Con esta intervención, la profesora lleva a los estudiantes a tomar distancia de su razonamiento para comprender la necesidad de tomar en cuenta tanto la cantidad y el costo de la pintura amarilla como la cantidad y el costo de la pintura azul, para realizar la mezcla. La maestra contribuye así, a organizar los procedimientos que los alumnos van haciendo para resolver el problema, es decir, proporciona una ayuda tipo 2.

En el siguiente diálogo se muestra cómo algunos alumnos participan explicando la fuente del error cometido antes y exponiendo otros procedimientos, sin embargo se presenta un conflicto al no considerar las cantidades de pintura que son requeridas para elaborar la mezcla:

> **Ma:** ¡Tiempo chicos! A ver, ¿quién propone? ¿Es correcto lo que estaban haciendo hace unos momentos, dividir setecientos entre dos?
>
> **Aos:** ¡No!
>
> **Ma:** ¿Por qué?
>
> **Ao4:** Porque setecientos nomás era de la amarilla.
>
> **Ma:** ¡Ajá! Setecientos nada más era el costo de la pintura amarilla, entonces ahí teníamos un error. ¡Ajá! (*Señalando a un alumno).*
>
> **Ao2:** Teníamos que sumar lo de la pintura azul y lo de la pintura amarilla y de lo que nos saliera teníamos que poner la respuesta.
>
> **Ma:** ¡Ok! (*da la palabra a otro alumno)*
>
> **Ao6:** Este… de la pintura amarilla y la azul lo teníamos que dividir y después sumarla. Y así… yo pensaba que me salía el litro y lo dividí otra vez y me salió lo de medio litro.
>
> **Ma:** ¡Ok! ¿Y cuánto es tu respuesta, por el momento?
>
> **Ao6:** Doscientos cincuenta pesos.
>
> **Ma:** Doscientos cincuenta, ok. Por el momento no vamos a ver quién tiene la razón o quién no, si hay errores o aciertos, vamos a proseguir ¿estamos de acuerdo? (…)

A pesar del error en el procedimiento expuesto por un alumno (Ao6), es posible identificar la movilización de adaptaciones del conocimiento de tipo A1. El alumno reconoce la configuración del problema y la posibilidad de aplicar dos tipos de operaciones: la división y la suma.

Vimos que aunque la maestra trata de hacer partícipes a los alumnos, haciéndoles preguntas e incorporando sus respuestas a la discusión, conserva para sí el control de la clase, es ella quien confronta las respuestas y orienta la identificación de los datos del problema, valida los resultados, determina el tiempo para cada actividad y guía el avance de la sesión.

Sus intervenciones se constituyen en ayudas tipo 1, puesto que contribuyen a simplificar el problema al permitir la identificación de aquellos datos que deben ser tomados en cuenta en la resolución. Asimismo, preparan el camino para la posterior introducción de un método de solución, al ir haciendo ver errores en los procedimientos de los alumnos y evitar aceptar una respuesta como correcta. Esto último, pudo haber sido también en atención a la sugerencia del libro para el maestro en la que se indica no adelantar resultados o estrategias de solución (SEP, 2006b), con ello además, deja abierta la posibilidad de continuar explorando el problema.

A continuación, la maestra lee los problemas I y II del apartado *Manos a la obra*, explicando los planteamientos y pidiendo al grupo las respuestas. Los alumnos consideraron correcto el planteamiento hecho en el problema I en el que se propone resolver el problema inicial a partir de la suma de los costos de un litro de pintura azul y de un litro de pintura amarilla, luego dividir entre cuatro para obtener el costo de medio litro de pintura verde claro. El procedimiento presentado puede ser lógico para los estudiantes debido a que se apega al uso de factores internos lo que puede ser parte de sus conocimientos previos y a que se explicita el procedimiento utilizado, cosa que no sucede en el problema II.

En cambio, los alumnos consideraron que en el problema II la respuesta era que le cobraron mal a Manuel, quien pagó $290 por medio litro de pintura verde claro. Aunque el propósito de este problema, según el libro para el maestro, era precisamente hacer ver que el procedimiento empleado en el problema I era incorrecto, es probable que los alumnos no lo descubrieran debido a que no se ofrece un procedimiento para obtener este resultado y a que ya habían aceptado la respuesta dada en el problema I.

A pesar de no haberse cumplido el propósito de los problemas I y II, la maestra no profundiza en los resultados, probablemente para mantener vigente el problema inicial y centrar el interés de los alumnos en la resolución del problema III del apartado *Manos a la obra*.

En el siguiente diálogo podemos ver cómo la profesora plantea el problema e interviene inmediatamente para hacer explícitas las características de las tablas presentadas y la forma en que deben completarse:

> **Ma:** Dice: (*lee en el libro*) *"completen las siguientes tablas, para calcular los costos de ciento cincuenta mililitros de pintura azul, de trescientos cincuenta mililitros de pintura amarilla*". Y tenemos las siguientes tablas que son las mismas que ustedes tienen en su libro. ¿Estamos de acuerdo? *(en el pizarrón ha dibujado las siguientes tablas:)*

Cantidades de pintura azul	*Costo de la pintura azul*
1 000 ml	
100 ml	
50 ml	
150 ml	

Cantidades de pintura amarilla	*Costo de la pintura amarilla*
1 000 ml	
100 ml	
50 ml	
150 ml	

Ma: Bien, la primera tabla nos dice: cantidades de pintura azul, nos habla de mil mililitros que corresponderían a un ¿qué?...

Aos: ¡Litro!

Ma: A un litro, efectivamente. Y ya nos daría la cantidad… ¿Cuánto es de mil mililitros o de un litro? ¡Trescientos pesos!

Aos: ¡Trescientos pesos! *(responden a una voz, junto con la maestra).*

Ma: (*escribe "300" en el pizarrón)* ¡Muy bien! Y nosotros tenemos que sacar el resto de las cantidades.

Como vemos en el diálogo siguiente, algunos alumnos se adelantaron a dar el primer resultado de la tabla correspondiente a la pintura azul. Sin embargo, la profesora no retoma en el momento dicho resultado, antes continúa explicando acerca del contenido de las tablas y propone un método de solución. Sus intervenciones se constituyen nuevamente en ayudas tipo 1, esta vez, además de simplificar el problema, hace referencia a dos procedimientos mediante los cuales es posible resolver el problema: el uso de la tabla y el uso de la regla de tres.

Aos: ¡Treinta!

Ma: ¡Ajá! A ver, ahorita (*continúa escribiendo en el pizarrón)*. Así como tenemos la tabla de la pintura azul, también tenemos la tabla de la pintura amarilla. Ayúdenme ustedes, saquen sus calculadoras por favor. Ok. Y aquí, bueno, yo les propondría... podemos hacerlo directamente así con la tabla, o en mi caso también sugiero lo que ya les comentaba en las clases pasadas, el uso de la regla ¿de?… ¡tres! Que al final se aplica el uso de la regla de tres allá abajo. ¿Qué decíamos? ¿Cómo vamos a utilizar esta regla de tres? ¿Alguien lo recuerda? ¿No? ¿Ya se les olvidó tan pronto?

Ao1: ¡Ah! ¿Sumar un número al número anterior?

Ma: No eso era en sucesión de figuras…

Ao5: ¿Practicando?

Ma: ¿Cómo?

Ao5: Practicando

Ma: ¡Ok! Vamos a checarlo, y ahorita ya (…)

Vimos que aunque la profesora hace referencia al uso de la regla de tres como un tema visto en clases anteriores, parece que los alumnos no la conocen o no la recuerdan. Ante esta situación, la maestra opta por retomar los resultados que los estudiantes habían dado anteriormente. En el siguiente diálogo se muestra la discusión sobre los procedimientos que los alumnos utilizaron:

Ma: (…) Bien, alguien me decía por ahí que ya tenía la respuesta.

Ao4: ¡Yo! ¡Yo!

Ma: ¡A ver!

Ao4: ¡Treinta!

Ma: ¿Cómo sale ese treinta? ¡Víctor!

Ao2: (I*nterviene*) ¡Se le va quitando un cero!

Ao4: Se le va quitando un cero, de un litro son trescientos pesos, de cien son treinta pesos, y de cincuenta son quince.

Ma: ¡A ver, a ver! ¡Pero aquí no me corresponde! Aquí sí le quite un cero, pero a ver, al treinta le quito un cero y me quedan tres. ¿Serían tres pesos? ¿Es correcto de cincuenta?

Aos: ¡No!

Ma: ¡No! Porque entonces aquí me queda un tres (…)

En las respuestas de los alumnos, se puede identificar el uso de factores internos puesto que las cantidades se están dividiendo simultáneamente entre diez y, aunque no se explica el procedimiento, suponemos que se obtuvieron mitades para encontrar el costo de 50 ml de pintura azul (ver figura 4.9).

FIGURA 4.9. PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN EMPLEADO POR LOS ALUMNOS

	Cantidades de pintura azul	Costo de la pintura azul	
÷ 10	1 000 ml	$300	÷ 10
÷ 2	100 ml	*$ 30*	÷ 2
	50 ml	*$ 15*	
	150 ml		

Los alumnos realizan adaptaciones A1, al reconocer que la variación de las cantidades debe ser de manera proporcional, en este caso, primero obtener la décima parte y luego la mitad de ambos conjuntos de cantidades.

No obstante, aunque las respuestas obtenidas son correctas, el procedimiento expuesto es invalidado por la profesora al hacer notar que, si se sigue el procedimiento de quitar un cero a las cantidades de una fila, para obtener las de la fila siguiente, ello no permitiría encontrar el costo de cincuenta mililitros de pintura azul, pues quedarían tres y no quince. Hizo esta observación a pesar de que los alumnos dieron un resultado correcto (quince).

Es posible que la maestra buscara que los alumnos dieran una explicación más convencional sobre lo que hicieron, debido a que la eliminación de ceros sólo es válido para divisiones entre diez y sus potencias. También es probable que haya aprovechado la explicación, no convencional del alumno, para hacer ver que el “quitar ceros” no es un método general y favorecer, con ello, el uso de la regla de tres, el cual pretendía introducir.

Consideramos que los alumnos hicieron un uso efectivo de los factores internos para la resolución del problema III. En el siguiente diálogo observamos cómo uno de los alumnos, incluso, identificó el factor interno compuesto (÷20):

Ma: (…) Eh… me dices tú que es quince, ¿por qué es quince Oscar?

Ao1: Porque si mil lo dividimos entre veinte… *(Otros alumnos están levantando la mano, pero no se les da la palabra)*

Ma: ¿Mil entre veinte?

Ao1: ¡Ajá!

Ma: ¡A ver, van haciendo las operaciones que su compañero les va diciendo! (*dirigiéndose a todo el grupo*)

Ao1: Mil entre veinte es igual a cincuenta. Este… eso también lo tenemos que dividir, trescientos entre veinte, igual… y nos sale igual a quince

Ma: ¿Trescientos entre veinte? ¿Y te sale 15?

Aos: ¡Sí!

Ma: Y entonces de cincuenta mililitros, ¿cuánto es?

Ao1: Quince pesos

Ma: ¡Quince pesos!

Ao1: Porque hicimos casi la misma…

Ao6: ¡la mitad de treinta es quince! Y la mitad de cien es cincuenta.

Maestra: Bueno ahí tú ya me estás diciendo otro procedimiento. Tú dijiste de cien… (*Corrige*) De mil, bajamos a los cien y son los treinta. Dices tú, como de cien, cincuenta es la mitad, por eso de treinta sacas quince... En el caso tuyo Oscar, ¿qué dividiste para que saliera el quince? *(la maestra anota en el pizarrón el resultado y el procedimiento dado por ambos alumnos).*

Ao1: Trescientos entre veinte

Ma: ¿Y te sale quince?

Ao1: ¡Sí!

Ma: Mi pregunta es, ¿por qué entre veinte?

Ao1: Porque… este… si lo dividimos, mil entre cincuenta da igual a veinte. Y veinte… ese veinte lo dividí entre trescientos y me dio quince.

Ma: ¡Ah Caray! Bueno, ahí tengo yo unas pequeñas dudas...

Los alumnos ponen de manifiesto sus conocimientos previos sobre el uso de factores internos. Sin que se haga explícita esta noción, los alumnos dan explicaciones precisas del procedimiento que utilizan. Sin embargo, parece ser que la profesora, si bien identifica el uso de factores internos (entre diez <÷10> y entre dos <÷2>) que expone un estudiante (Ao6), no reconoce el factor (÷20) que el otro alumno utiliza al encontrar la relación entre mil mililitros y cincuenta mililitros de pintura azul $\left(\frac{1000}{50} = 20\right)$.

En el siguiente diálogo puede observarse cómo los alumnos emplean también la propiedad aditiva que, además, como dijimos en el análisis *a priori* de esta sesión, se ve favorecida por el tipo de cantidades contenidas en las tablas:

Ma: Ok. En el trescientos cincuenta… ¡A ver! Siguiéndonos con esa versión Axel, la que estabas haciendo.

Ao6: Ya nada más sumo…

Ma: Sumas el de cien con el cincuenta.

Ao6: ¡Ajá!

Ma: ¿y te da?

Aos: ¡Cuarenta y cinco!

Ma: ¿A ver cómo?

Aos*:* ¡Treinta más quince!

Ma: ¡Ah ok! Sí, por eso. Sumamos los cien y los cincuenta y ya me dan los ciento cincuenta mililitros. Y entonces, Axel, si yo te pidiera seiscientos treinta y tres... ¿Dan?

Ao6: ¿Seiscientos treinta y tres?

Ma: Sí, seiscientos treinta y tres mililitros. Si ahora yo te pidiera seiscientos treinta y tres mililitros. ¿Cómo le harías Axel?

Ao6: Multiplicar.

Ma: ¡Ajá!

Ao6: Seis por treinta.

Ma: Seis por treinta... ¿Y cuánto te daría de resultado? (*hace una breve pausa esperando la respuesta del alumno)* ¡Vamos a dejar la respuesta que ahorita me des y ahorita vamos a seguir y vamos a revisar tu respuesta!

Aunque parecía ser que la profesora estaba dando por terminada la discusión, los alumnos continuaron realizando las operaciones y el estudiante a quien la profesora cuestionó, dio un resultado aproximado:

Aos: ¡Ciento ochenta!

Ao6: ¿Cuánto me dijo de mililitros?

Ma: Seiscientos treinta y tres.

Ao6: ¡Ciento noventa!

Ma: Bueno, no ha llegado su compañero a una respuesta correcta, pero él piensa que oscila la respuesta entre ciento ochenta, ciento noventa. Por el momento vamos a dejar pendiente esto *(la maestra escribe en el pizarrón la respuesta dada por el alumno Ao6).*

La profesora no verifica la respuesta dada por el alumno, la cual es una muy buena aproximación (190) al resultado correcto (189.9). Aunque lo anota en el pizarrón para su posterior revisión, aclara que no es una “respuesta concreta”, como refiriéndose a que no es exacta, o a que no se puede verificar que sea correcta.

Consideramos que el conocimiento y manejo de procedimientos sobre la marcha que tienen los estudiantes ofrece una importante oportunidad de aprendizaje sobre la proporcionalidad, acorde con el propósito de la sesión, indicado en el libro de texto. Los alumnos demostraron el empleo de adaptaciones A1 de sus conocimientos previos en el reconocimiento de la variación proporcional en los conjuntos de cantidades, la identificación de los factores internos y su uso para el cálculo de cantidades; reconocieron también el uso de la propiedad aditiva de las cantidades de un mismo conjunto y la emplearon para calcular los valores faltantes.

Sin embargo, al parecer el propósito de enseñanza de la profesora estuvo enfocado al aprendizaje de la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad. Sus intervenciones se constituyeron en ayudas tipo 2, al confrontar, mediante preguntas, los procedimientos de los alumnos, llevándolos a tomar distancia de ellos para considerar que, si bien obtenían resultados correctos, no eran generales, por lo que su uso en ciertos casos se complicaba. Con ello abrió el camino para la introducción de la regla de tres.

- ***La introducción de la regla de tres.***

La profesora hizo la siguiente presentación de la regla de tres, haciéndolo ver como un método general que supera las dificultades que pudieran presentarse con el uso de procedimientos sobre la marcha:

> **Ma:** Ahora sí, vamos a pasar a la siguiente forma, ustedes venían en esta deducción y era fácil, ¿no? Quitaban, colocaban, sumaban o restaban y de esa forma les estaban dando los resultados, pero ¡Oh sorpresa!, cuando llegamos a esta pregunta en seiscientos treinta y tres, donde ya no es cincuenta, donde ya no es doscientos cincuenta, donde ya no hay números tan cerrados, como que ya tenemos un poquito de conflictos. ¿Estamos de acuerdo? Vamos a ver la siguiente forma en la que se pudiera solucionar.

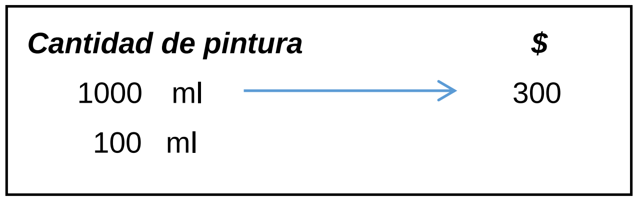
En el siguiente diálogo muestra la manera en que la maestra expuso el modo de utilizar la regla de tres como una fórmula, es decir, detallando el acomodo de los datos y las operaciones que hay que realizar, sin explicar la propiedad de los productos cruzados en una igualdad de razones, la cual, es el fundamento de este procedimiento:

> **Ma:** Bien, yo les propongo lo siguiente, sí mil mililitros es a trescientos pesos, o sea, un litro a trescientos pesos *(la maestra utiliza la tabla dibujada en el pizarrón para señalar los datos del ejercicio).* Entonces: ¿cien mililitros a cuánto corresponde? Es aquí donde yo les digo, esta herramienta tan importante dentro de las matemáticas es la “regla de tres”, *(escribe en el pizarrón 1000 --- 300)*. Observen bien cómo podemos determinar y que se puede utilizar ahí en la tabla, solo que la voy a hacer por separado. Es muy importante, muy, muy importante que siempre determinemos en la parte de arriba de qué nos está hablando, si es de cantidad o si es de otro tipo de situación, en este caso los mil mililitros es la cantidad ¿de qué?... (*Escribe en el*

pizarrón, arriba de 1000, "cantidad de pintura"). ¡Cantidad de pintura! Y ya nos específica un color, ¿estamos de acuerdo? ¿Y nos la mide en cuánto?

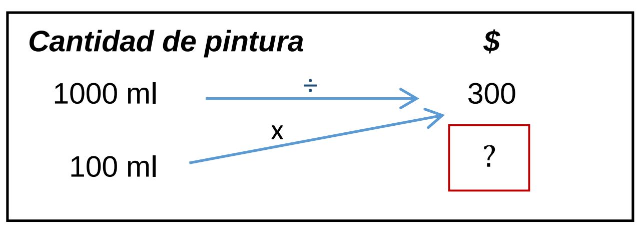
Aos: ¡Mililitros!

Ma: Y aquí es el costo. Estamos de acuerdo. ¿Sí o no? *(El esquema queda de la siguiente manera)*



Aos: ¡Sí!

Ma: Aquí nos dice: si un litro corresponde a mil mililitros, estos mil mililitros cuestan trescientos pesos. Mucha atención, no se pierdan en esta situación. Ahora, quiero saber cuánto voy a pagar por cien mililitros y aplicamos la regla de tres. Que yo les decía que la regla de tres consiste en: tenemos una incógnita, no conocemos este valor que es el precio de cien mililitros. Bien, qué vamos a hacer como primer paso: ubicamos mililitros con mililitros, y aquí van a ir pesos con pesos. ¿Estamos de acuerdo? No puedo combinar mililitros con pesos, porque ya ahí tendría un error. La primera operación que nosotros vamos a hacer, va a ser una multiplicación. El resultado que nosotros obtengamos a partir de esa multiplicación, entonces ahora lo vamos a concluir con ¿una?... ¡División! Hagan lo que les estoy diciendo, cien por trescientos, entre mil, rápido. Todos, todos, todos. Cien por trescientos, entre... *(El esquema de la regla de tres queda, en el pizarrón, como muestra la siguiente figura)*



Aos: ¡Treinta!

Ma: ¿Cuál será el costo entonces de cien mililitros?

Aos: ¡Treinta!

Ma: ¿Es correcto con lo que ustedes decían hace unos momentos?

Aos: ¡Sí!

Al finalizar la anterior explicación, la profesora pide aplicar la regla de tres para encontrar el segundo dato de la primera tabla. Como lo vemos en el siguiente diálogo, ella indica el acomodo de las cifras en el pizarrón y las operaciones que los alumnos hacen en la calculadora. Así, los resultados son enunciados rápidamente

Ma: Vamos con el siguiente. Ahora vamos a hacerlo con el de… otra vez tenemos mil mililitros que es el litro, el costo sigue siendo el mismo ese no varía *(escribe la regla de tres con los datos que está mencionando. Suena el timbre de receso),* ¿pero ahora por cuánto lo vamos hacer?

C.		*$*
1000	$\rightarrow$	300
50		

Ao: ¡Por cincuenta!

Ma: Por cincuenta, y ¿cuánto me da?

Ao: ¡Quince!

Ma: (*Escribe la respuesta en el pizarrón)* ¿Estamos de acuerdo?

Aos: ¡Sí!

Ma: ¿Qué pasa entonces con ciento cincuenta mililitros? Háganlo rápido, ¡ya, ya! No la coloco ahí. ¡Ricardo hay que hacerla! ¡Y rápido porque nos ganó el tiempo!

Aos: ¡Cuarenta y cinco!

Ma: ¿Estamos de acuerdo?

Aos: ¡Sí!

La profesora valida los resultados dados por los alumnos. También pregunta por el costo de seiscientos treinta y tres mililitros, el cual fue un dato que introdujo antes para hacer ver a los estudiantes que el uso de procedimientos sobre la marcha, no era un método general y que presentaba complicaciones con ciertos números. En el siguiente diálogo podemos ver que la maestra pondera la efectividad de la regla de tres aludiendo a que permite encontrar respuestas "concretas" sin atender al interés de los alumnos por haber encontrado un resultado muy aproximado a partir del uso de factores internos:

Ma: ¿Qué pasa con la cantidad de su compañero? Que le preguntaba yo hace rato… ¿Axel?, ¿Qué pasaría?, ¿Cuánto sería?

Ao6: Yo lo hice y me salió ciento ochenta y nueve punto nueve.

Ma: ¡Pero ahora sí, ya te da una respuesta concreta! ¿Estamos de acuerdo? ¿Ciento qué…?

Aos*:* Ciento ochenta y nueve punto nueve.

Ao1: ¡Casi ciento noventa…! ¡Casi!

Ma: *(sin atender al alumno 1)* ¿Estamos de acuerdo? ¡Bien! Me voy a robar dos minutitos de su receso, inmediatamente háganme la de la amarilla.

La profesora solicita resolver la segunda tabla, a lo cual los alumnos responden inmediatamente, es posible que se deba a que los alumnos hicieron las operaciones indicadas con apoyo de la calculadora y de los esquemas colocados en el pizarrón por la maestra, aunque también cabe la posibilidad de que simplemente se den los valores que ya habían obtenido antes mediante el uso de factores internos y de la propiedad aditiva.

La maestra recibe respuestas sin verificar el procedimiento, simplemente las acepta y las anota en el pizarrón. Se observa, además, que es un número reducido de alumnos los que participan en la clase interactuando con la profesora. Seguir la actividad de los alumnos es algo sumamente difícil de realizar en la enseñanza, además en este caso, el tiempo de la clase había terminado y aún quedaban problemas pendientes. No obstante la profesora continuó hasta concluir las actividades planteadas en la primera sesión del libro de texto.

Pidió entonces complementar las tablas con las que se concluye la resolución del problema inicial y como vemos en el siguiente diálogo, dirige nuevamente la actividad:

Ma: Bien, vamos a las cantidades de abajo, llenamos tablas de abajo por favor. Dice: la cantidad de pintura amarilla de trescientos cincuenta, corresponde a doscientos cuarenta y cinco, ¿estamos de acuerdo? La obtenemos de la tabla. Doscientos cuarenta y cinco. La cantidad de pintura azul, que son ciento cincuenta, ¿cuánto pagamos de ciento cincuenta?

Ao: Cuarenta y cinco pesos.

Ma: ¡Nos vamos a las tablas!

Aos: Cuarenta y cinco pesos.

Ma: ¡Cuarenta y cinco! ¿Qué pasa para obtener la final, el medio litro? ¿Qué tenemos que hacer?**...** ¡Una suma! ¿Y cuánto nos da entonces?

Ao: Doscientos noventa.

Ma: ¡Doscientos noventa! ¿Estamos de acuerdo que ese es el precio?

Aos: ¡Sí!

Maestra: ¿Estarían bien los de la telesecundaria, que analizamos hace rato?

Ao: No

Ma: ¡No!

Observamos que no se profundizó en la confrontación del procedimiento utilizado por "los alumnos de la otra telesecundaria", planteado en el problema II, el cual los alumnos habían dado por correcto; Solamente su utilizó el resultado para compararlo con el que se obtuvo finalmente. Tampoco se retomaron los procedimientos de los alumnos, los cuales, aunque no se dijo que fueran incorrectos, quedaron invalidados al mostrar las complicaciones que se generan ciertas cantidades.

La maestra solicitó a los alumnos que verificaran el resultado final utilizando la regla de tres; sin embargo, como se observa en el diálogo siguiente, parece darse cuenta de que no es posible plantearla e indica que ya se tiene el resultado, sin hacer notar esta situación.

Ma: ¿Y si lo hacemos ahora rápido mediante una regla de tres? ¿Cómo quedaría?

Ao1: Mil…

Ao6: ¡No! Doscientos noventa por trescientos.

Maestra: Ya obtenemos ahora sí, completamente… ¿cuánto cuesta el medio litro, entonces, de pintura verde claro? ¡Doscientos noventa!

Con el tiempo de la clase ya agotado, la profesora indica resolver el problema IV. Al parecer, esperaba que se aplicara la regla de tres y que se obtuvieran respuestas rápidas, pero se encontró con algunas dificultades, las cuales se muestran en el siguiente diálogo:

Ma: Tienen tres… (c*orrige)* ¡Dos preguntas abajo! ¿Cuánto cuestan entonces ochocientos mililitros de pintura verde claro? ¿Quién me quiere decir?

Ao1: Como ochocientos

Ma: ¡A ver! ¡Ya! Ya llegamos a algo concreto, a ver chicos, llegamos a la conclusión que medio litro de pintura verde claro ¿cuánto cuesta?

Ao: ¡Doscientos noventa!

Ao6: ¡Yo! ¡Yo!

Ma: ¡A ver! ¿Cuánto sería de ochocientos?

Ao6: ¡Ah! ¿Por ochocientos?

Ma: Ajá

Ao6: ¡Ah no! ¡No!

Maestra: ¿Cómo aplico esa regla de tres? ¡A ver! ¡Rápido, rápido!

Ao1: Trescientos (*corrige)* ¡Doscientos noventa entre cinco!

La respuesta del alumno (Ao1) parece estar encaminada a la búsqueda de factores internos. Es probable que el estudiante buscara obtener la quinta parte de doscientos noventa, puesto que es el costo de quinientos mililitros de pintura verde claro; con ello obtendría el costo de cien mililitros de pintura verde claro y podría obtener el costo de ochocientos mililitros al multiplicar por ocho.

En el libro para el maestro también se propone la solución a este problema mediante el uso de factores internos:

> Otra forma de resolver es: Como 500 ml cuestan $290, 1 ℓ cuesta lo doble: $580; entonces 100 ml cuestan $58 ($580 ÷ 10). Se multiplica 58 x 8 para obtener el precio de 800 ml es $464; 120 ml de verde claro cuestan $69.60, porque como 100 ml cuestan $58 y 10 ml cuestan $5.80 pesos, entonces 20 ml cuestan $11.60, se suma $58 + $11.60 = $69.60 (SEP, 2006b: 112).

Sin embargo, como se muestra en el siguiente diálogo, la profesora invalida inmediatamente la respuesta del alumno, e insiste en la aplicación de la regla de tres:

Ma: ¡No! A ver, ¿cuánto tengo de cantidad?

Ao: Ochocientos

Ma: ¡No! ¿Cuánto tengo de cantidad?

Ao: ¡Doscientos!

Ma: ¡Doscientos!... ¿Medio litro es doscientos cincuenta?

Aos: ¡No!

Ma: ¿Cuánto tiene medio litro?

Ao: ¡Doscientos cincuenta!

Ma: ¡No! ¿Medio litro?

Ao: ¡Yo! ¡Yo! ¡Cuatrocientos sesenta y cuatro!

Ma: ¡No, no! ¡A ver, a ver! Escúchenme la pregunta. ¿Cuántos mililitros hay en medio litro?

Aos: ¡Quinientos!

Ma: ¡Quinientos! Ok. Seguimos aquí, perdón por la desubicación (…)

La pregunta "¿Cuánto tengo de cantidad?" genera confusiones y los alumnos respondían refiriéndose a diferentes cantidades. Algunos realizaban operaciones e indicaban sus resultados, otros parecían sólo estar adivinando el número que la profesora esperaba oír. En el siguiente diálogo observamos que ante la confusión, la profesora replantea la pregunta y continúa la actividad guiando el planteamiento de la regla de tres, pues, al parecer, los alumnos aún tenían dificultades en su aplicación:

Ma: (…) Aquí, quinientos mililitros y con eso está la respuesta de pintura verde claro, porque ya la tenemos ahora sí de verde claro, corresponde a, ¿cuánto en cantidad? *(la maestra señala en el pizarrón el número doscientos noventa)*

Aos: ¡Doscientos noventa!

Ma: ¿Cuánto me está pidiendo ahora?

Aos: ¡Ochocientos!

Ma: ¿Dónde van esos ochocientos, de este lado o de este lado? (*señalando el pizarrón).*

Aos: ¡De este lado!

Ma: Del lado de la pintura. ¿Cuánto es?

Ao1: ¡Yo! Son doscientos cuarenta y seis.

Ma: Es correcta tu respuesta, doscientos cuarenta y seis (…)

La profesora solicita, entonces, resolver la segunda pregunta. Insiste en la aplicación de la regla de tres mostrando que sólo hay que cambiar la cantidad de mililitros solicitados. Sin embargo, los alumnos no obtienen la respuesta correcta, por lo que la maestra les indica explícitamente las operaciones que deben hacer, tal y como se muestra en el siguiente diálogo:

Ma: (…) Utilizando la misma regla de tres, esto ya no cambia, porque ésta es ya es la cantidad de pintura azul y éste es el costo. Ahora ya no me pide de ochocientos, ahora me pide de ciento veinte, ¿cuánto es?

Ao: ¿De ciento veinte?

Ma: Sí, de ciento veinte mililitros. Ahora ya no me pide de ochocientos, me pide de ciento veinte. ¡Apliquen la misma regla! La misma, pero ahora ¿qué cambia? El ochocientos. ¿Ahora de cuánto me está pidiendo?

Aos: Ciento veinte.

Ma: Entonces mismo procedimiento. ¿Cuánto es?

Ao: Treinta y seis

Ma: ¿Treinta y seis? ¡No!

Ao: Son…

Ma: ¡A ver! ¡No son adivinanzas! ¡Apliquen la regla! Lo único que van a hacer es borrar, en vez de ochocientos ahora son ciento veinte.

Ao: ¡Maestra, yo, yo! ¡Maestra, yo sé! Son ciento cuarenta y cinco… ¡Ah no!

Ma: ¡No!

Aa: ¿Treinta y cuatro punto ocho?

Maestra: ¡No!

Ao: ¿Seiscientos noventa y seis?

Ma: ¡Checa bien tu cantidad!

Ao3: ¿Cincuenta y seis?

Ma: ¡No! ¡A ver chicos! Hagan bien su multiplicación, ciento veinte por doscientos noventa, entre quinientos. ¡Sus calculadoras!

Ao: Sesenta y nueve punto seis.

Ao2: ¡Sí!

Ma: ¿Por qué entonces…? ¿Qué estaban haciendo? ¿Por qué les estaba dando tantos errores? ¿Qué estaban haciendo?

Ao: Yo estaba multiplicando por 1000.

Ma: ¡No! porque ya les dije que ya habíamos llegado a algo concreto, que era el medio litro de la pintura verde claro. ¿Estamos de acuerdo? Hasta ahí suspendemos y van a salir a su receso.

Luego del receso la profesora retomó la actividad y dirigió la resolución del quinto problema, para ello, dictó a los alumnos las operaciones que habían de hacer para resolver las reglas de tres que ella iba planteando en el pizarrón, sin dar lugar al trabajo autónomo de los alumnos.

- ***En resumen.***

Con esta serie de eventos sucedidos en la clase, vemos que el uso de factores internos y de la propiedad aditiva para la resolución de problemas de proporcionalidad, son planteados con base en el propósito y los problemas propuestos en el libro de texto. Ambos procedimientos son utilizados por los alumnos, quienes realizan adaptaciones A1 al reconocer la relación que guardan las cantidades dadas, al identificar los factores internos y aplicarlos junto con la propiedad aditiva para resolver los problemas que se les plantean. No obstante, es probable que lo hagan desde conocimientos previos no institucionalizados.

Pero el desarrollo de las actividades en la clase tomó un rumbo específico a partir de las intervenciones de la profesora, al centrarse en la simplificación de los problemas y la implantación de un método: la regla de tres; lo cual se constituyó en ayudas tipo 1. La profesora también hizo, de vez en cuando, recapitulaciones para aclarar los procedimientos que los alumnos exponían o para ayudarlos a identificar errores o la complejidad derivada del uso de un método, lo cual forma parte de ayudas tipo 2.

Consideramos que el propósito planteado en los libros de texto, difiere del que la profesora tenía previsto con el uso de la regla de tres y que ella justifica bajo el objetivo de que los alumnos conozcan diversos métodos para resolver problemas de proporcionalidad[33].

Percibimos también que la regla de tres se presentó como un procedimiento general, efectivo y relativamente fácil de aplicar, toda vez que no se profundizó en su fundamentación teórica, sino que se explicó a modo de fórmula para la sustitución y operación de los datos dados en un problema. Asimismo, se hizo notar su ventaja sobre los procedimientos sobre la marcha (factores internos y propiedad aditiva), utilizados por los estudiantes.

[33] Entrevista posterior a la observación.

4.1.2. Segunda Sesión. De la regla de tres al valor unitario.

La segunda clase que observamos estuvo dedicada la resolución de los problemas presentados en la S*esión 2* de la *Secuencia 6* del libro de texto. El propósito de esta sesión es *utilizar el valor unitario en problemas de escalas para determinar valores faltantes en situaciones directamente proporcionales* (SEP, 2006b: 113).

La *Sesión 2* está organizada en cuatro apartados. El primero, *Para empezar*, proporciona información sobre el uso de la escala en la arquitectura, lo cual es un preámbulo para el planteamiento del problema inicial en el apartado *Consideremos lo siguiente*. El tercer apartado, *Manos a la obra* incluye tres problemas y el último apartado, *A lo que llegamos*, contiene información sobre el uso del valor unitario para la resolución de los problemas presentados.

A continuación exponemos el análisis *a priori* de los problemas resueltos y el análisis *a posteriori* de las actividades realizadas en la segunda clase.

4.1.2.1. Análisis *a priori* de los problemas propuestos

La *Sesión 2* se compone de cuatro problemas. Un problema inicial del apartado *Consideremos lo siguiente* y los problemas I, II y II *del aparado Manos a la obra*, los cuales analizamos a continuación:

- ***El problema inicial.***

Por sus características, el problema inicial de esta sesión (ver figura 4.10) puede clasificarse como un problema de valor faltante pues para cada una de las cantidades que se deben calcular, puede establecerse una relación cuaternaria, de tres datos conocidos y uno desconocido.

FIGURA 4.4. PROBLEMA INICIAL[34]

La figura 1 es el plano de una casa dibujado a una escala de **2.5** cm a **4** m (es decir, dos centímetros y medio del dibujo representan cuatro metros de la medida real de la casa).

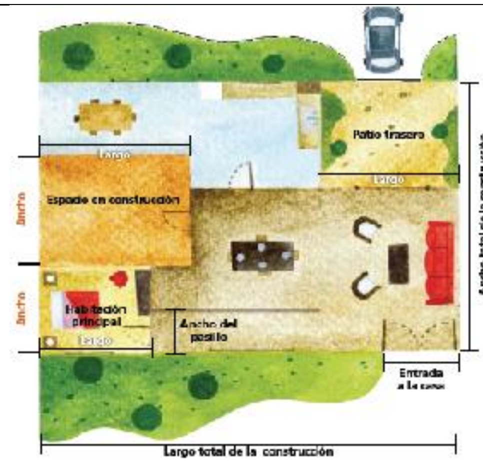


Figura 1

Completen la siguiente tabla para encontrar las medidas reales que tendrá la casa.

	Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
Ancho de la habitación principal	2.5	400
Ancho del pasillo	1.25	
Ancho total de la construcción	7.5	
Largo del patio trasero	3.75	
Largo del terreno	11	
Largo del espacio en construcción	4	

De entrada, los datos conocidos que se tienen son las medidas reales y en el plano, del ancho de la habitación principal, así como la medida en el plano de cada uno de los espacios cuya medida real desea saberse. El dato desconocido, en cada caso, es la medida real de cada una de las habitaciones de la casa.

En la figura 4.11 se presentan las relaciones cuaternarias que pueden formarse entre las cantidades, cada una incluye un valor faltante. Cabe aclarar que es posible establecer otras diferentes a partir de los datos que se van encontrando conforme se resuelve el problema.

[34] Tomado de SEP, 2006a: 78.

FIGURA 4.11. RELACIONES CUATERNARIAS QUE PUEDEN ESTABLECERSE EN EL PROBLEMA INICIAL.

Ancho del pasillo (v)	
Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
2.5	400
1.25	v

Ancho total de la construcción (w)	
Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
2.5	400
7.5	w

Largo del patio trasero (x)	
Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
2.5	400
3.75	x

Largo del terreno (y)	
Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
2.5	400
11	y

Largo del espacio en construcción (z)	
Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
2.5	400
4	z

Las primeras tres cantidades relacionadas con valores faltantes en la tabla del problema inicial favorecen el uso de procedimientos sobre la marcha los cuales pueden utilizarse como se muestra en la figura 4.12.

FIGURA 4.12. USO DE PROCEDIMIENTOS SOBRE LA MARCHA PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL DE LA SESIÓN 2.

		Medida del plano (cm)	Medida real (cm)	
x3 ÷2	Ancho de la habitación principal	2.5	400	÷2 x3
	Ancho del pasillo	1.25	200	
÷2	Ancho total de la construcción	7.5	1200	÷2
	Largo del patio trasero	3.75	600	
	Largo del terreno	11		
	Largo del espacio en construcción	4		

Seguir este procedimiento demanda de los estudiantes, adaptaciones A1. Mediante ellas, los alumnos reconocen la variación proporcional entre las cantidades, identifican los factores internos y los utilizan para encontrar los valores faltantes. Otra posibilidad para resolver el problema es que reconozcan las configuraciones en las que es posible aplicar la propiedad aditiva y la usen para calcular las cantidades solicitadas.

Sin embargo, los procedimientos sobre la marcha se ven obstaculizados con las medidas del largo del terreno y del espacio en construcción, toda vez que los factores internos que los relacionan con el resto de las cantidades son números no enteros. Es así que para encontrar las medidas reales de estos espacios, se propicia la búsqueda del valor unitario, propósito de la sesión.

El valor unitario es un número entero (160 cm) y como sucede en las relaciones de proporcionalidad, coincide con el factor externo constante que en este caso se trata de un número sin dimensión, es decir, un factor escalar facilitando su uso y la comprensión de su significado. Aunque su cálculo podría dificultarse debido a que en el planteamiento del problema, la escala se expresa con unidades de medida distintas (2.5 cm a 4 m). No obstante, en la tabla, las medidas de la habitación principal que representan dicha escala, están dadas, ambas, en centímetros.

Reconocer la posibilidad de utilizar el valor unitario para resolver el problema, calcularlo y aplicarlo, requiere que los estudiantes realicen adaptaciones A1. El uso de este valor, no dado en los datos del problema, es también una adaptación A2, puesto que implica la introducción de un objeto matemático auxiliar en la resolución del problema.

- ***El problema I.***

El problema I (ver figura 4.13) se relaciona con el problema inicial y contempla tres preguntas acerca de los procedimientos realizados y los resultados obtenidos en él.

FIGURA 4.13. PROBLEMA I[35]

I. Comparen sus resultados y comenten:
   a) ¿Cómo calcularon las medidas reales de la casa?
   b) ¿Cómo calcularon el largo del terreno?
   c) ¿Cuántas veces más grande es la medida real del largo del terreno que la medida del largo del terreno en la figura 1?

Usando el valor unitario verifiquen la tabla de la página anterior.

El propósito del problema I es el de revisar los resultados y reflexionar sobre los procedimientos y sobre el significado del valor unitario. El libro para el maestro sugiere que se trabaje su explicación tanto con el uso de los procedimientos sobre la marcha, como con el uso del valor unitario.

- ***El problema II.***

El problema II (ver figura 4.14) también se refiere al uso de escalas, aunque se inscribe en un contexto diferente. Contempla la resolución de dos preguntas y la complementación de una tabla. Cada dato solicitado en ellas se constituye en un problema de proporcionalidad de valor faltante.

[35] Tomado de SEP, 2006a: 79.

FIGURA 4.14. PROBLEMA 2[36].
Resuelvan el siguiente problema: Un microscopio amplifica la imagen de un virus de 0.2 micrómetros a 120 micrómetros. a) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 0.4 micrómetros? b) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 1 micrómetro? Completen la siguiente tabla para calcular los tamaños reales de otros microorganismos.

Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
0.2	120
3	
4.5	
7	
8	

Con la primera pregunta se favorece el uso de factores internos para el cálculo del valor desconocido, toda vez que el factor es un número entero pequeño (x2), lo que lo hace fácil de identificar y utilizar; su identificación y empleo implica adaptaciones A1 por parte de los estudiantes.

En la segunda pregunta también es factible el uso de factores internos, en este caso se trata también de un número entero (x5). Una dificultad podría encontrarse en el paso del uso de números decimales, que se venía haciendo, al uso de números enteros, lo que podría complicar el cálculo del factor interno.

La resolución de esta pregunta comprende el cálculo del valor unitario, el cual puede encontrarse a través de los datos dados en el planteamiento del problema con el cociente: $\frac{120}{0.2}$. Este procedimiento implica también adaptaciones A1, mediante las cuales los alumnos reconozcan el uso de la división para el cálculo del valor unitario y la empleen para obtenerlo.

[36] Tomado de SEP, 2006a: 79 – 80.

Para el llenado de la tabla de la tercera consigna, es factible el uso del valor unitario calculado anteriormente, lo cual se favorece debido a que las cantidades involucradas se relacionan mediante factores internos que, si bien son enteros, son también relativamente grandes por lo que se dificulta su identificación. Seguir este procedimiento implica adaptaciones A1, en las que los estudiantes reconocen la posibilidad de utilizar el valor unitario y lo emplean en el cálculo de las cantidades solicitadas.

- ***El problema III.***

El problema III (ver figura 4.15) está relacionado con el problema anterior, contempla dos preguntas que llevan a reflexionar sobre la función y el significado del valor unitario.

FIGURA 4.15. PROBLEMA 3[37]

III. Comparen los resultados de sus tablas y comenten:

a) ¿Cuál es el valor unitario que permite pasar del tamaño real al tamaño que se ve en el microscopio?
b) ¿Cuántas veces más chico es el tamaño real de una célula que el tamaño de la célula vista en el microscopio?

- ***En resumen.***

De manera general, consideramos que los problemas planteados en la *Sesión 2*, favorecen el uso del valor unitario como procedimiento de solución para problemas de proporcionalidad, acorde con el propósito planteado en el libro de texto. El reconocimiento de esto moviliza adaptaciones del conocimiento A1, en los estudiantes.

[37] Tomado de SEP, 2006a: 80.

4.1.2.2. Análisis *a posteriori* de los problemas resueltos en clase.

La clase se desarrolló en torno a la solución de los problemas planteados en la *Sesión 2* de la *Secuencia 6* del libro de texto. Identificamos tres momentos mediante los cuales describimos, a continuación, las actividades de enseñanza realizadas por la profesora.

- ***El planteamiento del problema inicial y el uso de procedimientos sobre la marcha***

La profesora da inicio al estudio de esta sesión indicando el propósito y dando lectura a los apartados *Para empezar* y *Consideremos lo siguiente*. Como se muestra en el siguiente diálogo, luego de leer el problema, la maestra hace una descripción del dibujo en el que se apoya el planteamiento y del ejemplo de uso de la escala dado en el primer apartado.

Ma: Ahí en su libro tenemos el plano de esa casa. ¿Sí, ya la lo pudieron observar? Tenemos el espacio en construcción, la habitación principal, el ancho del pasillo, la entrada de la casa y el ancho total de la construcción, asimismo el patio trasero. En la parte de abajo tenemos una tabla y dice: (lee en el libro) "*Completa la siguiente tabla para encontrar las medidas reales que tendrá la casa".* Pero nos está dando una escala. ¿Cuál es esa escala?

Ao: ¿Escala?

Ma: Sí, hace rato nos decía, en el ejemplo que nos marcaba al principio, que de una maqueta y de un edificio *(escribe estas palabras en el pizarrón)*. Mientras en la maqueta… ¡Si han visto algún día una maqueta!, me imagino.

Aos: ¡Sí!

Ma: Son dibujos… Proporciones de casas, edificios, pero en pequeño. Bien. La maqueta tiene un centímetro, mientras que la figura, en el espacio real, ¿cuánto equivale un centímetro? *(Escribe estos datos en el pizarrón).*

Ao: ¡Cien!

Ma: ¿A cien qué?… ¡Centímetros! Y sabemos que cien centímetros ¿equivalen a…? *(Escribe estos datos en el pizarrón).*

Ao: ¡A un metro!

Ma: ¡A un metro! Efectivamente. Entonces vamos a pensar lo siguiente. Si la altura del edificio… si la altura del edificio en la maqueta era de cuatro centímetros, ¿cuánto realmente media la altura del edificio en su real… en su realidad?

Aos: ¡Cuatrocientos!

Ma: ¿Cuatrocientos qué?

Aos: ¡Centímetros!

Ma: ¿O bien?, ¿O bien?

Ao: ¡Cuatro metros!

Ma: ¡O bien cuatro metros! A eso se refiere. ¿Estamos de acuerdo?

Como se puede observar en el siguiente diálogo, la profesora continúa con la descripción de la situación en cuestión. Sus intervenciones contribuyen a simplificar el problema.

Ma: En este esquema que nos está marcando el libro, cambia la escala. No es un centímetro a cien centímetros sino, dice, es dos punto cinco centímetros, ¿a cuánto del real? *(Anota en el pizarrón la cantidad)*

Aos: ¡Cuatrocientos!

Ma: ¿A cuatrocientos?

Ao: ¡Cuatro metros!

Ma: Bueno, a cuatrocientos centímetros ¿o bien? *(Escribe estos datos en el pizarrón).*

Aos: ¡Cuatro metros!

Ma: ¡Cuatro metros! ¿Estamos de acuerdo? Entonces vamos a la tabla, en la tabla ya nos dice el ancho de la habitación principal. Ubíquenme la habitación principal por favor. ¡Ya, ya la ubicaron! *(Borra los datos del pizarrón)* ¿Cuánto mide?, ¿Cuánto mide el ancho?

Aos: Nueve cinco.

Ao: ¡No!

Ao: ¡Sí!

Ma: ¡No! ¡Dos punto cinco! ¡Ahí lo tienen ya!

Ao: ¡Ah, sí!

Ma: Esa es la medida en el plano. Ahora, queremos saber la medida real.

Ao: Cuatrocientos

Ma: ¿Por qué cuatrocientos y por qué no cuatro metros? ¿Qué dice abajo de medida real?

Aos: Cuatrocientos centímetros

Ma: Lo está pidiendo en ¿qué?

Aos: ¡Centímetros!

Ma: Ese es un dato muy importante que no podemos perder de vista. Porque no es lo mismo que me lo pida en ¿qué?... ¡Centímetros! a que me lo pida en… ¿qué?

Aos*:* ¡En metros!

Ma: ¡En metros! En la medida en el plano, ¿en qué está?

Aos: ¡Centímetros!

Ma: En centímetros también, ¿estamos de acuerdo?

La profesora guía la identificación de la diferencia en las unidades de medida, evitando así la dificultad que podría presentarse. La actividad de los alumnos se reduce a responder las preguntas de la profesora y en tratar de acertar a la respuesta que en ocasiones al no obtenerla, da ella misma.

Para la resolución de la tabla, la maestra solicita de inmediato el valor unitario, con lo cual inicia la introducción de su uso como procedimiento para la resolución del problema. Es curioso que para comprobar las respuestas que obtiene, hace uso de procedimientos sobre la marcha, los cuales, habían quedado invalidados durante la primera sesión, esto se observa en el diálogo siguiente:

Ma: Entonces, dos punto cinco en centímetros del plano equivale a, ¿cuánto en la medida real?

Aos: ¡Cuatrocientos!

Ma: ¡A cuatrocientos centímetros!

Ma: ¿Por qué?, usando una lógica, ¿cuánto habrá en cada centímetro a su parecer?

Ao: Doscientos sesenta y seis centímetros.

Ma: ¿En cada centímetro, doscientos sesenta y seis? Ya tenemos dos, doscientos sesenta y seis y doscientos sesenta y seis, ¿cuánto nos daría? ¡Calculadoras! Les dije que las calculadoras deben estar afuera.

Ao: Quinientos treinta y ocho.

Ma: Más el medio todavía…

La maestra refiere el uso que hace de los procedimientos sobre la marcha, como "uso de la lógica" y los usa para verificar que el valor unitario dado por los alumnos es correcto. Los resultados así obtenidos presentan errores que, sin embargo, no se hacen explícitos ni se corrigen pues, como vemos en el siguiente diálogo, la interacción se ve interrumpida por el hallazgo de un estudiante

Ao1: ¡Ciento sesenta!

Ma: ¡Es correcto ciento sesenta! ¿Cómo determinaste ese valor?

Ao1: Porque dividí cuatrocientos entre dos punto cinco

Ma: ¡Correcto! ¡Y su compañero inmediatamente encontró la fórmula para sacar el valor unitario! Nosotros para sacar el valor unitario, vamos, se podría decir, agarrar nuestro eje central. En este caso, nuestro eje va ser los cuatrocientos que corresponden a dos punto cinco. Y su compañero dice: divido cuatrocientos entre dos punto cinco, y cuánto le… ¿Cuánto te da?

Ao1: Ciento sesenta

Ma: Entonces, ¡ojo! No perdamos de vista este ciento sesenta *(en el pizarrón, lo encierra en un cuadro).* Este ciento sesenta que acaba de obtener su compañero va a ser nuestro valor unitario.

La maestra valida de inmediato el resultado y el procedimiento dado por el alumno, presentando este último como "la fórmula para obtener el valor unitario" y reafirmándolo. Además, como se muestra a continuación, recurre nuevamente al uso de procedimientos sobre la marcha para explicar el significado de este valor:

Ma: ¿Y qué querrá decir el valor unitario? A su parecer, ¿qué querrá decir el valor unitario?

Ao1: ¿Es el valor que tiene cada centímetro?

Ma: ¡Es el valor que tiene cada centímetro! (*en tono de aprobación, luego pregunta al grupo*) ¿Será correcto o no?

Aos: ¡Sí!

Ma: ¿Por qué? A ver, ¿cómo lo demostramos? Dice, ciento sesenta es el valor que tiene cada centímetro. ¿Cuánto equivale un centímetro? ¡Ciento sesenta!. ¿Uno sería igual a…? ¡Ciento sesenta! ¿De dos centímetros? (*escribe las relaciones en el pizarrón).*

Ao: Trescientos veinte.

Ma: ¡Trescientos veinte! Y de punto cinco 5, estamos hablando que es la, ¿qué?

Ao: La mitad

Ma: ¡La mitad! ¿Y la mitad de ciento sesenta?

Aos: ¡Cuatrocientos!

Aos: ¡Ochenta!

Ma: ¡Ochenta, ochenta, ochenta, ochenta! Los ochenta, aquí estamos en el dos (*señala el trescientos veinte en el pizarrón).* Los ochenta… (*Corrige)* ¡Más los ochenta! Este lo dejamos independiente *(encierra en el pizarrón el ciento sesenta). (Repite)* Más los ochenta del punto cinco, ¿cuánto me da? *(indica en el pizarrón, la suma de trescientos veinte más ochenta).*

Aos: ¡Cuatrocientos!

Ma: Que corresponde a los dos punto cinco ¿Estamos de acuerdo?

Haciendo uso de procedimiento sobre la marcha, la maestra busca explicar el significado del valor unitario. No obstante, la propiedad de las razones internas no es retomada para definir las relaciones de proporcionalidad, ni se profundiza en ellas como un método de solución.

Los alumnos participan respondiendo a las preguntas que les son dirigidas. El conocimiento que, al parecer, tienen sobre el uso de procedimientos sobre la marcha, permite su interacción con la profesora.

Al igual que en la primera sesión, el planteamiento del problema se da bajo la guía de la maestra, quien contribuye a simplificar el problema haciendo explícitos los datos y la consigna. Además, introduce un procedimiento de solución: el uso del valor unitario del cual expone la forma de calcularlo y aplicarlo en la resolución de problemas, pero no se especifican sus propiedades en las relaciones de proporcionalidad.

Por lo anterior, consideramos que durante este primer momento, de la segunda sesión, las intervenciones de la profesora, se constituyen en ayudas tipo 1, al simplificar el problema e introducir un método de solución.

- ***El paso de la regla de tres al uso del valor unitario.***

La profesora introduce el uso del valor unitario como un procedimiento fácil y al parecer espera que una vez obtenido, su aplicación sea evidente para los alumnos. No obstante, como podemos observar en el siguiente diálogo, los alumnos continuando con lo estudiado en la clase anterior, emplean la regla de tres para resolver el problema.

> **Ma**: Bien, una vez que nosotros obtenemos el valor unitario muchachos, es mucho más fácil de lo que ustedes se pueden imaginar. Saco el valor unitario y en automático tengo otra cantidad ahora, el ancho del pasillo, ¿de cuánto es el ancho de pasillo?
>
> **Ao:** De uno punto veinticinco.
>
> **Ma:** De uno punto veinticinco, ¿qué creen que tengo que hacer para obtener en automático este…?
>
> **Ao1: ¡**Dividir entre cuatrocientos! ¡No! (*Corrige)*. Multiplicar por cuatrocientos y dividir por dos

Ma: Ese sería un… de acuerdo a lo que vimos ayer, a las tablas. ¡Estoy de acuerdo contigo! Usando una regla de tres: uno punto veinticinco por cuatrocientos, entre dos punto cinco Háganlo.

Aos: ¡Doscientos!

Ma: ¡Doscientos! Eso sería, y qué bueno, veo que entendieron lo del día de ayer. Eso sería mediante tablas o regla de tres, ¿estamos de acuerdo? Pero ahora chequen, chequen utilizando el valor unitario, ¡Alexander! *(llamándole la atención al alumno).* Chequen utilizando el valor unitario, multipliquen uno punto veinticinco por su valor unitario que fue de ciento sesenta.

La profesora continúa pidiendo los valores que complementan la tabla. Los alumnos responden y ella anota los resultados en el pizarrón. El procedimiento no se verifica, pero, al parecer, la profesora da por hecho que se ha utilizado el valor unitario.

Aunque la regla de tres no es el propósito de esta sesión, la profesora no la invalida, sino que la retoma y la hace explícita. Hace notar la ventaja de poder resolver los problemas mediante diferentes procedimientos. Sin embargo en el siguiente diálogo presenta el uso del valor unitario como una forma más fácil, probablemente debido a que es parte del propósito de esta sesión:

Ma: Pregunto yo… Ayer, bueno, ayer veíamos mediante el uso de tablas y mediante la regla de tres, ¿cierto o no vimos eso? Ahora estamos viendo mediante el concepto del valor unitario. Va la pregunta, ¿con cuál será más fácil?

Aos: ¡Con el valor unitario! ¿Con el valor unitario?

Ma: ¡Con el valor unitario! Una vez que tú obtienes el valor unitario, lo único que hay que ir haciendo ¿es?

Aos: **¡**Multiplicarlo!

Ma: ¡Multiplicarlo! Pero, es importante que ustedes no sólo sepan una cosa, una forma de resolver problemas (…) Un alumno competente, es aquel que es capaz, no solo de manejar una forma de solucionar un problema, sino que tiene tres, cuatro caminos para poderlo solucionar (…) Y si a veces logro pasar el más difícil, retomando el ejemplo de ayer, que ayer era más difícil a lo mejor que me entendieran lo que era la regla de tres, lo que era el uso de tablas. Si ayer ya casi logramos comprenderlo, y ahorita vamos a hacer unos ejercicios donde van a aplicar dos o tres formas que ya aprendimos para sacar proporcionalidad. Si ayer que era más complicado, ya muchos lograron avanzar sobre ese camino, qué va a pasar cuando se les presente el camino más fácil.

Aos: Se nos va a hacer más fácil.

Ma: ¡Lo van a lograr y será más rápido! Pero insisto tenemos que desarrollar competencias chicos. A veces en los exámenes se nos olvida: ¡Híjole! ¿Cómo era? Y a veces el camino que parece más difícil, a veces es también del que más aprendemos. Entonces, si logramos sacar tres caminos para aprender proporcionalidad: ¡Fabuloso muchachos! Si ustedes logran dominar esas tres formas de resolver ese tipo de problemas, yo les aseguro éxito en su vida (…)

Pero aun cuando la profesora acepta el uso de diversos procedimientos, el propósito de la clase es el uso del valor unitario para la resolución de los problemas que se presentan en la segunda sesión. Para lograrlo, retoma de los alumnos, sólo aquellas participaciones que se centran en dicho procedimiento e induce las respuestas esperadas dando algunas “pistas” para que los alumnos contesten lo esperado.

Sin embargo, aunque consigue algunas respuestas que le permiten ir estableciendo el valor unitario como procedimiento de solución de los problemas revisados, los alumnos insisten en el uso de la regla de tres, vemos esto en el siguiente diálogo:

Ma: Continuamos entonces, dice: “*Manos a la obra, comparen sus resultados y comenten: ¿cómo calcularon las medidas reales de la casa?”*

Ao2: ¡Usando la regla de tres!

Aos: ¡No! ¡Multiplicando! ¡Multiplicando!

Ma: ¡Ok! A lo mejor tú usaste la regla de tres *(sin profundizar, pregunta a otro alumno)*. Multiplicando ¿qué?

Ao1: Multiplicando la medida real por la…por la medida…

Ao6: Por la medida**…** real

Ma: La medida real no, porqué obtuvimos la medida real.

Ao7: ¡Multiplicando el valor...!

Ao3: ¡Ah no, centímetros!…

Ma: A ver, ¡híjole! Ya no le pongo atención a los dos, ¿A ver este…? *(señala al alumno Ao7)*

Ao7: Multiplicando el valor unitario

Maestra: ¿Por?

Ao7: Por la medida

Ma: ¡Por la medida en la maqueta! ¿Estamos de acuerdo? ¡Multiplicando! Ahora, ¿cómo calcularon el largo del terreno?

Ao2: Usando la regla de tres.

Ma: Usando la regla de tres... (*No retoma esta aportación)* ¿Cómo lo calcularon? ¡Chicos!

Ao: ¿El largo del terreno?

Ma: ¡Ajá! El que está, en once.

Aos *(algunas voces)*: ¡Multiplicando!

Ma: ¿Multiplicando qué?... (*No responden)* lo acaban de decir ese rato… ¡Multiplicando el valor unitario por la medida del plano! ¿Estamos de acuerdo?

Aos: ¡Sí!

Ma: ¿Y cuántas veces es más grande la medida real del terreno que la medida en el plano?

Ao2: ¡Ciento sesenta!

Maestra: ¡Ciento sesenta veces más! Porque es el valor unitario. ¿Estamos de acuerdo? ¡Muy bien!

Aunque la actividad de los alumnos es constantemente guiada por la profesora, ellos ponen de manifiesto el uso de sus conocimientos previos, en este caso, el uso de la regla de tres.

No tuvimos evidencia de que se hubieran utilizado procedimientos sobre la marcha para la resolución del problema inicial de la secuencia dos, probablemente, debido a que quedaron invalidados durante la primera sesión, o a que los alumnos percibieran como necesaria la aplicación de la regla de tres, recién estudiada. Otra posibilidad está en que los alumnos no hubieran identificado los factores internos subyacentes en la relación de proporcionalidad entre ambos conjuntos de cantidades (medida real y medida en el plano) probablemente debido a que las medidas en el plano son números decimales lo que puede dificultar su obtención.

Para la resolución del problema II surgieron diversas formas de solución, veamos esto en el siguiente diálogo:

Ma: Dice*: "resuelvan el siguiente problema: Un microscopio amplifica la imagen de un virus"*. ¡Podemos recurrir a nuestra tabla! *(Dibuja en el pizarrón y vuelve a leer)*. *"Un microscopio amplifica la imagen de un virus de cero punto dos micrómetros a ciento veinte micrómetros"*. Entonces… microscopio… *(Escribe en el pizarrón)* ¿El virus cuánto mide?

Ao: Ciento veinte

Ao: Cero punto dos

Ma: ¡Cero punto dos!... ¿Qué?

Ao: Micrómetros

Ma: Micrómetros o micra. Si nosotros metemos ese virus al microscopio, bueno lo podemos ver ahí, ¿cuántas veces lo va a aumentar, dice?

Ao: Ciento veinte

Ma: A ciento veinte micras o micrómetros *(Anota en el pizarrón la respuesta)*. ¿Estamos de acuerdo? La pregunta entonces es: ¿De qué tamaño se vería…? Con ese… con ese microscopio… con ese que estamos hablando… ¿un virus de cero punto cuatro micrómetros?

Aos: Doscientos cuarenta

Ao: ¡Y el otro es seiscientos!

Ma: ¿A ver, cómo lo determinaron?

Aos *(una voz tras otra)*: **¡**Multiplicando!

Ma: ¿Qué multiplicaron?

Aos: ¡Doscientos por…! ¡Dos! (*Se oyen varias voces)*

Ma: **¡**A ver, a ver, tranquilos! Alcen la mano y alguien me explica el procedimiento

Ao2: Yo hice la tabla de tres.

Ma: Hiciste la regla de tres, ¿pero de qué forma?

La profesora retomó la participación del alumno (Ao2) permitiendo que expusiera la forma en que planteó y resolvió la regla de tres y apoyándolo en su explicación.

En este momento de la clase, la actividad de los estudiantes fue más evidente, pues se les permitió expresar diversas formas de resolución. Sin embargo, aunque sus participaciones son retomadas y aceptadas, la maestra insiste en el uso del valor unitario e indica, en el diálogo que sigue, que es algo que "acaban de aprender", como una pista para que los alumnos lo mencionen.

Ma: ¿Cómo lo solucionaste tú? *(señala a otro alumno)*

Ao4: Yo lo sumé: ciento veinte, más ciento veinte y me dio doscientos cuarenta.

Ma: **¡**Ah, porque era el doble! Bueno, ¡fue otra forma, le da su resultado! Dice su compañero si por cero punto dos es ciento veinte, cero punto cuatro es el doble. Entonces sumo: a ciento veinte le sumo otros ciento veinte y me da doscientos cuarenta. ¿Es correcto?

Ao: ¡Sí!

Ma: **¡**Es correcto su procedimiento también! ¿De qué otra forma? ¿Alguien? ¡Acabamos de aprender algo chicos!

Ao3: **¡**Yo!

Ma: ¡A ver, Noé!

Ao3: Ciento veinte por dos.

Ma: ¿Ciento veinte entre…?

Ao3: ¡Por dos!

Ma: Ajá, ¿por qué por dos?

Ao3: Porque lo duplica.

Ma: ¡Ah! Viene siendo la misma lógica de su compañero, lo mandan al doble.

La maestra pide luego la participación de un estudiante, quien explica el uso del valor unitario. Observamos que en la resolución de este problema, los alumnos nuevamente hacen uso de procedimientos sobre la marcha, particularmente de los factores internos; esta vez la profesora sí los retoma, haciéndolos explícitos e incorporándolos a la discusión como un procedimiento válido de la siguiente manera:

Ma: ¡Bien chicos! ¿Cuál es la recomendación de hoy? Ya vieron esta que es la de Brayan que es la regla de tres. Usando, digamos, la lógica, es la de su compañero Víctor. Su compañero Oscar, excepto que hubo un error al dividir, ocupa la del valor unitario que dice: divido ciento veinte entre cero punto dos y obtengo el valor unitario. A partir del valor unitario, nada más ¿que tengo qué hacer?: ¡Multiplicar!

La profesora guía nuevamente la actividad con ayudas tipo 1, mediante las cuales introduce un método. Pues si bien permite esta vez que los alumnos expongan diversos procedimientos, ella induce al uso del valor unitario.

- ***La implantación del uso del valor unitario como procedimiento de solución.***

Para finalizar el trabajo sobre los problemas planteados en la *Sesión 2*, la profesora ya no profundiza en otros procedimientos, sino que insiste en que los alumnos hagan referencia al uso del valor unitario en sus respuestas, tal y como se muestra en el diálogo que sigue:

Ma: Vamos con la que sigue. ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un micrómetro?

Aos: De seiscientos

Ma: ¿Qué hicieron ahora? ¿Qué fue lo que…?

Ao2: ¡Yo hice lo mismo! La tabla de tres

Ma: La regla, la regla, la regla de tres. ¿Qué hicieron los demás si ya tengo el valor unitario?

Ao2: Cero punto uno, multiplicarlo por ciento veinte y dividirlo en cero punto dos

Ma: ¡Ah!, tú usaste la tabla, cero punto uno por ciento veinte, entre cero punto dos… ¿Pero usando el valor unitario? ¡Chicos, ya lo tenemos!

Cuando la maestra obtiene la respuesta esperada, la retoma para resolver el siguiente problema, indicando explícitamente que no deberán usar la regla de tres en este momento y explica nuevamente la manera de utilizar el valor unitario. También indica exactamente las operaciones que los alumnos deben hacer y pide los resultados, con los que va llenando la tabla en el pizarrón de la siguiente manera:

Ao1: ¡Yo!... es uno por seiscientos.

Ma: ¡Uno por seiscientos! Ahorita ya en otro ejemplo lo vamos a ver, se van a dar cuenta que es mucho más fácil con el valor unitario, porque veo como que todavía les está costando trabajo. Entonces de ¿cuánto fue lo que tiene un micrómetro?

Aos: De seiscientos

Ma: ¡Vamos a la tabla que sigue! Aquí, es donde van a visualizar que es más fácil utilizar el valor unitario. ¡A ver!, tenemos la siguiente tabla. No quiero que usen regla de tres en este momento.

Alumnos: ¿No?

Ma: ¡No! ¡A ver! ¡En este momento, insisto! Ya después ustedes ocupen, lo que más fácil se les haga, el procedimiento que más fácil se les haga (…) Chequen por qué les digo que es más fácil el valor unitario. Miren, tenemos esta tabla chicos. A ver, nos vamos nada más al valor, puro valor unitario. ¡Chequen por qué es tan fácil! Cuando tenemos estos dos datos, el tamaño real y el tamaño con el microscopio, ¡muy fácil! Vamos a dividir nuestro tamaño del microscopio entre el tamaño real. En pocas palabras ciento veinte entre cero punto dos (*realiza la operación en el pizarrón).* Ya nos decían que, ¿cuánto salía?

Ao: ¡Seiscientos!

Ma: Ese seiscientos va ser nuestro valor, ¿qué?

Aos: ¡Valor unitario!

Ma: ¡Valor unitario! ¡Chequen, chequen lo fácil que es ahora! (…) Nada más vayan multiplicando cada dato por seiscientos (…) ¿cuánto sale? (…)

Los alumnos van dictando los datos. Parece ser que la profesora da por hecho que han empleado el valor unitario y da por terminada esta actividad sin verificar los procedimientos.

Sin embargo, algunos alumnos habían adelantado el trabajo en sus libros, probablemente utilizando otros procedimientos y movilizando con ello sus conocimientos previos, con lo cual realizan adaptaciones A1 al identificar, en los problemas planteados, la posibilidad de utilizar alguno de los métodos conocidos, para su resolución.

- ***En resumen.***

En esta sesión, la profesora aun cuando ha permitido el uso de otros métodos, sus intervenciones se centran en introducir el valor unitario como procedimiento de resolución, lo cual es parte del propósito de la sesión. Además ha simplificado los problemas, tanto los planteados en el libro de texto, como los que se generan con sus constantes preguntas a los estudiantes, lo cual sucede al inducir las respuestas y dirigir las operaciones que los alumnos han de realizar, aportando con ello ayudas tipo 1.

4.2. Análisis del impacto de las condiciones del oficio docente en la enseñanza.

Consideramos que el trabajo docente en telesecundaria se realiza bajo condiciones específicas que difieren del que se lleva a cabo en otras modalidades de educación secundaria. A ello se añaden las características particulares de la escuela, el grupo, la profesora, la asignatura y el tema que se estudia.

En este apartado analizamos dos de los factores que determinan las prácticas de enseñanza, los cuales identificamos durante la realización de este estudio. En primer lugar el uso de los recursos didácticos y en segundo lugar los conocimientos y las creencias de los profesores sobre la enseñanza de la proporcionalidad.

- **El uso de los recursos didácticos.**

La disponibilidad de recursos didácticos especialmente diseñados para el estudio en telesecundaria, es uno de los aspectos que distingue al trabajo docente en esta modalidad, del resto. Vimos que el programa de televisión y los libros de texto, son el principal apoyo para los docentes, toda vez que las actividades desarrolladas en clase se estructuran de acuerdo al contenido de estos recursos. Así lo explicaron dos de las profesoras entrevistadas[38]:

> **Pr$_1$**: Nuestro trabajo en todas las materias, y en específico en matemáticas es: El alumno observa el programa, lo ve, se lo explican (…) Después que termina la sesión, que dura diecinueve minutos aproximadamente, viene el libro. Viene la explicación del maestro, ahondamos un poco más en el tema. Y una vez que ahondamos un poco más en el tema, nos vamos directamente al libro.
>
> **Pr$_2$**: Entonces nosotros, en primer lugar: ven la programación. En segundo lugar, si es nuevo proyecto, tengo que explicar de qué se trata. En sí, explico en el pizarrón o voy leyendo el libro con ellos (...)

Al respecto, la maestra observada, nos dijo:

> **Ma:** Primero, te digo, el maestro tiene que saber qué es lo que se tiene y qué es lo que se quiere. Una vez estando dentro del salón, establecer el propósito. Decirle a los chicos cuál es el propósito del tema. Qué es lo que se pretende. Una vez que los chicos, por lo menos en teoría, saben qué es lo que se pretende, ahora sí… En Primero, primero vemos el programa. Una vez que se acaba el programa, es obvio, se recurre al libro, se ve el libro, se lee… se leen las actividades que propone el libro, se empiezan a contestar.

Aunque su diseño ha cambiado, el programa televisivo continúa siendo un distintivo de la modalidad de telesecundaria y un referente de las actividades que se realizan para la enseñanza. Una de las profesoras entrevistadas, nos comentó que aunque se repite, ella ve diario el programa con sus alumnos:

> **Pr$_1$:** ¡Sí lo prendo! Sí porque les sirve de refuerzo. Si algo no entendieron, ellos lo refuerzan. Entonces, si tuvieron el primer día (…) si lo tuvieron mal, entonces ellos al estarlo viendo, corrigen. Si yo al marcarles esto estuvo mal, esto estuvo mal… al siguiente día lo ven y… ¡A ver, rectifiquen lo que tuvieron mal! ¿Sí? Para eso me sirve. O si les encargo una tarea, y tienen que ampliar el tema, entonces yo reviso que el tema sea acorde a lo que vieron.

Sin embargo, otros profesores prefieren omitir el programa de televisión y organizar sus clases de manera que les resulta más conveniente:

> **Pr$_2$**: Lo que pasa es que en el programa de televisión, por ejemplo, si vamos a empezar un proyecto, empieza hoy el proyecto, vemos la programación. Entonces, todos los días repiten lo mismo, entonces no tiene caso. Bueno, cuando los niños no han reforzado bien, prendemos la

[38] Para la transcripción de las entrevistas utilizamos las siguientes abreviaturas: Maestra (Ma) (se refiere a la maestra cuyas clases observamos), Profesor 1, Profesor 2, Profesor 3 (Pr$_1$, Pr$_2$, Pr$_3$) (se refiere a los otros tres profesores de primer grado, entrevistados. Los puntos suspensivos indican pausas en el discurso. Los puntos suspensivos entre paréntesis indican fragmentos de la entrevista que decidimos no transcribir.

tele. Pero yo casi por lo regular, nada más el mero día. Quizá el miércoles. Pero no tiene caso de ver lo mismo. Ellos hasta me han dicho ¡ay maestra es lo mismo! ¡Es lo mismo de ayer, es lo mismo de antier! Entonces, ese tiempo que yo ocuparía para la tele, pues lo ocupo para reforzar, o para empezarle (…)

Pr$_3$: Solamente sirve da poyo, le digo, la televisión ahorita me está sirviendo únicamente de apoyo. Yo no veo diario la televisión porque muchas veces no… o a lo mejor no me he acoplado a la televisión. Yo trabajo mucho con los libros, con otros materiales extra, les aplico mucha lectura

Ma: (…) En cuanto a programación, pues los temas se repiten a veces hasta por una semana. Lo que llega a ser tedioso para los chicos. Estar viendo continuamente el mismo programa. Entonces lo que hacemos es hacer ciertas adecuaciones, para que los chicos, ahora sí que no se aburran (…)

Si bien en las clases que observamos la profesora también expresó que el programa de televisión se “trata de ver siempre”, y que fue el inicio de dos de las tres clases en que se estudió la *Secuencia 6*; su contenido no se retomó para la enseñanza de la proporcionalidad, en este caso.

El uso de este recurso parece estar apegado más a la tradición del modelo de telesecundaria, que a las necesidades de los profesores, pues de acuerdo a nuestras observaciones y a las entrevistas realizadas los maestros basan las actividades de la clase en lo que plantean los libros de texto y en lo que ellos mismos pueden explicar a los alumnos.

El hecho de que el programa de televisión ya no consista, como antes, en una clase diaria, da a los profesores mayor responsabilidad sobre la enseñanza, pero también más libertad en la organización de las clases. Un profesor y la maestra observada comentan:

Pr$_3$: Matemáticas la tenemos a la tercera hora, pero no está muy propia para esa hora, porque los agarro ya a las once de la mañana. Matemáticas se da a la primera hora que es cuando vienen fresquecitos.

Ma: (…) Si nos regresamos un poquito a cómo se trabajaba antes, o sea, era un tema diario. Y era super difícil ¿no? Porque si el chico no te entendió y al otro día ya era otro tema… ¿Qué hacías con esas lagunas que quedaban? En la actualidad, pues sí, como tú bien lo dices, se repite el programa (…) Entonces lo que yo hago es: sí trato de ir al programa, y a lo que dice el libro y a abarcar toditititos los contenidos, pero cuando hay necesidad de… de… ¿cómo te podría explicar? De abarcar una semana, y si me abarcaba una semana y yo requiero semana y media, no dejo de ver la transmisión para no perder la secuencia y trato de no avanzar a otro tema si el primero no ha quedado claro, porque pues son las bases para el siguiente. Entonces adecúo tiempos. Entonces a veces sí, agarro que los diez, que los quince minutos de otra asignatura, ¿por qué? porque tenemos que complementar el trabajo. Entonces sí, o se complementa con ejercicios en casa.

Otro de los recursos disponibles en telesecundaria es el libro para el maestro, el cual representa un apoyo importante para los profesores, pues además de incluir el contenido del libro para el alumno, incluye sugerencias, orientaciones didácticas, respuestas e información sobre el tema y los propósitos de la actividad. Al respecto, los profesores opinaron sobre el libro para el maestro:

Ma: Es mi… Dicen… ¿Qué?... ¡Así como mi biblia! ¿No? ¡No, pues lógico! O sea, ¿por qué? Porque pues el libro del maestro es básico. Siento que es nuestro brazo derecho. Sí, el programa y el libro del maestro. Y pues, otras fuentes que uno pueda consultar…

Pr_1: Sí, el libro del maestro nos da una dinámica de los ejes que tenemos que trabajar. El tema, el propósito de las clases, en cuántas sesiones está dividido cada tema, qué sesión y qué división del tema debemos de ver cada día.

Pr_2: Interesante. Interesante porque está correlacionado con el libro del alumno (…) El libro del maestro es el mismo que para el alumno, pero nada más te dan este… actividades didácticas para desarrollar durante el grupo (…) Te explica ahí, qué es lo que debes de hacer, qué es lo que deben hacer tus alumnos.

Pr_3: Aquí tengo todos, yo me baso de ahí hago mi planeación (…) Es útil (…) Las sugerencias didácticas, las respuestas que me apoyo cuando tengo duda.

Así, los libros de texto resultan ser el eje rector de las actividades que se desarrollan en clase. No obstante, el método de estudio que se promueve en estos materiales parece no concordar con la idea de enseñanza que los profesores tienen, para la cual consideran necesaria una mayor cantidad de información, ejemplos y ejercicios. Los maestros nos dijeron lo que cambiarían de los libros de texto:

Ma: No le cambiaría en quitar. A lo mejor en agregar un poquito más… Yo agregaría como un cuadernillo de ejercicios. Cómo que hace falta a veces… vienen a lo mejor dos, tres ejercicios y falta este… Indudablemente, yo creo que en matemáticas, la práctica, o sea, la práctica, la práctica. Entonces, así como un cuadernillo referencial, sobre los contenidos que ya se fueron viendo y que te puedan seguir ayudando a reafirmar los contenidos que ya viste. O sea, para mí eso sería. Como que más ejercicios, pero no tanto en el libro, sino que en un cuadernillo aparte.

> **Pr$_1$:** ¿Qué le cambiaría? Fíjese que los haría más prácticos y más secuenciales… mira, por ejemplo aquí ves los dibujitos. Pero si tú no sabes desde un principio qué es proporcionalidad… te pongan lo que te pongan… si tú no entendiste qué es proporcionalidad y cómo la vas a razonar y la vas a efectuar, te quedaste en *stand by* (…) Yo ofrecería un poco de explicación, quizá un poco de teoría. Que es darle al alumno el conocimiento, realmente. Que ahora el sistema de educación es a partir de lo que ellos traen ¿no? Pero pues a veces… ¡No traen nada! (…)… Yo siento que esos libros están hechos por gente, sumamente preparada, eso sí lo entiendo. Pero a lo mejor no están tan bien organizados, o tan bien explicados que los alumnos se quedan así con sus caritas (*hace un gesto de desconcierto)*. Entonces es ahí cuando, aunque tú no quieras explicar, aunque quieras seguir la nueva metodología que te dan ahora los programas, de que debes de partir de la experiencia vivida y adquirida por el niño, pues cuando volteas y ves, les ves las caras como diciendo ¡me está hablando en chino! O ¡Qué idioma me está hablando esta maestra! No sé, lo notas (…)
>
> **Pr$_2$:** La información, el contenido científico, un poquito. Que vinieran un poquito más ampliados, el contenido científico. Estaría mucho mejor.
>
> **Pr$_3$:** No quitaría mucho. Es más, lo que sí me gusta más es "a lo que llegamos" porque ahí viene el resumen de todo lo que nos dieron. Ese sí, no lo quitaría.

Vemos que la información sobre el tema y la diversidad de ejemplos y ejercicios son muy valorados por los profesores, quienes al respecto, manifestaron una preferencia por los libros de Conceptos básicos, del modelo anterior al 2006:

> **Ma:** (…) Haz de cuenta que antes el texto te daba todo. Te daban en un texto muy grande, te daban todo. Ahora no, ahora era que tú ya ibas descubriendo, junto con los chicos el contenido. Cuando llegas al texto de formalización, ahora sí, te dan ciertas, este… ciertos conceptos.
>
> **Pr$_1$**: (…) Venían muy bien explicados, paso a paso. Por si el niño no es muy analista, viene muy sintetizado, paso uno, paso dos. Y el niño va entendiendo, lo va enseñando a razonar. Te cuesta menos trabajo con los textos viejitos, enseñarle a razonar, que ahora con estos textos. Porque estos textos, si tú lo has visto, y visto el tema seis, que me estás diciendo… o sea, en ninguno de los textos, que trae el libro, te dice cómo hacer una proporcionalidad.
>
> **Pr$_2$**: Pues esos me parecen mejores, porque tenías tu libro de actividades y acá tu conceptos. Prácticamente, tú al leerlos, podías contestar más rápido estos.
>
> **Pr$_3$:** Considero que en tiempos anteriores cuando se usaban los Conceptos Básicos era mejor (…) Porque venía mejor especificado los problemas, traía mejores ejemplos, traía más ejercicios y los niños podían aprender y pasar el año. Estoy hablando de los años noventa.

Con el modelo de telesecundaria actual, los profesores asumen una mayor responsabilidad en la enseñanza. Ello les demanda más conocimientos sobre los temas específicos de cada materia para poder explicar a los alumnos, resolver sus dudas y ofrecer más ejemplos y actividades, lo cual consideran necesario para el aprendizaje de los estudiantes.

Así, el trabajo de los profesores se ve intensificado ante la necesidad de consultar otras fuentes, aparte de los libros para el maestro, dedicar tiempo a la investigación de temas específicos y a la planificación de siete clases diarias, y de diez materias diferentes. Esto incluye elaboración de proyectos, planes, seguimientos, evaluaciones, reportes, entre otras tareas académicas y administrativas. Al respecto, una profesora nos compartió una experiencia:

> **Pr_2:** Y aparte de tu planeación y tus materias, tengas o no… No es por nada pero, ayer yo pedí día económico[39], y yo planeo diario. Y estábamos haciendo un proyecto productivo del terreno[40]. Tienes que hacer un proyecto desde introducción, justificación, plan de acción, diseño, y bueno, yo llegué a la casa tuya y bueno a la máquina. Pero ya como a las diez dije ¡ah qué bueno, ya terminé! Pero yo voy a ver los libros, ya nomás, no planeo. Y dice el maestro ¡Tienes que llevar tu planeación para mañana maestra! Le digo ¡Oh, no por favor! ¡Me dormí a las doce por estar haciendo la planeación! Lo que pasa es que a veces no me da tiempo, con tantos trabajos, de hacerla. Y ahorita como voy a estudiar la universidad, pues sí, pero me voy a poner las pilas pa poderla sacar, porque también es justo.

Las dificultades y el exceso de trabajo que enfrentan los profesores pueden redundar en la búsqueda y aplicación de estrategias que les permitan avanzar sobre los contenidos programados y el logro de los propósitos educativos. Por ejemplo, en las clases que observamos, las secuencias 6 y 7, se estudiaron en una semana, aunque la programación televisiva y la dosificación propuesta sugieren que se trabajen en dos. La profesora explicó su decisión:

> **Ma:** Se viene evaluación y la idea es contemplar los temas. Si tú te das cuenta ya está marcando problemas de conteo. Y a veces no se alcanza a abarcar todo el contenido y el examen sí lo tiene. Por tiempos, más que nada, tiempos. Porque si tú empiezas a recorrer un tema, a veces al final del ciclo ya ni siquiera es uno, son dos. Y a veces nos pasaba incluso, que cuando llegaba ENLACE había temas que todavía no se abordaban, entonces la idea es, ¿cómo te diré?, como que se aborden todos los temas del contenido que realmente marca el libro. Y te digo, a veces por tiempo, por carga administrativa, por muchas situaciones no da. Entonces, si tú en… nos marcaba

[39] En el Estado de México, los días económicos son quince días del ciclo escolar, en los que el profesor puede solicitar permiso de no asistir, sin que sea descontado de su salario el tiempo no laborado.
[40] Se refiere al proyecto para el trabajo en la asignatura de Tecnología, que en su caso se enfoca al campo de la Agricultura.

dos semanas básicamente ¿no? Este… en una semana, ¡o no sé! Una semana un día, puedes abarcar el contenido y después te puede servir para reafirmar, o para bien, este… en este caso yo, te digo, trabajar con los chicos que más problemas presentan, pues entonces lo voy a aprovechar para esa situación (…)

Consideramos que los recursos didácticos disponibles en telesecundaria constituyen un factor determinante para el trabajo de los profesores, toda vez que en ellos basan el desarrollo de las clases y las decisiones que toman sobre la enseñanza.

El uso que los profesores hacen de los materiales didácticos se relaciona con la forma en que interpretan el currículum (Mercado & Luna, 2013). Es así, que las adecuaciones que hacen a las propuestas contenidas, por ejemplo, en los libros de texto, tienen que ver con la idea que tienen sobre lo que se quiere lograr mediante la realización de ciertas tareas, las características de los estudiantes y las condiciones en las que se encuentran.

No obstante, de acuerdo con Mercado & Luna (2013), los profesores requieren apoyo para detectar en qué casos las decisiones que toman sobre el currículo limitan o enriquecen las propuestas. Asimismo, las autoras consideran que la capacitación sobre el uso de los materiales didácticos, es fundamental para que los maestros promuevan en sus grupos experiencias de aprendizaje significativas. Sin embargo, la falta de capacitación es una problemática que los profesores enfrentan y solucionan de manera autónoma. Respecto a lo sucedido luego de la reforma de 2006, la maestra cuyas clases observamos, nos comentó:

Ma: Pues de hecho, fue complicado. Porque para empezar, no recibimos una capacitación así como que especial, para saber lo que se veía venir ¿no? Otra situación también, fue que los libros de texto no llegaron a tiempo, o sea, nosotros empezamos el ciclo escolar, sin libros. Entonces así como que: ¡¿Ahora qué?! Los programas, es obvio, cambiaron. Entonces, la herramienta principal en el momento eran los programas. En base en los programas y en lo que ya teníamos anteriormente pues, íbamos programando las clases, pero sí, sí, el hecho de que no hubiera libros en tiempo y forma sí fue un desastre. Llegan los libros y quieras o no sí es algo nuevo el enfoque, entonces fue complicado. El primer año, pues a ciencia cierta, me tocó empezar con la reforma, entonces di primer grado, entonces fue ¡doblemente difícil! ¿No? Pero pues no hubo de otra más que estudiarle. Estudiar, estudiar, estudiar, ver qué es lo que se quería, ver qué es lo que se pedía en planes y programas y en base a eso enfocar el trabajo. Pero sí fue muy difícil, tanto para mí, tanto para los chicos.

- ***En resumen.***

El uso de los recursos didácticos disponibles, juega un papel determinante en el trabajo de los profesores. No obstante, las decisiones que toman sobre ellos y las adecuaciones que les hacen, se relacionan con las concepciones personales que tienen sobre la enseñanza y su conocimiento sobre los temas de las diferentes asignaturas, lo cual hace que la práctica de cada profesor tenga características particulares.

- ***Conocimientos y creencias de los profesores, sobre la enseñanza de la proporcionalidad.***

Los conocimientos que los profesores tienen sobre cada materia y las concepciones que posee sobre su importancia y la manera adecuada de enseñarla, juegan un papel determinante en la forma que ellos interpretan y desarrollan el currículum (Mercado & Luna, 2013). Asimismo, el conocimiento que tienen sobre sus alumnos interviene en las decisiones que toman para llevar a cabo el trabajo de enseñar.

En las clases que observamos, el estudio de la secuencia 6, se constituyó mayormente, en base a los problemas planteados en el libro de texto. Sin embargo, vimos que la profesora implementó estrategias de solución, organización del grupo y actividades diferentes a las sugeridas; las cuales se adecuaron al cumplimiento del propósito de enseñanza que ella perseguía: El uso de la regla de tres, en la primera sesión y el uso del valor unitario, en la segunda. Que en el caso de la primera sesión, difería del que se planteaba en el libro para el maestro el cual se enfocaba en el uso de procedimientos sobre la marcha.

Así, aunque la propuesta didáctica del libro de texto sugiere iniciar el trabajo de la primera sesión en binas, la profesora decidió dirigir la discusión de manera grupal, ella nos explica sus razones:

> **Ma:** Bueno en la primera, básicamente por lo que yo te decía, siempre es el conocimiento previo. Qué sabes. Entonces si adentramos inmediatamente al equipo, pues a veces no te permite explorar los conocimientos previos de cada alumno. Incluso el mismo libro lo propone, si van teniendo errores, tú como maestro, ni siquiera les digas en qué están mal, que los dejes seguir avanzando. Si los dejamos trabajar en equipo, se rompe esa situación, ya no se persigue el objetivo que se tiene en mente.

Otro cambio en la organización sugerida se hizo en la tercera sesión, que aunque no la analizamos aquí, vimos que se trabajó en equipo aun cuando la propuesta indica que se resuelva de manera individual. La maestra nos explicó los motivos del cambio:

> **Ma:** Pues yo creo que el trabajo colaborativo, lo que yo te decía, el saber que se iban a enfrentar a este (*señala en el libro un problema que implica el uso de fracciones*) era la finalidad de que bueno, qué alternativas hay. Que de acuerdo a los conocimientos, a veces cuando están trabajando individual, y se llegan como que atorar en algo, ya no saben cómo seguir, y a veces empiezan como que a voltear a ver qué está haciendo el otro. En este caso, al haber checado la sesión, me percaté de esta situación. Y por experiencia sé que en esa parte muchos no van a saber qué hacer. Entonces la idea era ver, qué proponían entre ellos mismos, entre el mismo equipo a ver qué se proponía para darle solución (…)

El conocimiento que sobre los alumnos ha adquirido la profesora a través de su experiencia profesional, orientan las decisiones que toma para dirigir las actividades de enseñanza en el salón de clases. Por ejemplo, la simplificación de los problemas a través de la explicitación de la consigna, las condiciones y los datos, es una acción de la profesora que se debe a que, de acuerdo con su experiencia, los alumnos tienen importantes dificultades para identificar qué es lo que se solicita hacer en el problema y cuáles son los datos que se ofrecen para resolverlo. Ella nos comentó:

> **Ma:** ¿Qué dificultades? Y no sólo los alumnos, yo creo que a veces hasta como adultos ¿no? El detectar datos y a veces realmente entender, qué es lo que realmente quiere el problema. Me he percatado a lo largo de estos años que uno de nuestros grandes problemas es que muchas veces, no esquematizamos. No buscamos lo que realmente quiere el problema. Qué es lo que realmente el problema quiere que yo descubra. Y sobre todo, yo les empiezo a manejar… ahorita te digo, es primero, apenas se van adentrando… pero por ejemplo ya, hablemos de un mes, ellos tienen que siempre sacar datos, cuál es la pregunta central del problema. Y sobre todo apuntar (…) O sea, que esquematicen sobre todo los datos. Porque ya al esquematizar datos, y ya te lo digo por experiencia propia, que es más fácil resolver los problemas, que si nada más los tienes aquí.

La dirección de las actividades de aprendizaje que se plantean en el libro, parece ser una práctica común entre los profesores que entrevistamos. Uno de los motivos que expresaron, de manera general, es que los alumnos no tienen los conocimientos previos suficientes para enfrentar por sí mismos los problemas. Si bien los maestros entienden la metodología de estudio, propuesta en los materiales curriculares, consideran que los estudiantes no están preparados para trabajar de manera autónoma. Al respecto nos dijeron:

> **Ma**: El libro propone algo ¿no? Que se supone que los chicos ya deben de saber, que se supone que los chicos están capacitados como para… argumentar, para… racionalizar, para muchas cuestiones. Y a veces no es, o sea, tú te encuentras a otra realidad. Entonces, tú haces tus propias adecuaciones… ¡sin dejar de lado, lo que se pretende! Entonces a veces, te digo, tú misma haces tus propias actividades.
>
> **Pr_1:** [En los libros] Yo ofrecería un poco de explicación, quizá un poco de teoría. Que es darle al alumno el conocimiento, realmente. Que ahora el sistema de educación es a partir de lo que ellos traen ¿no? Pero pues a veces… ¡No traen nada! Esa es la realidad, que a veces su experiencia de vida, no han adquirido nada en sus seis años de primaria y en Primero pues, sí cuesta mucho trabajo enseñarlos a ser un poco analistas y a que razonen.
>
> **Pr_2:** Pero desafortunadamente, a veces, muchas veces nos atrasamos porque se supone que los alumnos ya vienen con esos conocimientos básicos. Pero, ¡no! vemos que a veces no. Que tenemos que estar repitiendo otra vez todos los temas y más fuerte. O sea, reforzar mucho esos temas (…)
>
> **Pr_3:** Mire, matemáticas, honestamente les doy de una forma tradicional. Porque la verdad, los niños no vienen preparados como para ser autodidactas, la verdad. Me ponen que nada más les dé el ejemplo y que ellos lo hagan. ¡No!, los tengo así y no entienden. Y si ellos preguntan es porque les interesa. He visto en algunos momentos que las personas que consideran que son autodidactas, pues tienen ahí, únicamente están copiando. ¡Únicamente están copiando, traspasando! Y a la hora que les preguntan, no saben. Entonces yo les doy prácticamente una forma tradicional. Matemáticas sí lo doy personalmente.

A lo largo de su experiencia, los profesores también se forman sus propias concepciones sobre la asignatura, las cuales influyen en la manera en que deciden enseñarla. Así, vimos como en las clases que observamos, el propósito planteado para la primera sesión de la secuencia seis, el cual consideraba el uso de procedimientos sobre la marcha para la resolución de problemas de proporcionalidad, fue cambiado por el uso de la regla de tres, el cual se constituyó como un procedimiento práctico y general.

La maestra justificó este acto, con un interés personal de que los alumnos conozcan diferentes formas de resolver los problemas. Ella nos dijo:

Ma: Y en matemáticas, en lo personal me gusta darles mínimo dos o tres alternativas, si las hay, para resolver un mismo problema (…) Aunque no las plantee [el libro]. Al final yo le digo al chico: ¡No es ésta, no es ésta, ni es ésta, es la que tú crees que es más fácil para ti! Todas nos van a llevar al mismo camino, tenemos que llegar al mismo resultado, pero tú puedes aplicar ésta, puedes aplicar ésta y tú puedes aplicar ésta. Tú elige cuál es, con cuál se te hace más fácil, la cuestión es que llegues al mismo resultado. Entonces no es así como que cuadrarlos, a que todos debemos de sumar, todos debemos de restar y… ¡No! Si hay otros caminos… Incluso los mismos chicos, hay chicos muy habilidosos que a veces tú no sabías cómo y él llega al mismo resultado. Y él llega y te explica ¡Ah, pues qué padre! ¿No? Y sabes reconocer que hay chicos que a veces nos rebasan en ese aspecto, son analíticos. Entonces sí, en lo personal, a mí en matemáticas a mí me gusta darles dos o tres formas para resolver el mismo problema.

En las clases observadas, la enseñanza fue en torno al aprendizaje de la regla de tres en la primera sesión y del valor unitario en la segunda sesión. Pero es posible que esto se relacione, además del interés de la maestra por mostrar otras formas de resolución, con sus propios conocimientos sobre el tema. En nuestro análisis de las sesiones observadas, vimos cómo la profesora valida e incluso, usa procedimientos sobre la marcha, pero sólo en ciertos casos. Por ejemplo en la resolución del segundo problema de la segunda sesión, valida el procedimiento de un alumno, veamos el diálogo en el que sucede:

Ma: ¿Cómo lo solucionaste tú? *(señala a un alumno)*

Ao4: Yo lo sumé: ciento veinte, más ciento veinte y me dio doscientos cuarenta.

Ma: ¡Ah, porque era el doble! Bueno, ¡fue otra forma!, le da su resultado. Dice su compañero: si por cero punto dos es ciento veinte, cero punto cuatro es el doble. Entonces sumo: a ciento veinte le sumo otros ciento veinte y me da doscientos cuarenta. ¿Es correcto?

Ao: ¡Sí!

Ma: ¡Es correcto su procedimiento también!

En otra ocasión, ella misma utiliza procedimientos sobre la marcha, para explicar el significado del valor unitario. Esto sucedió durante la resolución del problema inicial de la segunda sesión, de la siguiente manera:

Ma: ¿Y qué querrá decir el valor unitario? A su parecer, ¿qué querrá decir el valor unitario?

Ao1: ¿Es el valor que tiene cada centímetro?

Ma: ¡Es el valor que tiene cada centímetro! (*en tono de aprobación, luego pregunta al grupo*) ¿Será correcto o no?

Aos: ¡Sí!

Ma: ¿Por qué? A ver, ¿cómo lo demostramos? Dice, ciento sesenta es el valor que tiene cada centímetro. ¿Cuánto equivale un centímetro? ¡Ciento sesenta!. ¿Uno sería igual a…? ¡Ciento sesenta! ¿De dos centímetros? (*escribe las relaciones en el pizarrón).*

Ao: Trescientos veinte.

Ma: ¡Trescientos veinte! Y de punto cinco 5, estamos hablando que es la, ¿qué?

Ao: La mitad

Ma: ¡La mitad! ¿Y la mitad de ciento sesenta?

Aos: ¡Cuatrocientos!

Aos: ¡Ochenta!

Ma: ¡Ochenta, ochenta, ochenta, ochenta! Los ochenta, aquí estamos en el dos (*señala el trescientos veinte en el pizarrón).* Los ochenta… (*Corrige)* ¡Más los ochenta! Este lo dejamos independiente *(encierra en el pizarrón el ciento sesenta). (Repite)* Más los ochenta del punto cinco, ¿cuánto me da? *(indica en el pizarrón, la suma de trescientos veinte más ochenta).*

Aos: ¡Cuatrocientos!

Ma: Que corresponde a los dos punto cinco ¿Estamos de acuerdo?

Pero al parecer su conocimiento sobre este tipo de procedimientos, a los que ella llama "uso de la lógica" se limita al uso de factores internos pequeños y fáciles de identificar (tales como x2, x$\frac{1}{2}$, x10 ó x$\frac{1}{10}$). Consideramos esto debido a lo que sucedió en la confrontación de la resolución del problema III del apartado *Manos a la obra*, de la *Sesión 1*, cuando un alumno utiliza el factor (x$\frac{1}{20}$):

Ma: (…) Eh… me dices tú que es quince, ¿por qué es quince Oscar?

Ao1: Porque si mil lo dividimos entre veinte…

Ma: ¿Mil entre veinte?

Ao1: ¡Ajá!

Ma: ¡A ver, van haciendo las operaciones que su compañero les va diciendo! (*dirigiéndose a todo el grupo*)

Ao1: Mil entre veinte es igual a cincuenta. Este… eso también lo tenemos que dividir, trescientos entre veinte, igual… y nos sale igual a quince

Ma: ¿Trescientos entre veinte? ¿Y te sale 15?

Aos: ¡Sí!

Ma: Y entonces de cincuenta mililitros, ¿cuánto es?

Ao1: Quince pesos

Ma: ¡Quince pesos!

Ao1: Porque hicimos casi la misma…

Ao6: ¡La mitad de treinta es quince! Y la mitad de cien es cincuenta.

Maestra: Bueno ahí tú ya me estás diciendo otro procedimiento. Tú dijiste de cien… (*Corrige*) De mil, bajamos a los cien y son los treinta. Dices tú, como de cien, cincuenta es la mitad, por eso de treinta sacas quince... En el caso tuyo Oscar, ¿qué dividiste para que saliera el quince? *(la maestra anota en el pizarrón el resultado y el procedimiento dado por ambos alumnos).*

Ao1: Trescientos entre veinte

Ma: ¿Y te sale quince?

Ao1: ¡Sí!

Ma: Mi pregunta es, ¿por qué entre veinte?

Ao1: Porque… este… si lo dividimos, mil entre cincuenta da igual a veinte. Y veinte… ese veinte lo dividí entre trescientos y me dio quince.

Ma: ¡Ah Caray! Bueno, ahí tengo yo unas pequeñas dudas (...)

Al respecto, la profesora considera que los procedimientos utilizados por los alumnos son válidos y que sería enriquecedor integrarlos al estudio de la proporcionalidad. No obstante, reconoce también, su falta de conocimiento sobre ellos, al respecto nos dijo:

Ma: Sí, pues sí, sí. Definitivamente. Bueno yo digo que sí. Nada más que necesitaría sentarme a estudiarlo un poco más. Porque te digo, a lo mejor ese, así desarrollado de esa forma pues no. Como ellos, como muchos de ellos lo manejan, pues no.

Así, ante el uso reiterado de procedimientos sobre la marcha por parte de los alumnos, la profesora fue realizando diferentes acciones para mostrar a la regla de tres, como un método general, al respecto nos comentó:

Ma: Para mí el manejo de las reglas de tres es sumamente importante. Porque no sólo puedes sacar de una cantidad, sino de la cantidad que tú quieras.

Asimismo, en la segunda sesión, el valor unitario se presentó como un método más fácil. En esta ocasión, ante el uso reiterado tanto de procedimientos sobre la marcha como de la regla de tres que hacían los alumnos, sucedió lo siguiente:

Ma: (…) Chequen por qué les digo que es más fácil el valor unitario. Miren, tenemos esta tabla chicos. A ver, nos vamos nada más al valor, puro valor unitario. ¡Chequen por qué es tan fácil! Cuando tenemos estos dos datos, el tamaño real y el tamaño con el microscopio, ¡muy fácil! Vamos a dividir nuestro tamaño del microscopio entre el tamaño real. En pocas palabras ciento veinte entre cero punto dos (*realiza la operación en el pizarrón).* Ya nos decían que, ¿cuánto salía?

Ao: ¡Seiscientos!

Ma: Ese seiscientos va ser nuestro valor, ¿qué?

Aos: ¡Valor unitario!

Ma: ¡Valor unitario! ¡Chequen, chequen lo fácil que es ahora! (…) Nada más vayan multiplicando cada dato por seiscientos (…)

Un profesor entrevistado opinó al respecto del uso de procedimientos sobre la marcha realizados por los alumnos, presentando, a su vez, el uso del valor unitario, como un método general:

> **Pr$_3$:** [Los alumnos] se van con esta tendencia, pero por eso yo se las cambio. Aquí es fácil, es lo que les digo, yo les acostumbro a decir: ¡la lógica no sirve, aquí sirve la matemática! Porque la lógica nada más es: ¡ah bueno le saco mitad! Sí, pero si te encargan la tercera parte, ya no vas a saber… entonces hago que saquen el valor unitario. Porque aquí exactamente no usan el valor unitario, van a mitades. Aquí por ejemplo de mil, la décima parte. Sí, pero les digo: No quiero así, ¡quiero cuarenta y cuatro!

- ***En resumen.***

Las actividades de enseñanza que se desarrollan en clase, se conjugan tanto con los materiales curriculares, como con el propósito de enseñanza que los profesores se formulan de acuerdo a sus propios conocimientos y concepciones sobre las asignaturas y los contenidos, así como sobre los estudiantes, la enseñanza y el aprendizaje.

Cabe mencionar que de acuerdo con Mercado & Luna (2013), dichos conocimientos son adquiridos por los profesores tanto en su formación inicial como en la continua pero, sobre todo, en el ejercicio de su profesión. En él, generalmente, no cuentan con el apoyo pedagógico necesario y la actualización permanente para sistematizar, validar y formalizar sus aprendizajes. Este hecho resulta preocupante en el caso de telesecundaria, donde la mayoría de profesores no cuentan, además, con una formación inicial relacionada con la docencia, mucho menos con la enseñanza de las múltiples disciplinas de las cuales se hacen cargo.

En este capítulo hemos analizado desde dos perspectivas, el trabajo docente en relación a la enseñanza de la proporcionalidad. La primera en relación a las prácticas de enseñanza y los aprendizajes que favorecen y la segunda sobre los factores que determinan el trabajo de enseñanza de los profesores.

Ver el trabajo de enseñanza de la proporcionalidad realizado por una profesora de primer grado de telesecundaria y escuchar tanto sus ideas, como las que otros docentes tienen al respecto, nos ha llevado a dimensionar la complejidad del trabajo docente. También nos ha permitido comprender, aunque desde un punto de vista particular y por ende limitado, que las decisiones que se toman para enseñar están determinadas por múltiples factores y que tienen resultados específicos en el aprendizaje que se favorece que los estudiantes adquieran.

REFLEXIONES FINALES

En el planteamiento de nuestro estudio nos interesamos en analizar dos aspectos que consideramos relevantes sobre la enseñanza de la proporcionalidad en telesecundaria. El primero de ellos contempla las prácticas de enseñanza de este contenido matemático y los aprendizajes que, mediante ellas, se favorecen. El segundo aspecto corresponde a la manera en que las condiciones del oficio docente definen el desarrollo de la enseñanza de la proporcionalidad.

Nuestra investigación se basa en el estudio de un caso particular, sin embargo, nos ha permitido dar cuenta de la manera en que una profesora de primer grado de telesecundaria efectúa su enseñanza de la proporcionalidad; si bien esto no nos permite hacer generalizaciones, sí nos permite aportar algunos elementos al conocimiento que se tiene sobre el trabajo docente en telesecundaria, en condiciones reales.

La enseñanza se realizó a partir de la dirección de las actividades en torno a la resolución de los problemas planteados en el libro de texto. La interacción generada en el aula pone de manifiesto las *ayudas* que la profesora considera pertinentes y que introduce durante el desarrollo de las sesiones; y los conocimientos que los alumnos movilizan a partir de los problemas que les son planteados (*adaptaciones* de su conocimiento, usando la terminología de Robert).

Mediante el análisis identificamos algunos elementos que motivaron las intervenciones de la profesora en la clase, las cuales en su mayoría se constituyeron en simplificar los problemas e introducir o propiciar métodos de solución específicos (ayudas tipo 1).

Respecto a la simplificación de los problemas, los resultados obtenidos muestran que, a partir de su experiencia, la profesora consideró que los alumnos podrían tener dificultades para resolver los problemas que se les presentan en el libro de texto, los cuales son complejos y demandan el uso de diversos conocimientos sobre el contenido de proporcionalidad. Es así que optó por orientar estas actividades, simplificando la tarea que los alumnos debían realizar. La necesidad de orientar y dirigir la clase para el cumplimiento de los objetivos de su planeación curricular pudo ser también un factor determinante en la decisión de la profesora de ser ella quien guiara las actividades, dando poco espacio para el trabajo individual y en equipo de los alumnos.

En cuanto a la introducción de métodos de solución, se hizo evidente la importancia que otorga al uso de técnicas “expertas” para la resolución de los problemas. Vimos que su enseñanza se orientó hacia el propósito de que los alumnos aprendieran a utilizar tanto la *regla de tres* como el *valor unitario* para la resolución de problemas de proporcionalidad directa. La primera de estas técnicas fue introducida por la profesora bajo la consideración de ofrecer a los alumnos diferentes formas de resolver un mismo problema (no es una técnica que se presente en los libros de texto ni el programa para las secuencias correspondientes a las sesiones obervadas); la segunda técnica estaba relacionada con los propósitos establecidos en el libro de texto.

Sin embargo, no fueron enfatizados otros aspectos del estudio de la proporcionalidad que sí estaban planteados por los materiales educativos, tales como la *caracterización de situaciones en las que hay cantidades directamente proporcionales* y el uso de las *propiedades aditiva* y de los *factores internos*.

Lo anterior puede deberse a que el conocimiento que la maestra posee sobre la proporcionalidad esté relacionado con el uso del valor unitario y de la regla de tres y a que encuentre algunas dificultades con la identificación y el uso de los factores internos. Además, el “uso de la lógica”, como la maestra refiere a los *procedimientos sobre la marcha*, parece ser considerado como poco eficiente al no ser un método general. Esta es una idea que además puede estar reforzada por el programa de estudios de matemáticas, en el que se señala al uso del valor unitario, el factor externo constante y la regla de tres, como “procedimientos expertos” para la resolución de problemas de proporcionalidad (SEP, 2006c).

Respecto a la manera en que la maestra toma en cuenta los conocimientos que los alumnos movilizan (*adaptaciones* del conocimiento de los alumnos), observamos que dichas adaptaciones pueden fomentarse a partir del diseño de los problemas los cuales están dirigidos al cumplimiento de propósitos de aprendizaje específicos. No obstante, las interacciones ocurridas en el aula y particularmente las intervenciones de la profesora son determinantes y provocan un cambio en la actividad de los alumnos y los aprendizajes que se favorecen. Aunque fue posible observar algunas adaptaciones surgidas del trabajo autónomo de algunos alumnos que rebasan la pauta establecida por la maestra, en su mayoría no fueron retomadas ni destacadas, sino que se subordinaron a aquellos que la profesora se había planteado para la enseñanza.

En lo que toca a las condiciones del oficio docente y su impacto en la enseñanza, hemos tenido la oportunidad de determinar algunas de las características del modelo educativo que definen las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad de los profesores de telesecundaria.

Identificamos que la existencia de recursos didácticos diseñados para apoyar el estudio en esta modalidad educativa es un factor determinante en el modo en el que se constituyen las prácticas de enseñanza. Asimismo, otros factores como el conocimiento sobre el currículum, la materia, los alumnos y el contenido matemático, son también esenciales en la manera en que los profesores realizan su práctica docente. El libro de texto fue el eje rector de las actividades y el resto de los recursos fueron dejados de lado; por ejemplo, el programa de televisión, distintivo del modelo educativo de telesecundaria resultó de poco apoyo para la profesora.

Asimismo, los demás de recursos diseñados para el estudio en telesecundaria (como interactivos y actividades para el aula de medios) no están disponibles o no son conocidos por la profesora. Ello demanda una mayor responsabilidad al trabajo docente. Demanda que los profesores asuman la enseñanza de diez asignaturas diferentes, demanda el conocimiento de las mismas, no sólo en relación a los contenidos temáticos sino también a su didáctica. Sin embargo, los profesores reciben nulos o escasos apoyo, capacitación y acompañamiento al respecto.

Al destacar estas reflexiones finales no buscamos solo hacer notar las dificultades y la complejidad de la enseñanza de la proporcionalidad en las telesecundarias, sino comprender parte de su origen y de sus repercusiones en el aprendizaje de los estudiantes. Consideramos que a partir de nuestros resultados cabe plantearse nuevas investigaciones relacionadas tanto con la enseñanza de la proporcionalidad como con el trabajo de los profesores en telesecundaria. En cuanto a lo primero consideramos importante seguir estudiando la enseñanza de este contenido matemático y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes; específicamente, consideramos necesario profundizar en los estudios de lo que los alumnos efectivamente aprenden en clase a partir de la gestión real, en los salones de clases, de las propuestas didácticas actuales. Estudios como estos pueden contribuir a la revisión de los distintos materiales y recursos didácticos, así como al diseño de proyectos de capacitación, actualización y acompañamiento al trabajo de los profesores.

Consideramos que vale la pena reflexionar profundamente sobre el trabajo docente en una modalidad que crece continuamente, que atiende a la quinta parte de la población y que está destinada a dar servicio en zonas marginadas y rurales principalmente. Todo con miras a contribuir a la mejora del servicio y de la atención que se brinda a las comunidades, sus estudiantes y sus maestros.

REFERENCIAS

Ávila, A. (1996). Los usos reconocidos de los textos de matemáticas. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1(2) Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14000204

Ávila, A. (coord.) (2004). La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas. México. SEP-SEByN

Block, D., Mendoza T., & Ramírez, M. (2010) ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: SM.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M. & Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12(33) 731-726. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14003313

Calixto Flores R. & Rebollar Albarrán A. (2008). La telesecundaria ante la sociedad del conocimiento. Revista Iberoamericana de Educación No. 44/7. OEI. Recuperado de http://rieoei.org/expe/2197Flores.pdf

Carvajal Cantillo, E. (2003). Una mirada a las aulas de la telesecundaria. Reconstrucción del modelo pedagógico El caso de las matemáticas. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXXIII(3) 151-157. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27033307

__________ (2006). Interacción en las aulas de la telesecundaria: un acercamiento desde la enseñanza de las matemáticas. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXXVI(3-4) 129-157. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27036407

Diario Oficial de la Federación (2006). Acuerdo número 384 por el que se establece el nuevo Plan y Programas de Estudio para la Educación Secundaria. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/seb2010/pdf/catalogo/ACUERDO_384.pdf

Eternod S., Villarreal M. & Becerril V. (2006). Un acercamiento al modelo renovado de telesecundaria. México: SEP.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2006). El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria. México: INEE

__________ (2013). Panorama educativo de México 2012. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación Básica y Media Superior. México: INEE.

Jiménez J., Martínez R. & García C. (2010). La telesecundaria en México un breve recorrido histórico por sus datos y relatos. México: SEP. Recuperado de http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/docs/B-HISTORIA-TELESECUNDARIA.pdf

Kalman, J. & Carvajal, E. (2007). Hacia una contextualización de la enseñanza y el aprendizaje en las aulas de la telesecundaria. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXXVII(3-4) 69-106. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27011410004

Mercado M. Ruth & Luna E. María Eugenia (2013). Saber enseñar: un trabajo de maestros. México: SM.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. Educación Matemática, 24(1) 133-157. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850006

Quiroz Estrada R. (2003). Telesecundaria. Los estudiantes y los sentidos que atribuyen a algunos elementos del modelo pedagógico. Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol. 8, núm. 17, 221-243. Recuperado de http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v08/n017/pdf/rmiev08n17scC00n03es.pdf

Reyes Juárez A. (2011). Experiencias estudiantiles de adolescentes rurales: Un acercamiento a la faceta subjetiva de la telesecundaria en México. Revista Iberoamericana de Educación. No. 55/3. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/4120Reyes.pdf

Rivas, M. A., Godino, J. D. & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. Boletín de Educación Matemática, 26(42 B) 559-588. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574008

Rivas Olivo, M. & Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. Educere, 14(48) Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35616720018

Robert (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré): une hipothèse, des inferences en formation. Recherches en didáctique des mathématiques, vol. 27, No. 3. 271 – 312.

Rockwell, E. (1995). De huellas, bardas y veredas: Una historia cotidiana de la escuela. En E. Rockwell (Coord.), La escuela cotidiana. 13 – 57. México: FCE

Ruiz Ledesma, E. F. & Valdemoros Álvarez, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2) 299-324. Recuperado de http://redalyc.org/articulo.oa?id=33590207

Santos, A. (2001). Oportunidades educativas en telesecundaria y factores que las condicionan. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXXI(3) 11-52. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27031302

Santos del Real, A. & Carvajal Cantillo, E. (2001). Operación de la telesecundaria en zonas rurales marginadas de México. Revista Latinoamericana de Estudios

Educativos (México), XXXI(2) 69-96. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27031204

Secretaría de Educación Pública (2001). Plan Nacional de Educación 2001-2006. México: SEP.

__________ (2006a). Matemáticas 1. Libro para el alumno. Telesecundaria. México: SEP.

__________ (2006b). Matemáticas 1. Libro para el maestro. Telesecundaria. México: SEP.

__________ (2006c). Matemáticas 1. Programa de estudios. Secundaria. México: SEP.

__________ (2011a). Acuerdo 592 Por el que se establece la articulación de la educación básica. México: SEP.

__________ (2011b). Modelo Educativo para el fortalecimiento de la Telesecundaria. Documento Base. México: SEP.

__________ (2011c). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas. México: SEP.

Silas Casillas, J. C. & Gómez López, L. F. (2013). El desarrollo de habilidades lectoras en la escuela telesecundaria. Algunas reflexiones sobre el papel del docente y los logros de los alumnos. CPU-e, Revista de Investigación Educativa, (17) 66-87. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=283128329005