UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Maestría en Desarrollo Educativo

Conocimientos previos para entender las fracciones como cantidades de tamaño relativo

Tesis que para obtener el grado de
MAESTRA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Presenta
Claudia Zúñiga Gaspar

Director de Tesis
Dr. José Luis Cortina Morfín

México, D. F. noviembre de 2008

Dedicatoria

A mis papás, con todo mi cariño:
Macario, mi papá, a quien admiro por su sabiduría y quien ha sido mi inspiración para seguir aprendiendo
Judith, mi mamá, porque me motiva y apoya en todos mis proyectos

A mis hermanos:
Mariano, porque me ha enseñado a ver lo positivo de todo y de todos
Karen, por su espíritu de lucha y su gran carácter, los cuales valoro mucho

A mis abuelas y abuelos:
En memoria, porque gracias a ellos existe mi linda familia

A mis amigos:
Porque siempre han estado conmigo

A mis maestros de la Línea en Educación Matemática:
De quienes aprendí que sí es posible mejorar la enseñanza de las Matemáticas

A los niños:
Por ayudarme a entender cómo se ve el mundo desde su perspectiva

Agradecimiento

La investigación y el análisis reportados en esta tesis fueron posibles gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México a través del proyecto 53448. Las opiniones y puntos de vista expresados no reflejan necesariamente a los del Consejo.

The Caterpillar and Alice looked at each other for some time in silence: at last the Caterpillar took the hookah out of its mouth, and addressed her in a languid, sleepy voice.

'Who are YOU?' said the Caterpillar.

This was not an encouraging opening for a conversation. Alice replied, rather shyly, 'I--I hardly know, sir, just at present--at least I know who I WAS when I got up this morning, but I think I must have been changed several times since then.'

'What do you mean by that?' said the Caterpillar sternly. 'Explain yourself!'

'I can't explain MYSELF, I'm afraid, sir' said Alice, 'because I'm not myself, you see.'

'I don't see,' said the Caterpillar.

'I'm afraid I can't put it more clearly,' Alice replied very politely, 'for I can't understand it myself to begin with; and *being so many different sizes in a day is very confusing*.'

'It isn't,' said the Caterpillar.

'Well, perhaps you haven't found it so yet,' said Alice; 'but when you have to turn into a chrysalis--you will some day, you know--and then after that into a butterfly, I should think you'll feel it a little queer, won't you?'

Alice's adventures in wonderland
Lewis Carroll

Índice

Introducción 1

CAPÍTULO 1. Definición del problema 4

1.1. ¿Por qué las fracciones? 4

1.2. Algunas realidades del aprendizaje de las fracciones en la educación básica en México: la prueba Excale 7

1.2.1. Niveles alcanzados en Matemáticas en 6º de primaria 9
1.2.2. Las fracciones en la prueba Excale 11

1.3. El Constructivismo 15

1.3.1. Los conocimientos previos y el aprendizaje de las matemáticas 16
1.3.2. La importancia de los cocimientos previos para el aprendizaje de las fracciones y el caso de la prueba Excale 19

CAPÍTULO 2. La enseñanza de las fracciones 22

2.1. El modelo tradicional 23

2.2. El modelo de los subconstructos 27

a) Relación parte-todo 29
b) Razón 29
c) Cociente 30
d) Medida 31
e) Operador 32

2.3. El modelo de tamaños relativos 33

CAPÍTULO 3. Recolección de datos y Metodología 39

3.1. Participantes 41

3.2. Metodología 42

3.2.1. Descripción del instrumento 43

CAPÍTULO 4. Resultados **47**

4.1. Situaciones de Multiplicación 47

4.1.1. Multiplicación directa 47
Los tazos 47
Las galletas 50
4.1.2 Multiplicación inversa 51
El pez y los mandados 51

4.2. Fracciones representadas convencionalmente 53

4.3. Multiplicandos y tamaños relativos 55

El cartón de leche y los vasos 55
El viaje de la Selección Mexicana de Fútbol 63

CAPÍTULO 5. Conclusiones **68**

Notas **73**

Referencias **74**

ANEXO **79**

Introducción

Esta tesis se basa en el análisis de entrevistas clínicas que se le condujeron a los 14 alumnos de un grupo de 4º grado de primaria en una escuela pública del Estado de Chiapas, a la que asistían estudiantes de un contexto socialmente desfavorecido. Se documenta la diversidad y la naturaleza de los razonamientos de estos estudiantes de primaria al involucrarse en actividades didácticas que implican la comparación relativa de tamaños; ello con el objetivo de establecer si dichas actividades pueden ser un punto de partida viable para la enseñanza inicial de las fracciones. Las actividades didácticas que implican la comparación relativa de tamaños se diferencian de las que se utilizan tradicionalmente para introducir el concepto de fracción en que no se fundamentan en la partición o repartición equitativa.

El análisis de las entrevistas sugiere que es viable involucrar a estudiantes que se inician en el estudio de las fracciones, incluso a aquellos que pertenecen a contextos socialmente desfavorecidos, en actividades basadas en la comparación de tamaños de manera relativa. Estas actividades parecen tener el potencial de ayudar a los estudiantes a razonar cuantitativamente sobre fracciones unitarias de manera relativamente compleja. Del análisis se concluye que actividades basadas en la comparación de tamaños de manera relativa pueden ser una alternativa al método de partición o reparto equitativo que tradicionalmente se utiliza, y que algunos autores han juzgado inadecuado para apoyar el desarrollo de entendimientos complejos de los estudiantes sobre fracciones.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 1, *Definición del problema*, explico la importancia de privilegiar la enseñanza de las fracciones en la escuela, ya que es un contenido troncal para la comprensión de otros conceptos matemáticos; conceptos que son fundamentales en la vida escolar futura así como en la vida cotidiana. Dada la importancia de este concepto matemático, hago una revisión acerca de cómo se están aprendiendo las fracciones en las primarias del Sistema Educativo Nacional, de acuerdo con resultados arrojados por pruebas estandarizadas como los Excale. Asimismo, dentro de este capítulo, explico cómo los estudiantes construyen sus conocimientos matemáticos y destaco la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos conocimientos.

En el Capítulo 2, *La enseñanza de las fracciones*, hago una breve revisión acerca de tres aproximaciones didácticas utilizadas en la introducción de la enseñanza de las fracciones en primaria. Una de ellas se basa en la enseñanza tradicional de las fracciones, otra aborda las fracciones desde sus diferentes significados, y la última trata de lograr que los estudiantes entiendan a las fracciones como números que cuantifican tamaño de manera relativa. Esta última aproximación parece pudiera tener éxito como guía de los docentes para apoyar a sus estudiantes en el desarrollo de entendimientos más firmes sobre las fracciones.

En el Capítulo 3, *Recolección de datos y metodología*, expongo cómo se realizó el estudio que da fundamento a esta tesis. Hago una descripción de los niños que participaron de las entrevistas clínicas (niños procedentes de contextos desfavorecidos como hay muchos en nuestro país). Explico cómo se llevaron a cabo las entrevistas y en qué se fundamentaron las actividades utilizadas en ellas.

En el Capítulo 4, *Resultados*, detallo las actividades presentadas a los estudiantes de cuarto grado de primaria durante las entrevistas clínicas, así como los resultados obtenidos de los razonamientos de los estudiantes, de manera grupal e individual, al enfrentarse con las situaciones problemáticas presentadas. Todo ello lo realizo con la finalidad de conocer los conocimientos previos con los que contaban estos estudiantes para iniciarse en una ruta de aprendizaje de las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos.

En el Capítulo 5, *Conclusiones*, explico las implicaciones de los resultados arrojados por el análisis de las entrevistas. Pongo especial énfasis en lo que estos resultados pueden implicar para aquellos docentes interesados en apoyar mejor a sus estudiantes en la construcción sólida de un concepto matemático fundamental, las fracciones.

CAPÍTULO 1

Definición del problema

El propósito de este capítulo es exponer por qué es importante privilegiar la enseñanza de las fracciones en la escuela y al mismo tiempo conocer hasta qué punto las están aprendiendo los niños de primaria en México.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: Primero se explica cómo dentro de las matemáticas hay contenidos que son fundamentales para avanzar en entendimientos de contenidos más complejos dentro de la vida escolar y que, al mismo tiempo, son esenciales para comprender situaciones que se presentan en la vida cotidiana. Tal es el caso de las fracciones. Después se revisa cómo está siendo aprendido este contenido, fundamental para construir aprendizajes más elaborados en matemáticos, en las primarias del Sistema Educativo Nacional, según los resultados que arrojan pruebas estandarizadas, como los Excale. Más adelante se expone por qué desde una postura constructivista se puede comprender cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático dependiendo de las estructuras con las que cuenten. Por último, se habla de la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos conocimientos.

1.1. ¿Por qué las fracciones?

Las sociedades de hoy exigen cada vez más que las personas posean una cultura matemática y científica sólida para que puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas (Artigue, 2004), lo que podría significar que saber matemáticas es importante para no quedar excluido de muchas actividades en las que se requiere de su comprensión. Artigue señala que en la actualidad, a causa de las dinámicas del mundo globalizado, se precisa de matemáticas que permitan interpretar la enorme cantidad de información que a diario se recibe, y que muchas veces se requiere de habilidades más allá de saber hacer "operaciones básicas". En la comunidad de naciones democráticas y económicamente desarrolladas de hoy se reconoce al conocimiento matemático como un elemento fundamental del desempeño laboral y de la participación ciudadana. Esta consideración está claramente plasmada en el Programa Internacional para la Evaluación del Alumnado (Programme for International Student Assessment, PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). En el PISA se reconoce que la adquisición de competencias matemáticas es un aspecto necesario para el desarrollo laboral de los ciudadanos de modo que puedan participar crítica e informadamente en una sociedad democrática (Vidal y Díaz, 2004).

Con base en lo anterior, los sistemas educativos plantean estrategias para apoyar el desarrollo de esas competencias matemáticas en el estudiantado a lo largo de la instrucción escolar. Para ello, cada país elabora sus currículos nacionales con el propósito de darle a los alumnos las herramientas necesarias para ir avanzando en sus aprendizajes. Sin embargo, es importante decidir con seriedad cuáles son los conocimientos matemáticos a los que se debe dar prioridad.

Uno de los conocimientos fundamentales en la adquisición de otros más complejos en la educación media y media superior, que aparecen en la instrucción primaria, es el de las fracciones. De acuerdo con Thompson y Saldanha (2003), las fracciones son parte de las convenciones que los individuos comparten y que tienen que aprender para comunicarse entre sí, puesto que éstas se encuentran dentro de las matemáticas que hay que interpretar constantemente en la vida cotidiana.

Para Lamon (2006), el aprendizaje de las fracciones marca el inicio del viaje hacia la comprensión de los números racionales y hacia el razonamiento proporcional. Este último, a su vez, abre la puerta hacia matemáticas superiores y hacia la ciencia. Muchas son las profesiones en las que sus practicantes necesitan de las matemáticas para incrementar la eficiencia, salvar vidas, ahorrar dinero o tomar decisiones importantes.

Otro de los aspectos que es muy importante destacar acerca de las fracciones es que su relación con los porcentajes, los números decimales y las proporciones es muy estrecha. Aunque las fracciones son la base para entender a los otros conceptos matemáticos, todos ellos (las fracciones, los porcentajes, los números decimales y las proporciones), a pesar de que son diferentes de algún modo, pueden considerarse como lo mismo (van Galen *et al.*, 2008). Sus similitudes permiten que los podamos intercambiar de una forma a otra indistintamente, dependiendo del contexto en el que estemos trabajando. De esta manera, si se tiene flexibilidad al interpretar fracciones, números decimales, porcentajes y proporciones, mucha de la información a la que estamos expuestos en nuestra vida cotidiana puede tener sentido más fácilmente. Poder hacerlo nos permitirá tomar decisiones de manera informada al comprar productos, elegir un crédito, invertir en un banco, reclamar abusos por el pago de un servicio, etc. Por esta razón, las fracciones se convierten en parte esencial de los aprendizajes matemáticos cuya enseñanza se debe privilegiar.

Dentro de mi práctica como docente de primaria, he podido observar que lograr que los niños entiendan que los números decimales, los porcentajes, las conversiones de unidades y las escalas se relacionan con el mundo de las fracciones no es una tarea fácil. Incluso me preguntaba constantemente si el que no lograran comprenderlo mis alumnos se debía al método de enseñanza que yo empleaba. Fue así que decidí darme a la tarea de profundizar sobre este tema en mi tesis de maestría. Durante el tiempo que he estado realizando esta investigación me he podido percatar de que la enseñanza de las fracciones es un problema al que hay que mirar más de cerca, pues no sólo era una preocupación personal: descubrí que ha sido una preocupación constante dentro del campo de la investigación en Educación Matemática. Tal parece que aún hay mucho por entender acerca de cómo lograr más en la enseñanza de las fracciones.

1.2. Algunas realidades del aprendizaje de las fracciones en la educación básica en México: la prueba Excale

Como se mencionó, las fracciones son un contenido central para el aprendizaje de matemáticas cada vez más complejas y también para comprender situaciones de la vida diaria que tienen que ver con matemáticas. ¿Cómo se puede saber si en las escuelas se prepara a los estudiantes con las herramientas necesarias para enfrentarse con las matemáticas de la vida cotidiana?

En la actualidad existen pruebas estandarizadas como la evaluación PISA, que evalúan las competencias matemáticas de los estudiantes que acaban de ingresar a la educación media. México cuenta ya con la prueba Excale que es realizada por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), mediante la cual se evidencia la eficacia de la enseñanza en el nivel básico del Sistema Educativo Nacional.

El INEE es una instancia independiente de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Su misión es evaluar en forma válida y confiable el logro escolar de los estudiantes mexicanos, a fin de retroalimentar al Sistema Educativo Nacional (SEN) y a las políticas que lo sustentan, así como informar a la ciudadanía sobre la calidad educativa del país (Backhoff, Andrade, Sánchez, Peón, y Bouzas, 2006).

En febrero de 2004 el INEE desarrolló el Plan General de Evaluación del Aprendizaje, en cuyo contexto surgió una nueva generación de pruebas nacionales para evaluar las habilidades y los conocimientos de los estudiantes de educación básica y media superior, llamados Exámenes de la Calidad y Logro Educativos que por su acrónimo se les conoce como Excale. Dichos exámenes fueron aplicados por primera vez en junio de 2005 a alumnos de 6º de primaria y 3º de secundaria. Las asignaturas que se evaluaron fueron Español y Matemáticas, por ser consideradas prioritarias a partir de la reforma educativa de 1993 (Secretaría de Educación Pública, 1993). Con los resultados obtenidos se elaboró el documento "El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la educación básica en México" (Backhoff *et al.*, 2006), del cual se obtuvo la información que se menciona adelante. El objetivo de dicho documento es dar a conocer en forma objetiva y confiable los niveles de aprendizaje que alcanzan los estudiantes de la educación básica, de acuerdo con los contenidos establecidos en los planes y programas de estudio, al final de la primaria y la secundaria.

El Excale evaluó a estudiantes inscritos en Escuelas Públicas y Privadas incorporadas a la SEP de las 32 entidades federativas del país. En la educación primaria se consideraron los siguientes cinco estratos de escuelas: Urbana Pública, Rural Pública, Educación Indígena, Cursos Comunitarios y Educación Privada. La prueba se aplicó a una muestra representativa de alumnos de 6º de primaria de todo el país conformada por 47 mil 858 alumnos de 2 mil 770 escuelas. En el caso de la educación media estuvieron representados las siguientes cuatro modalidades de secundarias: Generales, Técnicas, Telesecundarias y Privadas. La muestra representativa de alumnos de 3° de secundaria estuvo conformada por 52 mil 251 alumnos de 2 mil 397 escuelas.

1.2.1. Niveles alcanzados en Matemáticas en 6° de primaria

Los resultados de la prueba se reportan tanto en promedios de puntuaciones como en niveles de logro, los cuales quedaron definidos en cuatro clases: Por debajo del básico, Básico, Medio y Avanzado. Estos niveles de desempeño identifican los conocimientos y habilidades precisas que tienen los estudiantes en cada una de los cuatro Excale: Excale-06 de Español y Matemáticas (primaria), y Excale-09 de Español y Matemáticas (secundaria).

Para fines de este estudio, el análisis se centrará en los resultados de la prueba Excale de Matemáticas en 6° de primaria. Los estudiantes quedaron ubicados de acuerdo con las tareas en las que tenían un buen desempeño. Los niveles de logro alcanzados por estos estudiantes en esta prueba a nivel nacional se muestran a continuación (ver Tabla 1).

Nivel de logro	Porcentaje de estudiantes a nivel nacional	Actividades de acuerdo al nivel de logro
Por debajo del básico (hasta 466.59)	17.4 %	Los alumnos de este nivel resuelven problemas con una operación que implique sumas o restas con números de hasta cuatro cifras; además comparan decimales con el mismo número de cifras. Asimismo, calculan el promedio de números naturales en contextos conocidos.
Básico (466.60-568.84)	52.3 %	Los alumnos de este nivel leen, ordenan y comparan números naturales; además resuelven problemas sencillos con números naturales, decimales y fraccionarios que impliquen una operación en contextos conocidos. Adicionalmente, calculan perímetros y áreas de triángulos y cuadriláteros dentro de una retícula. Asimismo, interpretan información contenida en gráficas y tablas sencillas.
Medio (568.85–663.63)	23.5 %	Los alumnos de este nivel leen, comparan y ordenan números decimales y fraccionarios, y resuelven con ellos problemas sencillos de suma y resta; además resuelven problemas con números naturales que impliquen dos o tres operaciones. Igualmente, clasifican figuras con base en sus propiedades geométricas; también calculan áreas mediante el uso de fórmulas, y calculan volúmenes de figuras mediante el conteo de unidades cúbicas; identifican puntos en croquis, planos y mapas, así como puntos en el primer cuadrante de un plano cartesiano. Asimismo, interpretan información contenida en gráficas y tablas que contienen datos; resuelven problemas sencillos de probabilidad que no impliquen realizar un análisis combinatorio; y resuelven problemas de proporcionalidad.
Avanzado (663.64 o más)	6.9 %	Los alumnos de este nivel resuelven problemas que impliquen varias operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales. También tienen nociones depuradas de conceptos tales como: perímetro, área y volumen; también interpretan la representación plana de un cuerpo geométrico y el desarrollo plano de una figura; asimismo describen trayectos en planos y mapas; pueden además realizar conversiones de unidades de medida. También interpretan información contenida en gráficas y tablas, y resuelven problemas de probabilidad que impliquen un análisis combinatorio; aplican las propiedades de la proporcionalidad.

Tabla 1. Niveles de logro alcanzado por los estudiantes de 6º de primaria

Observando con detalle estos niveles en los que son clasificados los estudiantes de 6º grado de primaria, habría que preguntarse qué quiere decir que un estudiante esté ubicado en el nivel básico. De acuerdo con el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española

(2001), "básico" significa (1) adj. Perteneciente o relativo a la base o bases sobre que se sustenta algo, fundamental. Considerando esta definición, el nivel básico podría significar que un estudiante que se encuentra en dicho nivel está capacitado con los conocimientos base o fundamentales para ingresar a la secundaria. Sin embargo, habría que cuestionarse si estas habilidades que se mencionan en este nivel cubren las exigencias para ingresar a la educación media y si ése sería el perfil que al menos se requeriría de un estudiante para que pudiera continuar desarrollando aprendizajes matemáticos más elaborados a partir de los que ya tiene. Si consideramos que el nivel básico no es suficiente para que un estudiante ingrese a la secundaria, observamos que, de acuerdo con los resultados de Excale, sólo el 30.4 por ciento de los estudiantes que ingresa a la secundaria (considerando sólo al nivel medio y avanzado) sería el que podría tener mayores posibilidades de éxito en adquirir conocimientos de las matemáticas, así como de otras materias que implicaran a las mismas (la física, la química, las ciencias sociales, etc.).

1.2.2. Las fracciones en la prueba Excale

En la prueba Excale los contenidos que se evaluaron fueron los que están incluidos dentro del plan y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública, los cuales están organizados en cinco ejes temáticos (Secretaría de Educación Pública, 1993). Las fracciones en el programa de educación primaria se encuentran en el eje temático de "los Números, sus relaciones y sus operaciones"; sin embargo, hay algunos otros contenidos que tienen que ver con las fracciones pero que pertenecen a otros ejes temáticos, tal es el caso de las conversiones de unidades de medida que corresponden al eje temático de "Medición" o los porcentajes que están vinculados al eje temático de "Procesos de cambio". Del total de

130 reactivos del Excale de Matemáticas de sexto de primaria, 56.15 por ciento se refiere a los Números, sus relaciones y sus operaciones; 19.23 por ciento a Medición; 9.23 por ciento a Geometría; 3.08 por ciento a Tratamiento de la información; 4.62 por ciento a Predicción y azar; y 7.69 por ciento a Procesos de cambio, proporciones que son similares a los pesos de los diferentes ejes en el currículum.

Con respecto a las fracciones, que se encuentran dentro del eje de los Números, sus relaciones y sus operaciones, la capacidad de aciertos que tienen los estudiantes sugiere que es un área en la que hay que poner atención, ya que menos del 35% de los estudiantes a nivel nacional son los que tienen mayores probabilidades de responder correctamente los ítems relacionados con este contenido.

A continuación se presentan cuatro ejemplos de los reactivos muestra sobre fracciones de la prueba Excale junto con los resultados obtenidos por los estudiantes en ítems similares (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, s. f.), donde el porcentaje señalado indica la proporción de alumnos que tenían una probabilidad de .67 o más de responderlos correctamente ($p \geq .67$).

Ejemplo 1.

Contenido	% Nacional
Identificar fracciones comunes equivalentes	26

Reactivo Muestra:

Rosa e Irma hacen un pastel con los siguientes ingredientes:

Ingredientes	Rosa	Irma
Harina	$\frac{3}{4}$ de kilogramo	$\frac{2}{4}$ de kilogramo
Azúcar	$\frac{2}{3}$ de kilogramo	$\frac{4}{6}$ de kilogramo
Mantequilla	$\frac{4}{6}$ de kilogramo	$\frac{4}{3}$ de kilogramo
Huevo	$\frac{6}{3}$ de kilogramo	$\frac{3}{6}$ de kilogramo

¿De cuál ingrediente ocuparon la misma cantidad?

A. Azúcar.*
B. Harina.
C. Mantequilla.
D. Huevo.
* RESPUESTA CORRECTA

Ejemplo 2.

Contenido	% Nacional
Resolver problemas que impliquen una suma y una resta de fracciones con diferente denominador	25.2

Reactivo muestra:

Un auto inicia un recorrido teniendo $\frac{3}{4}$ de tanque de gasolina. En una primera parte del recorrido gasta $\frac{3}{8}$ de tanque y en la segunda parte del recorrido gasta $\frac{2}{8}$de tanque. ¿Qué cantidad de gasolina es la que queda en el tanque?

A. $\frac{1}{8}$ de tanque *
B. $\frac{5}{8}$ de tanque
C. $\frac{4}{8}$ de tanque
D. $\frac{11}{8}$ de tanque
* RESPUESTA CORRECTA

Ejemplo 3.

Contenido	% Nacional
Resolver problemas con una fracción como operador	16.4

Reactivo muestra:

Sonia trabaja en un puesto de fruta en el mercado. De la venta de cada día, Sonia gana $\frac{2}{5}$ partes del total de la venta. ¿Cuál fue la ganancia de Sonia del día domingo si el total de la venta fue de 500 pesos?

A. 200 pesos*
B. 10 pesos
C. 100 pesos
D. 1000 pesos
* RESPUESTA CORRECTA

Ejemplo 4.

Contenido	% Nacional
Comparar fracciones mixtas	5.3

Reactivo muestra:

El listón para el moño del vestido de Ana mide $3\frac{2}{5}$ metros.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Ana tiene entre $3\frac{1}{4}$ metros y $3\frac{1}{2}$ metros. *

B. Ana tiene entre $3\frac{1}{2}$ metros y 4 metros.

C. Ana tiene menos de $3\frac{1}{4}$ metros.

D. Ana tiene más de $3\frac{1}{2}$ metros.

* RESPUESTA CORRECTA

Estos resultados, aunque no revelan específicamente qué están comprendiendo los estudiantes, nos pueden mostrar un panorama general que sugiere que los aprendizajes en fracciones no se están alcanzando: el 35% o menos de los estudiantes logra resolver con éxito los problemas que tienen que ver con este contenido (con base en el criterio probabilístico $p \geq .67$).

Muchas pueden ser las causas por las cuales los estudiantes no están obteniendo buenos resultados en esta prueba, sin embargo, como profesores, esta información se puede tomar como referencia para ver qué está sucediendo al interior de nuestros salones de clase y buscar formas de apoyar a los estudiantes para que avancen en su comprensión de las matemáticas.

1.3. El Constructivismo

La teoría del aprendizaje en la que se fundamenta mi tesis es el constructivismo. El constructivismo en mi investigación es importante porque es una postura que me ayuda a entender cómo ocurre el aprendizaje en los niños. En esta teoría se considera que conocimientos nuevos se van desarrollando a partir de conocimientos anteriores (Sfard, 2001). Moreno y Waldegg (1995) señalan que en el constructivismo "todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas anteriores y más primitivas" (p. 34).

Simon, Tzur, Heinz, y Kinzel (2004) aclaran por qué es importante retomar al constructivismo para explicar cómo los estudiantes desarrollan sus entendimientos matemáticos a partir de sus estructuras cognitivas anteriores. Ellos destacan tres principios básicos de esta postura para la educación matemática:

1. Las matemáticas son creadas a través de la actividad humana. Los seres humanos no tienen acceso a las matemáticas que son independientes de sus formas de conocer.
2. Lo que saben los individuos (sus concepciones actuales) facilita u obstaculiza lo que ellos pueden asimilar, percibir y entender.
3. El aprendizaje de las matemáticas es un proceso de transformación de las formas de conocer (concepciones) y de actuar de los individuos.

El constructivismo es una postura que también ha influenciado el desarrollo de importantes documentos curriculares, entre los que se encuentran los planes y programas de la SEP (1993): "la selección de contenidos de esta propuesta descansa en el conocimiento que actualmente se tiene sobre el desarrollo cognoscitivo del niño y sobre los procesos que sigue en la adquisición y la construcción de conceptos matemáticos específicos" (p. 52).

1.3.1. Los conocimientos previos y el aprendizaje de las matemáticas

Uno de los aspectos del constructivismo que es clave en mi trabajo de tesis es el de los conocimientos previos. Éstos son importantes debido a que el aprendizaje de nuevos conocimientos siempre estará influenciado por los conocimientos que los estudiantes ya tenían (Thompson y Saldanha, 2003; Gofree, 2000). Es decir, la forma en la que los alumnos comprenden una idea puede tener fuertes implicaciones en cómo ellos entenderán nuevas ideas. En esta misma línea, Sfard (2001) señala que el conocimiento nuevo sólo se puede crear a partir del conocimiento existente.

Los planes y programas de la SEP (1993) también parten de que los conocimientos previos son fundamentales en el aprendizaje matemático, ya que "una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver ciertos problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los procedimientos y las conceptualizaciones propias de las matemáticas" (p. 51). Asimismo mencionan que "el objetivo es que los alumnos, a partir de los conocimientos con que llegan a la escuela, comprendan más cabalmente el significado de los números y de los símbolos que los representan y puedan utilizarlos como herramientas para solucionar diversas situaciones problemáticas. Dichas situaciones se plantean con el fin de promover en los niños el desarrollo de una serie de actividades, reflexiones, estrategias y discusiones, que les permitan la construcción de conocimientos nuevos o la búsqueda de la solución a partir de los conocimientos que ya poseen" (p. 52) .

Las experiencias que han tenido los niños en sus años anteriores de escuela, dentro de casa, en la calle o jugando pueden ser un punto de partida que puede aprovecharse para iniciarlos en nuevos aprendizajes. Dentro de la enseñanza de las matemáticas, que está contemplada en el plan de estudios de la SEP (1993), se promueve la evolución y enriquecimiento de las concepciones del alumno mediante la resolución de situaciones que lo lleven a abandonar, modificar o enriquecer dichas concepciones y a acercarse paulatinamente al lenguaje y los procedimientos propios de las matemáticas.

Otra de las propuestas de enseñanza que parte de esta postura constructivista y que sugiere que se tomen en cuenta los conocimientos con los que llegan los alumnos es la Educación de las Matemáticas Realistas (Realistic Mathematics Education, RME). Gravemeijer (1997) menciona que dentro de las matemáticas realistas se les da la oportunidad a los estudiantes de experimentar un proceso similar al proceso por el cual fueron inventadas las matemáticas. Por lo tanto, los procedimientos de solución informal de los estudiantes son muy importantes. Cobb, Zhao y Visnovska (2008) señalan que la propuesta de la RME tiene la idea de que el conocimiento informal y las estrategias de los estudiantes pueden ser el punto de partida para el desarrollo del conocimiento matemático abstracto. La intención es que las estrategias informales antecedan a los procedimientos formales de las matemáticas. Por ello, en las matemáticas realistas es muy importante que los puntos de partida en una secuencia de enseñanza sean experencialmente reales para los estudiantes, de manera que éstos se puedan involucrar inmediatamente por considerarla personalmente significativa y puedan llegar a procedimientos informales de solución que se convertirán en los nuevos puntos de partida hacia la formalización de modelos matemáticos de solución.

De acuerdo con el constructivismo, para que ocurra el aprendizaje es necesario, entonces, observar cuáles son los conocimientos con los que llegan los alumnos antes de comenzar la enseñanza de un nuevo contenido. El hecho de poner atención en el tipo de recursos con los que cuentan los estudiantes para enfrentarse a una situación que, de acuerdo a su nivel escolar, serían capaces de resolver es muy importante, ya que si no se toma en cuenta lo que los niños saben, se puede desaprovechar un recurso con el potencial de apoyarles en el aprendizaje del nuevo conocimiento. Al mismo tiempo, descubrir que los niños aún no cuentan con las herramientas adecuadas para entender ciertas ideas puede evitar, con una oportuna intervención, que estas insuficiencias lleguen a obstaculizar o limitar el acceder al nuevo aprendizaje.

Uno de los retos de la instrucción en matemáticas que señala Cobb (1988) es el apoyar a los alumnos a construir conocimientos que sean más complejos y poderosos que aquellos que ya poseían cuando comenzaron la instrucción. Simon *et al.*, (2004) advierten que el que se promueva la transformación de la comprensión que tienen los estudiantes hacia el desarrollo de entendimientos más avanzados en matemáticas, es decir, un mayor entendimiento de los procesos de aprendizaje, en particular de cómo los estudiantes desarrollan nuevos conceptos, podría incrementar su progreso en matemáticas.

1.3.2. La importancia de los cocimientos previos para el aprendizaje de las fracciones y el caso de la prueba Excale

Como se mencionó en el apartado anterior, la importancia de indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes puede beneficiar tanto a profesores como educadores matemáticos para formular conjeturas respecto desde dónde se puede comenzar a construir un nuevo conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva constructivista, los niños constantemente están aprendiendo cosas nuevas, es decir, están construyendo conocimientos; sin embargo, no todo el conocimiento que construyen es útil para ir desarrollando algunos conocimientos matemáticos. Por ello, llevar los conocimientos previos al caso concreto de las fracciones significa, desde esta postura, que los niños desarrollarán sus nociones de fracción a partir de conocimientos que han construido previamente, lo que implica que para apoyar su aprendizaje es necesario reconocer esos conocimientos, nociones e intuiciones con los que ya cuentan los niños, y que les permitirán ir accediendo a nociones relativamente complejas del concepto de fracción.

El constructivismo también nos puede ayudar a entender cómo los resultados de pruebas como la de Excale de matemáticas de 6º grado, en el área de las fracciones, podrían obstaculizar o limitar el aprendizaje de los niños en años posteriores. Sabemos que los resultados de los estudiantes no fueron muy alentadores en esta área, a pesar de que el currículo de primaria señala que a partir del 3er grado se comienza a trabajar en la enseñanza de las fracciones. Los resultados de la prueba Excale muestran cómo, a pesar de tres grados de instrucción en fracciones, los estudiantes de 6° de primaria están teniendo muchas dificultades en este tema. A continuación se muestran los contenidos en matemáticas por eje temático donde el 90 por ciento o más de los estudiantes tiene mayores dificultades, de acuerdo con la prueba Excale (ver Tabla 2).

EJE TEMÁTICO	**CONOCIMIENTOS EN LOS QUE PRESENTAN DIFICULTADES LOS ESTUDIANTES DE 6° GRADO DE PRIMARIA** (90% o más de los estudiantes no cumplen con el criterio probabilístico p ≥ .67)
Los Números, sus Relaciones y sus Operaciones	Ordenar y comparar números decimales; completar series numéricas; ordenar fracciones; resolver problemas de fracciones con diferente denominador; comparar números decimales con números fraccionarios
Medición	Calcular áreas de triángulos y cuadriláteros en una composición de figuras; calcular volumen y área lateral de un cubo; problemas de conversión de unidades de longitud, área y peso
Geometría	Identificar trayectos en mapas; clasificar polígonos por sus características geométricas; imaginar espacialmente cuerpos para identificar sus atributos geométricos
Tratamiento de la Información	Representar en gráficas de barras los eventos ocurridos en experimentos aleatorios y situaciones que impliquen analizar la información representada en un diagrama de árbol
Procesos de cambio	Resolver problemas de porcentaje

Tabla 2. Conocimientos con mayor dificultad en la prueba Excale de Matemáticas por Eje Temático.

En la Tabla 2 podemos observar que los reactivos en los que el 10% o menos de los estudiantes tuvieron una probabilidad de .67 o menor de responderlos correctamente.

Dichos reactivos tienen que ver con conceptos que serían clave para un mejor desenvolvimiento en el siguiente nivel (secundaria), y muchos de ellos se relacionan con el conocimiento de las fracciones (los que están subrayados). Es posible que los alumnos de 6º grado no hayan desarrollado los conocimientos adecuados sobre fracciones para poder dominar otros contenidos que tienen que ver con éstas, pues parece que los estudiantes aún no están relacionando los números decimales, los porcentajes y las conversiones de unidades con los números fraccionarios y es probable que los estén viendo como contenidos independientes.

Los resultados anteriores muestran la necesidad de indagar qué conceptos sobre las fracciones son los que tienen los niños, para ir apoyándolos en desarrollar las nociones de fracción que queremos que tengan. Por ello, resultados de pruebas como los Excale pueden ser aprovechados por los profesores de primaria para saber en qué cuestiones de matemáticas es donde podrían tener más complicaciones sus estudiantes. Esto con la finalidad de comenzar a ayudarle a los alumnos a construir conocimientos a partir del nivel en el que se encuentran, y apoyarlos para que avancen en sus entendimientos durante todo un ciclo escolar, rumbo al siguiente grado de escuela donde los contenidos en matemáticas se irán haciendo cada vez más complejos.

En el siguiente capítulo hago una revisión de tres aproximaciones didácticas sobre la introducción a la enseñanza de las fracciones, una de las cuales considero que sería particularmente útil para guiar a profesores en apoyar el que sus estudiantes vayan construyendo entendimientos más sólidos de este concepto.

CAPÍTULO 2

La enseñanza de las fracciones

Durante muchos años los educadores matemáticos se han preocupado de cómo introducir a los estudiantes en el uso del sistema de numeración que expresa cantidades como la división de dos números naturales (*i. e.*, $\frac{a}{b}$), conocidos como números racionales, de manera que los alumnos puedan involucrarse en actividades que, por una parte, les sean accesibles y significativas y, por otra parte, sean una base firme para el desarrollo de nociones relativamente complejas del sistema de numeración.

Lamon (2007) considera que de todos los temas del currículo de primaria, las fracciones, las razones y las proporciones se caracterizan por ser de los más difíciles de aprender y de enseñar. Ella advierte que estos temas son más complejos matemáticamente e implican un mayor reto cognitivo. Además, reconoce que estos temas son esenciales para tener éxito en el área de las ciencias y de las matemáticas avanzadas.

Debido a que las fracciones son un tema complicado para los estudiantes, cuando se hizo la reforma en México de los planes y programas de estudio en 1993 "se aplazó la introducción de las fracciones hasta el tercer grado y la multiplicación y división con fracciones pasó a la secundaria". Ello se hizo con base "en la dificultad que tienen los niños para comprender las fracciones y sus operaciones en los grados en los que se proponían anteriormente." A cambio de ello, se propuso "un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción en situaciones de reparto y medición y en el significado de las fracciones como razón y división" (Secretaría de Educación Pública, 1993; p. 54).

A pesar de los esfuerzos realizados a partir de la reforma de 1993, las fracciones siguen siendo un tema difícil de enseñar y de aprender. Esto se refleja en resultados como los de la prueba Excale para 6º de primaria (ver Tabla 2 del capítulo anterior). Streefland (1991) menciona que la investigación y la literatura didáctica contienen un surtido respetable de causas que están detrás de la falla de la instrucción de las fracciones. Tal parece que este tema requiere que se continúe explorando acerca de cómo se podría mejorar su enseñanza.

A continuación realizo una descripción, de manera breve, de tres aproximaciones didácticas que se utilizan para la introducción a las fracciones en la primaria. La primera de ellas se basa en la enseñanza tradicional de las fracciones. La segunda trata de cómo se abordan a las fracciones desde sus diferentes significados. La tercera de estas aproximaciones consiste en entender a las fracciones como números que cuantifican tamaño de manera relativa. Esta última ha sido poco utilizada en la enseñanza, sin embargo, parece que pudiera ser exitosa.

2.1. El modelo tradicional

La forma en que se han enseñado las fracciones tradicionalmente, de acuerdo con Streefland (1991), ha consistido en apoyar su aprendizaje mediante una rígida aplicación de reglas. Por ejemplo, para poder sumar o restar fracciones se busca que los estudiantes entiendan la equivalencia (por medio de reglas y propiedades de la conversión de fracciones con diferente denominador a fracciones equivalentes con el mismo denominador), de manera que las fracciones se puedan sumar o restar de manera mecánica, relegando su aplicación a problemas específicos para después.

En la forma tradicional de enseñanza de las fracciones se utiliza un modelo gráfico para apoyar el aprendizaje de la equivalencia. Este modelo se basa en representar relaciones parte-todo, a partir de dividir a la unidad en partes iguales. El objetivo del material visual, en esta forma tradicional de enseñanza, es apoyar a los estudiantes para que comprendan más adelante los procedimientos a un nivel más abstracto (algoritmos). Una vez que el material visual se considera que ha sido comprendido se procede a la práctica de las operaciones básicas y después se incorpora el conocimiento a problemas de aplicación. A través de esta ruta se busca que se vaya haciendo un uso cada vez más complejo de las fracciones.

En esta forma de enseñanza, se ha preferido el modelo parte-todo porque los estudiantes pueden involucrarse, con relativa facilidad y de manera significativa, en actividades que implican dividir (doblar) y repartir. Con el uso del modelo parte-todo se pretende lograr que los alumnos desarrollen una imagen de qué puede significar el denominador y el numerador de una fracción. Por ejemplo, se suelen mostrar enteros divididos en partes iguales (ver Figura 1), con algunas de esas partes coloreadas para diferenciarlas del resto. Se les explica a los alumnos que el número total de partes es el denominador, mientras que el número de partes coloreadas es el numerador (Nunes y Bryant, 1997).

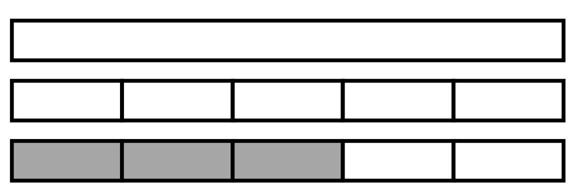


Figura 1. Representaciones de un entero, quintos y 3/5 bajo el modelo parte-todo

Esta forma de introducir a la enseñanza de las fracciones es la que se utilizaba en los libros de texto oficiales de primaria en México hasta antes de la reforma de 1993. En la siguiente figura se muestra un ejemplo (ver Figura 2).

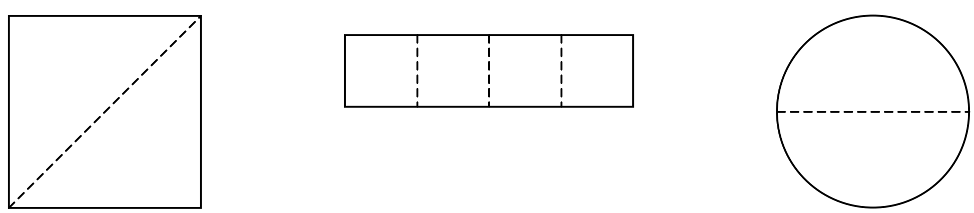
Si partimos un limón en 2 partes iguales,

cada parte es un medio de limón

Con números un medio se escribe $\frac{1}{2}$.

El 2 que está debajo de la raya nos recuerda que hemos dividido en 2 partes iguales.

Colorea un medio de



este cuadrado | este rectángulo | este círculo

Si cuatro niños comparten dos naranjas, ¿cuánto le toca a cada niño? __________

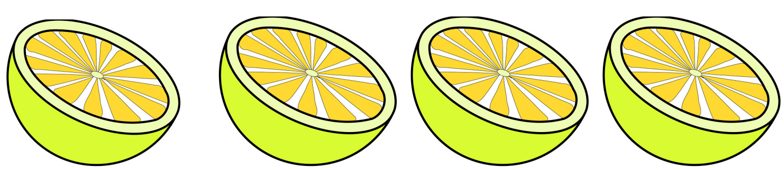


Figura 2. Lección "Algunas fracciones" (Feder et al., 1972; p. 201)

Como puede notarse, en esta lección parece que se hace uso de los gráficos para introducir a los estudiantes al significado de *un medio* como resultado de partir algo (un limón) en dos partes iguales. Posteriormente se les muestra la notación convencional para *un medio* y después se les pide que practiquen coloreando la mitad de las figuras presentadas. Por último se les presenta un problema que tiene como solución *un medio* y se les da apoyo gráfico para que logren resolverlo.

Varios autores han cuestionado la pertinencia pedagógica de esta forma tradicional de enseñanza y en particular del uso preponderante que en ella se hace del modelo parte-todo. Por ejemplo, Nunes y Bryant (1997) explican que la introducción de los alumnos al mundo de las fracciones, mediante este modelo, puede provocar la falsa impresión de que muchos niños saben mucho sobre fracciones, sin que en realidad sea así. Estos autores muestran como, en algunas investigaciones, los estudiantes emplean el doble conteo: cuentan el número total de partes y después cuentan las partes coloreadas.

Los estudiantes a los que se les ha enseñado con el modelo parte-todo experimentan fuertes dificultades cuando se les presentan situaciones en las que la estrategia del doble conteo ya no funciona, como aquellas que no involucran a un todo que está explícitamente dividido en partes iguales. Asimismo, a estos estudiantes se les dificultan las fracciones impropias. Ello se debe a que una fracción como 5/3 no puede ser concebida como el resultado de partir un todo en tres partes iguales y seleccionar cinco de ellas, ya que las partes a seleccionar (5) son más de las que se generan de la partición equitativa del entero (3).

2.2. El modelo de los subconstructos

La forma tradicional de enseñanza de las fracciones generó algunas preocupaciones en el campo de la educación matemática. Por ejemplo, Erlwanger (1973) mostró en una investigación basada en entrevistas realizadas a un niño de 12 años llamado Benny, que a pesar de que este niño tenía cierta habilidad para resolver ejercicios que implicaban el uso de fracciones, no entendía mucho sobre éstas. Para Benny las matemáticas estaban regidas por una serie de reglas, una diferente para cada tipo de problema. En el caso de las fracciones, Benny decía que existían como 100 tipos de reglas, las cuales fueron inventadas por un hombre muy inteligente, mucho tiempo atrás. Por lo tanto, para Benny, las matemáticas no eran una materia racional y lógica en la cual uno pudiera razonar, analizar, encontrar relaciones, hacer generalizaciones y verificar respuestas. Para él, el propósito de aprender matemáticas era descubrir esas reglas y utilizarlas para resolver problemas.

Para el caso del modelo parte-todo que se empleaba para apoyar el aprendizaje de fracciones también hubo reacciones por parte de algunos investigadores. Kieren (1980) consideró que el conocimiento del número racional no podía limitarse a una sola perspectiva, ya que el número racional consistía de muchos hilos entrelazados. Este autor sugirió un modelo que permitiera una comprensión integral del número racional. Este modelo contemplaba cinco subconstructos: parte-todo, razón, cociente, medida y operador. Para Kieren, lograr una comprensión integral del número racional dependía de la comprensión de todos los subconstructos.

Kieren (1980) hizo hincapié en que cada subconstructo no podía ser independiente por sí mismo, sino que cada uno de ellos implicaba un aspecto diferente del constructo número racional. Sin embargo, este autor consideró que la relación parte-todo era la base para desarrollar un entendimiento amplio de los subconstructos del número racional (ver Figura 3).

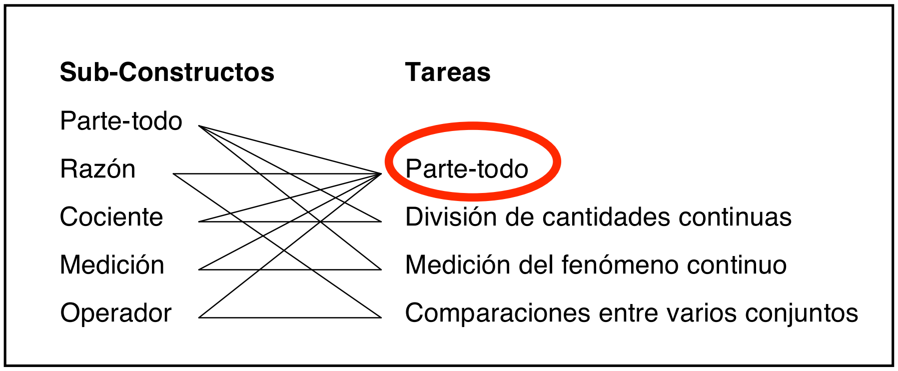


Figura 3. Los subconstructos y las tareas que implican cada uno de ellos (Kieren, 1980; p. 137)

Como se muestra en la Figura 3, el subconstructo parte-todo fue considerado por Kieren de importancia central, ya que es el único que identificó como relacionado con todos los otros subconstructos.

El modelo de los subconstructos ha tenido gran aceptación entre los educadores matemáticos. De acuerdo con Behr, Harel, Post y Lesh (1992) los cinco subconstructos han resistido la prueba del tiempo y bastan para clarificar el significado del número racional. Este modelo también ha sido retomado en la elaboración de muchos currículos de matemáticas, incluido el mexicano.

El plan de estudios oficial en México propone que se inicie con las fracciones en tercer grado de primaria y que conforme aumenta el grado escolar, el nivel de complejidad también sea mayor. A lo largo de tercero a sexto grado de primaria se trabaja con las fracciones desde sus diferentes significados en contextos diversos.

A continuación describiré brevemente en qué consiste cada uno de los subconstructos y cómo se plantean en las lecciones de los libros de texto de primaria de la Secretaría de Educación Pública. Para ello he tomado fragmentos de algunas lecciones sobre fracciones.

a) Relación parte-todo

En la relación parte-todo un entero es fracturado en partes iguales. La fracción se utiliza para cuantificar la relación entre el todo y un número designado de partes. Esto se concretiza en lecciones como la que se muestra a continuación (ver Figura 4). En ella parece que se busca que los estudiantes que entiendan *un medio* como el resultado de partir algo (un metro de listón) en dos partes iguales.

> 1. Mónica compró un metro de listón para sus dos trenzas. ¿En cuántas partes iguales tuvo que cortar el metro de listón? ______ ¿Qué cantidad de listón usó para cada trenza? ______
>
> Itzel se quiere hacer dos trenzas porque va a salir en un bailable. Compró 3 metros de listón con los colores de la bandera. Ayúdale, dividiendo con una línea cada metro de listón. ¿Qué cantidad de listón usó para cada trenza? ______

Figura 4. Lección "Las trenzas de Mónica" (Ávila, Balbuena, Bollás y Castrejón, 1993/2002; p. 22)

b) Razón

Una razón expresa una relación entre dos cantidades del mismo tipo (Balbuena, Dávila, García, Olivera y Pasos, 2002). Esto se concretiza en lecciones como la que se muestra a continuación (ver Figura 5). En ella parece que se busca que los alumnos entiendan que un entero puede formarse a partir de juntar cantidades independientes (3 litros de pintura blanca y 5 litros de pintura verde constituyen un entero de 8 litros de pintura) y que la proporción que le corresponde a cada una de las cantidades que formó al entero es una fracción de éste (8 litros de pintura de los cuales 3/8 son de pintura blanca y 5/8 son de pintura verde).

> 1. Raúl mezcló en una cubeta, para pintar su cuarto, las siguientes cantidades de pintura: 3 litros de pintura blanca y 5 litros de pintura verde.
>
> ¿De qué color crees que es la mezcla?
> ¿Cuántos litros de mezcla hay en la cubeta?
> ¿Qué fracción de la mezcla es pintura blanca?
> ¿Qué fracción de la mezcal es pintura verde?
> ¿Qué resultado obtienes al sumar la fracción de pintura blanca con la fracción de pintura verde?

Figura 5. Lección "La tienda de pinturas" (Ávila, Balbuena, Fuenlabrada y Waldegg, 2000; p. 142)

c) Cociente

En la propuesta de los libros de texto de la SEP, el trabajo principal que se propone consiste en acercar al niño a situaciones que lo lleven a dividir uno o más enteros en partes iguales, para después repartirlas (Secretaría de Educación Pública, 1994). Esto se concretiza en lecciones como la siguiente (ver Figura 6). En ella parece que se busca que los niños entiendan que una fracción puede cuantificar el resultado de repartir equitativamente cierto número de enteros (hojas de papel) entre cierto número de niños (que a cada uno de los niños le toque la misma cantidad de papel).

4. La maestra formó equipos de dos niños, de cuatro niños y de ocho niños. Después entregó algunas hojas a cada equipo para que se las repartieran en partes iguales.

Completa los datos que faltan en la siguiente tabla:

Equipo	Hojas	Niños	A cada niño le tocó
1	1	2	
2	3	4	
3	3	8	
4	5	4	
5	3	2	$1+\frac{1}{2}hoja$

Figura 6. Lección "Tarjetas de papel" (Ávila, Balbuena y Bollás, 1994/2002; p. 65)

d) Medición

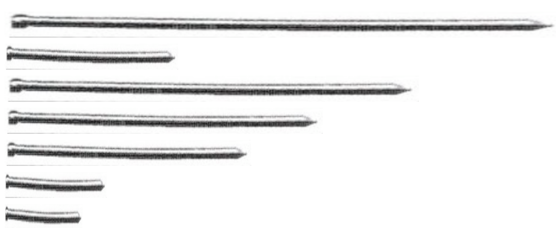
La noción de fracción como resultado de la medición de longitudes se introduce en los libros de la SEP a través de situaciones en las que, para medir con más precisión una longitud, es necesario fraccionar en partes iguales la unidad de medida, porque ésta no cabe un número exacto de veces en la longitud a medir (Secretaría de Educación Pública, 1994). Esto se concretiza en lecciones como la que se muestra a continuación (ver Figura 7). En ella parece que se busca que los niños entiendan que las fracciones también son necesarias para medir longitudes cuando la unidad de medida no coincide exactamente con el tamaño de lo que se está midiendo (clavos). En esos casos se vuelve necesario partir equitativamente la unidad de medida (la tira).

1. Don Rodolfo encargó unos clavos a su sobrino Juan, le dio dinero para comprarlos y una tira de papel para medirlos.

La tira era de este tamaño:

En la tienda Juan pidió clavos de tres tamaños: *de una tira*
de media tira
de una tira y tres cuartos

El dueño de la tienda le mostró clavos de varios tamaños para que Juan escogiera.



Marca los clavos que debió escoger Juan

Figura 7. Lección “La tienda del pueblo” (Ávila *et al.*, 1994/2002; p. 14)

e) Operador

La forma en como está planteada la fracción como operador en los libros de la SEP parece que es en el caso cuando la fracción actúa como operador multiplicativo de números naturales (Balbuena *et al.*, 2002). El operador multiplicativo es el factor racional por el que se multiplica un número natural y se obtiene otro número natural (*e. g.*, $\frac{1}{3}$x12=4). Esto se concretiza en lecciones como la que se muestra a continuación (ver Figura 8). En ella parece que se pretende que los estudiantes reconozcan que una cantidad expresada con números naturales (12 km) puede interpretarse como un entero, y que a cada fracción propia, impropia o mixta de este entero le corresponde una cantidad expresada en la unidad original ($\frac{1}{2}$ de 12 km son 6 km, $\frac{3}{4}$ son 9 km, $2\frac{1}{2}$ son 30 km, etc.).

1. Un circuito para carreras de automóviles tiene 12 km de longitud.

Calcula la distancia recorrida en:

$\frac{1}{2}$ de vuelta			$\frac{1}{3}$ de vuelta	
$\frac{3}{4}$ de vuelta			$\frac{1}{6}$ de vuelta	
$2\frac{1}{2}$ de vuelta			$\frac{5}{4}$ de vuelta	
$2\frac{3}{4}$ de vuelta			$\frac{2}{3}$ de vuelta	

Figura 8. Lección "El circuito" (Ávila *et al.*, 2000; p. 156)

Es importante señalar que la propuesta de la SEP (1993) parece responder a una preocupación originalmente planteada por Streefland (1991). Este autor afirmó que el conocimiento matemático tradicional está enfocado a una rígida aplicación de reglas y está separado de la realidad. En la propuesta de la SEP se busca abordar a las fracciones desde los diferentes significados identificados por Kieren (1980), a partir de la resolución de problemas que los estudiantes puedan reconocer como reales.

2.3. El modelo de tamaños relativos

Algunos autores han cuestionado el modelo de los subconstructos. Thompson y Saldanha (2003) señalaron que el modelo de los subconstructos surgió de un esfuerzo de aritmetizar el cálculo. Estos autores consideraron que la enseñanza que se centra en subconstructos o significados del sistema matemático de los números racionales, al final corre el riesgo de buscar que los estudiantes desarrollen significados de una gran idea que no tienen (el número racional).

El principal aspecto del modelo de los subconstructos que se cuestiona es la utilización del método de partición equitativa para introducir fracciones, idea que Kieren (1980) consideró como central para entender a los otros subconstructos. Por ejemplo, Freudenthal (1983), señaló a la partición como un comienzo bastante limitado e insuficiente. Este autor nombró esta aproximación "*fracción como fracturador*", la cual está asociada con la acción de romper o fracturar. Freudenthal menciona que hay muchos estudiantes que finalmente aprenden a operar con las fracciones mediante este método, e incluso algunos de ellos llegan a dominar los algoritmos, pero sin mucha idea de lo que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas.

Freudenthal (1983) reconoció la *medición* y la *proporcionalidad* entre las nociones fundamentales asociadas al uso de los números racionales positivos (*i. e.*, fracciones) y sugirió como una aproximación alternativa a la *fracción como fracturador*, la de *fracción como comparador*. Freudenthal señala que la didáctica tradicional pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con sólo romper un todo en partes y menciona que las fracciones también sirven para comparar objetos que se separan uno de otro o que se piensa como si se separaran. Esta aproximación de *fracción como comparador* se fundamentaría en "el poner magnitudes en razón, una con otra".

Thompson y Saldanha (2003) también expresaron inquietud acerca de introducir las fracciones a través de la partición equitativa. Ellos señalaron que hay bastante evidencia en investigaciones de que para los estudiantes es difícil comprender algunos aspectos importantes de los números racionales. Ellos sugirieron que los estudiantes necesitaban desarrollar una red de conceptualizaciones (imágenes) de medida, multiplicación, división y fracción a través de realizar actividades como medir, multiplicar y dividir para ir comprendiendo el concepto de número racional.

Para Thompson y Saldanha (2003), una conceptualización de medida supone una imagen de una relación proporcional. Para ellos, el sistema de operaciones conceptuales que compone a un esquema de fracción está basado en concebir dos cantidades que están en una relación recíproca de tamaño relativo (ver Figura 9): *La cantidad A es 1/n del tamaño de la cantidad B, lo que significa que la cantidad B es n veces el tamaño de A. La cantidad A siendo n veces del tamaño de B significa que la cantidad B es 1/n del tamaño de A.*

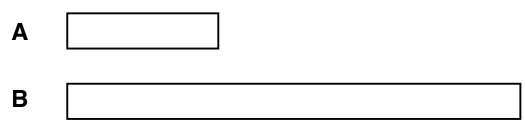


Figura 9. El tamaño de A es 1/3 del tamaño de B y el tamaño de B es 3 veces el tamaño de A

Esta forma de pensar multiplicativamente permite entender relaciones multiplicativas recíprocas entre un producto (nm):

(nm) es n veces el tamaño de m,
(nm) es m veces el tamaño de n,
m es $1/n$ el tamaño de (nm),
n es $1/m$ el tamaño de (nm).

De esta forma se pueden entender expresiones algebraicas como "$x=y/18$". Siendo x de $1/18$ del tamaño de y, y y de 18 veces del tamaño de x, es decir $y=18x$.

Thompson y Saldanha (2003) identificaron en la investigación de Steffe (2003) el carácter potencial de actividades didácticas fundamentadas en la idea de tamaño relativo. Steffe instrumentó un experimento longitudinal de enseñanza con dos estudiantes de quinto de primaria. Este investigador orientó a los estudiantes a pensar en una fracción unitaria, no tanto en términos del resultado de partir un entero en cierto número de partes iguales, sino en términos de cuántas iteraciones (o copias) de dicha parte producirían algo del tamaño de un entero. De esta manera no se esperaría que los alumnos interpretaran 1/5 de una barra de dulce como la cantidad de dulce contenida en los pedazos que son producidos al dividir equitativamente una barra en cinco partes iguales (ver Figura 1). En lugar de eso, en la aproximación de Steffe, se buscaría orientar a los estudiantes a pensar acerca de una fracción unitaria en términos de un multiplicando que satisface un criterio iterativo específico. Desde esta aproximación, un quinto de la barra de dulce sería una cantidad de dulce tal que cinco veces esa cantidad equivaldría a la cantidad de dulce de una barra entera (ver Figura 10).

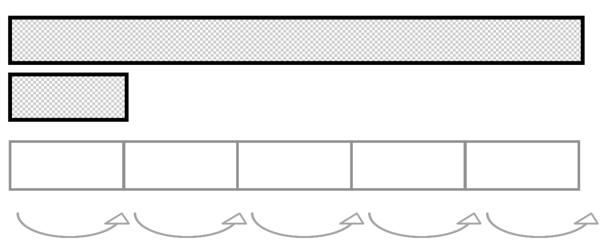


Figura 10. “1/5” es una parte de un tamaño tal que cinco de ellas resultarían del tamaño de un entero

La investigación hecha por Steffe (2003) sugiere que las actividades en las cuales las fracciones unitarias son aproximadas más en términos de multiplicandos que de cocientes partitivos pueden ser la base para apoyar el desarrollo de entendimientos complejos sobre fracciones, compatibles con los análisis de Freundenthal (1983) y de Thompson y Saldanha

(2003). Sin embargo, se debe tomar en cuenta que Steffe reportó haber trabajado con un par de estudiantes, en una situación que implicó el uso intensivo de computadoras.

Tanto Freudenthal (1983) como Thompson y Saldanha (2003) consideran a la partición equitativa como una base inadecuada para apoyar el desarrollo de entendimientos cada vez más complejos de fracción. Estos autores también coinciden en reconocer las comparaciones tipo razón como el fundamento desde el cual se puede apoyar el desarrollo del concepto de fracción. La introducción de las fracciones como sugieren estos autores parece razonable. Sin embargo, aún no se sabe si podría ser viable implementarla en un salón de clases teniendo en cuenta que la investigación reportada que fue hecha por Steffe (2003) se realizó con pocos niños provenientes de contextos muy distintos a los que hay en su mayoría en México.

Ante el panorama de los resultados de la prueba Excale, los cuales muestran cómo las fracciones son un contenido que continúa siendo difícil de enfrentar para los estudiantes de primaria, no es posible afirmar que la propuesta de los libros de texto actuales en México no haya sido acertada, pero tampoco hay la suficiente evidencia para decir que ésta ha sido lo suficientemente exitosa como para que no sea necesario buscar otras alternativas. Por ello, el explorar otros caminos para introducir las fracciones tomando como base un punto de partida distinto al que se ha usado hasta ahora parece ser válido, y la propuesta de los tamaños relativos se muestra como una opción prometedora, tomando como base las investigaciones de Freudenthal (1983), Thompson y Saldanha (2003) y Steffe (2003).

El propósito de mi trabajo de tesis es conocer si sería viable la introducción de las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos con estudiantes de primaria en México. Para ello realicé una exploración con niños de una primaria de un contexto socialmente desfavorecido, como hay muchos en nuestro país, para saber si los conocimientos con los que cuentan los estudiantes son los adecuados para comenzar a trabajar con las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos. Todo esto lo realicé con base en las siguientes preguntas de investigación:

¿Es posible iniciar a niños mexicanos en el estudio de las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos?

¿Qué conocimientos son los que se requerirían para introducir las fracciones desde esta perspectiva?

¿Qué tipo de actividades pueden ser compatibles con las consideraciones de los autores mencionados en este apartado acerca de la esencia para entender fracciones, y que también sean significativas para quienes se inician en el aprendizaje de las mismas?

CAPÍTULO 3

Recolección de datos y metodología

El propósito del presente capítulo es presentar un panorama general del trabajo de exploración que realicé para mi investigación tomando como antecedente los dos capítulos anteriores de esta tesis. Explico en qué se fundamentó mi estudio y cómo lo llevé a cabo.

Mi investigación consistió en realizar entrevistas clínicas sobre el tema de fracciones a todos los alumnos (catorce) del único grupo de cuarto grado de una escuela primaria urbana en el Estado de Chiapas. Cabe aclarar que en México la enseñanza de este contenido inicia a partir del tercer grado de primaria (Secretaría de Educación Pública, 1993). Sin embargo, las entrevistas se realizaron en cuarto grado por ser este grado cuando las fracciones comienzan adquirir mayor importancia.

Las entrevistas se condujeron con el propósito de documentar hasta qué punto les resultarían significativas (o *realistas*; Gravemeijer, 2004) a estudiantes de cuarto grado, actividades didácticas que implicaran razonar —de manera básica— acerca de tamaños relativos, a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos (ver Capítulo 2 de esta tesis).

En las entrevistas se esperaba documentar las diferentes formas en que los alumnos de cuarto grado se involucrarían en actividades didácticas sobre fracciones desde la perspectiva de tamaños relativos. También se esperaba identificar los recursos matemáticos a los que serían capaces de recurrir estos alumnos, con relativa facilidad, al afrontarlas.

Era de particular interés ver el caso de alumnos de primaria que provenían de un contexto social desfavorecido, un contexto que es particularmente palpable en México (ver

Figura 11) y que muchas veces no tomamos en cuenta a la hora de crear proyectos para elaborar recursos didácticos que pueden ayudar a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, si desarrolláramos recursos para niños como los de la investigación realizada por Steffe (2003) con soportes de computadoras y con acceso a un sin fin de apoyos educativos brindados desde sus casas (juguetes interactivos, páginas web, programas de televisión y libros), difícilmente podríamos imaginar en extender esos apoyos a niños como los de Chiapas o de muchos otros lugares de nuestro país. En lugar de eso, si pensamos en trabajar con niños mexicanos que no tienen facilidad para acceder a esas herramientas y desarrollamos recursos para apoyarles en sus aprendizajes, entonces podríamos suponer que sería mayormente viable que dichos recursos pudieran apoyar el aprendizaje de todos los niños de México.

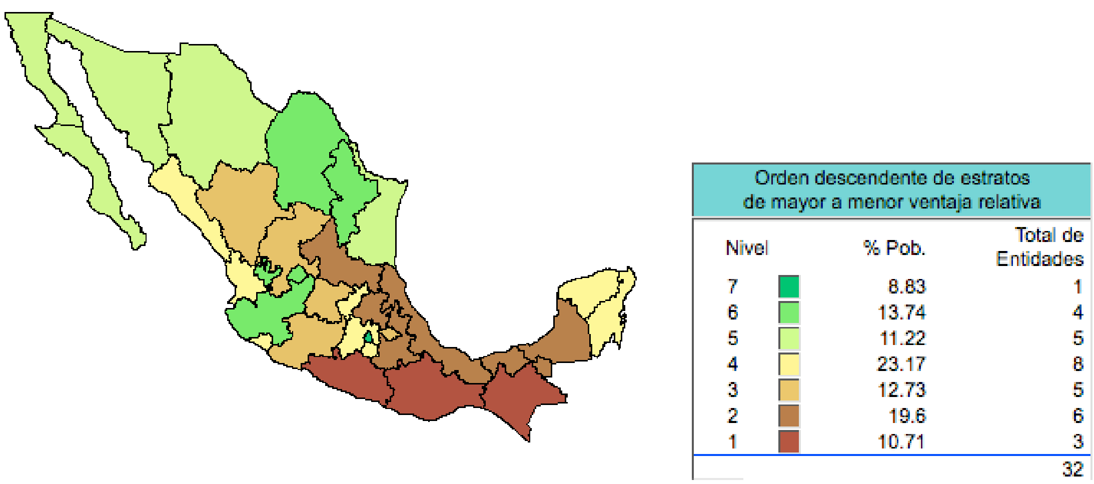


Figura 11. Regiones socioeconómicas de México (de acuerdo con los rubros de educación, empleo, vivienda y salud), clasificación de entidades federativas (Instituto Nacional de Estadística y Geografía, s. f.)

3.1. Participantes

Las entrevistas se realizaron durante el mes de enero de 2007, en los días 90 y 91 de los 200 que conformaban el ciclo escolar 2006-2007. En ese momento el grupo de cuarto de primaria contaba con 14 alumnos (ver Tabla 3). Los niños de este grupo de cuarto grado eran hijos de maestros rurales, dependientes de farmacias, vendedores ambulantes, obreros, trabajadoras del servicio doméstico, repartidores de pan, taxistas y amas de casa. Tres de los estudiantes nunca asistieron al preescolar, uno reprobó segundo y otro tercer grado. En el Anexo único de esta tesis se incluyen algunas imágenes de la escuela en la que se realizó el estudio y de los niños que participaron.

No.	NIÑAS	EDAD	NIÑOS	EDAD
1	Vicky	11 años	Alejandro	10 años
2	Marisol	9 años	Jorge	9 años
3	Lupita	9 años	Marcos	10 años
4	Elodia	10 años	Miguel Ángel	10 años
5	Lesdy	10 años	Carlos	9 años
6	Vanessa	9 años	Ángel	10 años
7	Lourdes	9 años	Eduardo	9 años

Tabla 3. Grupo de 4º grado de primaria

Las familias de diez de estos niños estaban inscritos en el Programa Oportunidades, un programa de la Secretaría de Desarrollo Social (Sedesol) que busca fomentar el desarrollo humano de la población que vive en condiciones de pobreza extrema (Sedesol, s. f.). Para lograrlo, este programa brinda a las familias apoyos en educación, salud, nutrición e ingreso. Según la Sedesol, los apoyos del Programa Oportunidades se entregan bajo un esquema de corresponsabilidad, en el que las familias son parte activa de su propio desarrollo. Es decir, a cambio de un apoyo económico, las familias se comprometen a realizar ciertas actividades para conservar esos apoyos (asistir a consultas médicas preventivas, a la escuela, entre otras). En el caso de las familias de estos estudiantes, éstas recibían un apoyo mensual de 140 pesos a cambio de que sus hijos asistieran al cuarto de primaria y evitar con esto la deserción escolar.

3.2. Metodología

La metodología que se empleó en este estudio fue el método clínico. De acuerdo con Delval (1994) el método clínico surge de los trabajos de Piaget. Este método trata de conocer el razonamiento del niño a través de conversaciones abiertas con éste en torno a un problema. A esta conversación se le llama entrevista clínica. En la entrevista clínica el investigador plantea situaciones problemáticas al niño y le hace preguntas en relación a dicha situación. El niño explica la forma en cómo resolvió la situación problemática y lo justifica. De esta manera, el investigador va generando hipótesis sobre lo que el niño piensa. Estas hipótesis se vuelven la base de nuevas preguntas que sobre la marcha se le hacen al niño. En las entrevistas también se le confronta al niño con posibles contradicciones para ver cómo las resuelve.

Las 14 entrevistas clínicas que se analizan en esta tesis tuvieron una duración entre 25 y 40 minutos cada una. Fueron video-grabadas. Dos entrevistadores estuvieron presentes; uno estuvo a cargo de conducir la entrevista y otro de tomar notas y de intervenir con preguntas clarificadoras cuando lo creía necesario[1].

Las entrevistas clínicas se condujeron y analizaron siguiendo los lineamientos recomendados por Cobb (1986). En primer lugar, se procuró el uso de actividades que implicaran un reto genuino a los estudiantes. Para ello se realizó un estudio piloto para probar su pertinencia con cuatro niños que cursaban el cuarto grado de primaria en el Distrito Federal. A partir del piloteo se hicieron pequeños ajustes a los problemas. En segundo lugar, los entrevistadores se preocuparon por tener una imagen lo más clara posible de cómo entendían los niños las situaciones que enfrentaban. Para ello, constantemente les hicieron preguntas exploratorias y aclaratorias a los alumnos entrevistados.

3.2.1. Descripción del instrumento

En las entrevistas se les presentaron a los niños seis actividades problemáticas. Las seis actividades planteadas a los estudiantes estuvieron diseñadas dentro de la corriente de las matemáticas realistas (Gravemeijer, 1997). De acuerdo con los objetivos de las matemáticas realistas se buscaba que los problemas presentados a los estudiantes estuvieran contextualizados y fueran experencialmente reales, de manera que les permitieran a los niños involucrarse en actividades personalmente significativas y entonces así, ellos pudieran recurrir a sus estrategias formales e informales para resolver los problemas presentados.

De las seis actividades, dos de ellas tenían como objetivo identificar las formas en las que los estudiantes se enfrentarían con situaciones que implicaran explícitamente la comparación relativa de tamaños, a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos. Otras dos actividades problemáticas fueron diseñadas con la intención de documentar los recursos que utilizarían los estudiantes en situaciones que pudieran ser resueltas con una multiplicación directa. Una quinta actividad problemática implicaba a la multiplicación inversa (o *con hueco*), y la última se trataba de que los niños identificaran los tamaños representados por fracciones en notación convencional. En el siguiente capítulo se describen estas actividades con detalle.

El análisis de las entrevistas se basó en la formulación de conjeturas respecto a las intuiciones, nociones y habilidades matemáticas que emergieron del quehacer de los estudiantes al enfrentarse con cada una de las situaciones. Las conjeturas se formularon a partir de la revisión de las video-grabaciones, del trabajo de los estudiantes y de las notas que se tomaron en el lugar. A lo largo del análisis de cada entrevista se creó un registro de estas conjeturas y de la evidencia que las respaldaba, la cual incluyó transcripciones puntuales, referencias tomadas de notas que se hicieron en el lugar y el trabajo realizado por los niños.

Se crearon registros de todas las entrevistas, y junto con las notas tomadas en el lugar y el trabajo realizado por los niños se elaboraron sinopsis del quehacer del alumnado en cada actividad problemática. Estas sinopsis incluyeron dos ejes, uno horizontal y otro vertical. En el eje horizontal se registró el quehacer de cada estudiante al enfrentar los diferentes componentes de una actividad problemática. En el eje vertical se registró el quehacer de todos los estudiantes al enfrentarse con cada componente de la actividad.

Las sinopsis permitieron observar cómo cada niño se enfrentó a todas las situaciones que se le presentaron y, al mismo tiempo, cómo se desempeñó el grupo en cada ítem. Con esto fue posible crear una imagen coherente del tipo de recursos con los que contaban los niños y la diversidad de éstos. Un pequeño fragmento de esta sinopsis se muestra en la siguiente Tabla (ver Tabla 14).

EL LITRO DE LECHE

Nombre	$\frac{1}{5} > \frac{1}{10}$ (un vaso de plástico [1/5] es mayor que un vaso de unicel [1/10])	$\frac{5}{10}$ (cinco vasos de unicel)	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (cinco vasos de unicel equivalen a la mitad del litro)
Vicky	✓ sus marcas indican que son más chicos los vasos de unicel	✓ su marca queda más arriba de la mitad del cartón	✓ Replanteamiento 1. Más de la mitad 2. 5 vasos=mitad
Jorge	✓ Piensa que es más pequeño el vaso de unicel que el de plástico, pero no mucho	Itera la cantidad, pero casi se termina la leche y esto no parece representarle ningún conflicto	✓ Replanteamiento 1. Menos de la mitad. Basa su razonamiento en su marca empírica. 2. Al final reconoce que 5vasos=mitad
Ángel	✓ Tiene idea de que los vasos de unicel son más pequeños	✓ Su marca coincide con la mitad	✓ Observó la equivalencia inmediatamente y puede explicarlo
Vanessa	✓ La marca es más pequeña que la de los vasos anteriores (vidrio y plástico)	✓ Su marca queda más abajo de la mitad del cartón	✓ Replanteamiento 1. Menos de la mitad 2. Medio litro=5 vasos
Marcos	✓ Sí imagina los vasos de unicel más pequeños	✓ Marca la mitad	✓ Explica reflexionando que la mitad de 10=5

Tabla 14. Fragmento del registro de las respuestas de los niños

A partir de las sinopsis se generaron conjeturas. En los casos donde no fue clara la naturaleza del quehacer de los estudiantes se tuvo el cuidado de formular explicaciones alternas tratando de determinar cuál sería la más razonable, tomando en cuenta toda la evidencia con que se contaba. Por ejemplo, cuando un estudiante parecía tener muchas dificultades para enfrentar una situación, se conjeturaba que tal vez se podía deber ya sea a que la actividad problemática en cuestión rebasaba sus habilidades matemáticas, o a que había interpretado la situación de una forma muy distinta a lo que se esperaba, por no estar familiarizado quizá con el contexto en que estaba basada. Se procuraba entonces identificar a lo largo de la entrevista evidencia que fuera consistente con una u otra de las conjeturas en conflicto.

En el siguiente capítulo explico con detalle las situaciones planteadas a los estudiantes y los resultados obtenidos de las entrevistas a nivel individual y grupal.

CAPÍTULO 4

Resultados

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de las entrevistas clínicas realizadas a todos los alumnos (catorce) del único grupo de cuarto grado de una escuela urbana del Estado de Chiapas. En las entrevistas se les plantearon a los niños seis tipos de situaciones problemáticas para observar su razonamiento matemático y detectar cuáles eran los conocimientos con los que contaban para enfrentarse a las actividades presentadas. A continuación se detallan los resultados de cada actividad realizada por los niños dentro de las entrevistas clínicas.

4.1. Situaciones de Multiplicación

4.1.1. Multiplicación directa

A los estudiantes se les presentaron dos situaciones de multiplicación directa y una de multiplicación inversa con el propósito de identificar el tipo de nociones matemáticas vinculadas a la iteración de cantidades, a las que podrían recurrir los niños con relativa facilidad al resolver problemas. Con base en el análisis conceptual de Thompson y Saldanha (2003) y en la investigación de Steffe (2003), se consideró que estas nociones previamente desarrolladas serían las que podrían facilitarle a los estudiantes involucrarse en las actividades de comparación de tamaños relativos.

Los tazos

Una de las situaciones de multiplicación que se les presentó a los estudiantes estaba basada en determinar la cantidad de "tazos" (ver Figura 12) que tenían algunos niños. El problema implicaba tener que determinar cuánto era lo doble, lo triple y lo quíntuple de cinco tazos, con base en narrativas como la siguiente: "Manuel tiene cinco tazos y Rafael tiene lo doble, ¿cuántos tazos tiene Rafael?" Al presentar la actividad, se decidió no utilizar la palabra veces (*e. g.*, dos veces) para facilitar el que emergieran interpretaciones que implicaran el uso de estrategias distintas a la suma iterada. Sin embargo, expresiones como "tiene tres veces lo que tiene Manuel" se utilizaron en todos los casos en los que un alumno parecía no entender el significado de lo "triple" o "quíntuple".

Figura 12. "Tazos" Juguetes coleccionables que vienen adentro de las bolsas de frituras

Todos los estudiantes pudieron determinar, sin mayor dificultad, cuánto era lo doble de cinco. Todos también pudieron determinar cuánto era lo triple de cinco, aunque seis lo hicieron después de que se les presentó la pregunta en la forma de "tres veces". Cuatro de estos estudiantes parecieron entender originalmente que *lo triple* significaba algo así como *lo doble de lo doble*. Estos cuatro estudiantes inicialmente estimaron que lo triple de 5 sería 20. La siguiente transcripción muestra cómo lo hizo un alumno.

1. Entrevistador: Si Luis tiene lo triple que Manuel, ¿cuántos tazos tiene Luis?

   Ángel: 20, porque lo doble [de cinco] es 10 y el otro [Luis] tendría 20 porque tiene lo triple.

La trascripción ilustra cómo la asociación que algunos estudiantes parecieron hacer entre los significados de *lo doble y lo triple*, no fue en el sentido de una iteración más (5+5, 5+5+5), sino que implicaba repetir la acción de duplicar (lo doble de lo doble de cinco).

Al presentar la pregunta de cuánto sería lo quíntuple de cinco, a todos los estudiantes se les aclaró que se trataba de determinar cuánto era cinco veces cinco (ej., "Dulce tiene lo quíntuple que Manuel, o sea, cinco veces"). Diez de los catorce alumnos dieron la respuesta correcta. De ellos, cuatro parecieron relacionar claramente el problema con la operación de la multiplicación, ya sea recurriendo a ella al resolverlo o mencionando que sería posible utilizarla. La siguiente transcripción ejemplifica el segundo de estos casos:

2. Marisol: 25, porque sumo cinco veces cinco. Y también se puede hacer multiplicando cinco por cinco.

Los otros seis alumnos resolvieron el problema contando iteradamente de cinco en cinco (*e. g.*, cinco, diez, quince, veinte, veinticinco), sin que se notara que asociaran el problema con la multiplicación. Los cuatro alumnos restantes intentaron usar esta misma estrategia pero parecieron tener problemas al coordinar las dos cuentas; por ejemplo, uno de ellos contó de cinco en cinco hasta cincuenta (ver resultados en la Tabla 5).

Multiplicación directa	**Lo resolvieron**		**No lo resolvieron**	**Observaciones**
Doble de 5	14		0	
Triple de 5	"*triple*"	"*tres veces*"		4 pensaron que lo "*triple*" era "*lo doble de lo doble*"
	8	6	0	
Quíntuple de 5	**Suma iterada**	**Multiplicación**		4 no coordinaron las dos cuentas: *1-5, 2-10, 3-15…*
	6	4	4	

Tabla 5. Resultados de la actividad de los tazos

Las galletas

La otra actividad de multiplicación directa que fue planteada a los estudiantes se trataba de determinar el número de galletas que había en una caja teniendo en cuenta que en cada caja había 10 paquetes de galletas y que cada paquete contenía 10 galletas. Asimismo, se les pidió a los niños que determinaran cuántas galletas había en 10 cajas, una vez que sabían que en cada caja había 100 galletas.

Casi todos los estudiantes pudieron calcular cuántas galletas había en una caja de galletas. Cuatro de estos estudiantes lo hicieron mediante suma iterada, mientras que seis alumnos emplearon la multiplicación. Hubo cuatro estudiantes que requirieron apoyo del entrevistador para poder coordinar las dos cuentas y obtener el resultado (1paquete=10galletas, 2paquetes=20galletas, 3paquetes=30galletas, etc.). Esta actividad para estos cuatro estudiantes fue complicada, incluso hubo uno de ellos que no consiguió obtener el resultado, ya que parece que se le dificultaba ir contando de 10 en 10.

La pregunta sobre cuántas galletas habría en 10 cajas de galletas representó un reto mayor para algunos niños. Tres estudiantes utilizaron la suma iterada, cinco recurrieron a la multiplicación y otros tres niños fueron apoyados por el entrevistador para ir calculando el número total de galletas e ir llevando las dos cuentas. A tres de los estudiantes que tuvieron muchas dificultades con la actividad anterior se decidió no presentarles esta situación problemática (los resultados se muestran en la Tabla 6).

Multiplicación directa	Lo resolvieron			No lo resolvieron o no se les presentó	Observaciones
	Suma iterada	Multiplicación	Con apoyo del entrevistador llevando registro de la iteración		
10x10	5	5	3	1	Difícil de llevar las dos cuentas mentalmente para 4 niños
10x100	4	4	3	3	Para 3 niños fue un reto muy difícil

Tabla 6. Resultados de la actividad de las galletas

4.1.2 Multiplicación inversa

El pez y los mandados

La actividad de multiplicación inversa estaba basada en una narrativa sobre un niño que ganaba dos pesos por cada mandado que hacía. Primero se les pidió a los estudiantes que determinaran cuántos mandados tendría que hacer el niño para juntar diez pesos (__x2=10) y así poder comprar un pez. Posteriormente se les dijo que a la semana este niño ahorraba diez pesos. Se les pidió entonces que determinaran en cuántas semanas el niño sería capaz de ahorrar 100 pesos (__x10=100) para comprar una pecera para su pez.

El desempeño de los estudiantes en esta situación fue similar al de las actividades de multiplicación directa, con algunos estudiantes resolviéndola sin dificultad multiplicando o sumando iteradamente, y otros teniendo problemas para coordinar una doble cuenta. Ninguno pareció recurrir a la división (los resultados se muestran en la Tabla 7).

Multiplicación inversa	Lo resolvieron			No lo resolvieron	Observaciones
	Suma iterada	Multiplicación	Con apoyo del entrevistador llevando registro de la iteración		
__x2=10	8	4	2	0	Difícil llevar las dos cuentas para 2 niños
__x10=100	7	4	3	0	Difícil coordinar las dos cuentas para 3

Tabla 7. Resultados de la actividad de los mandados y el pez

En términos generales, el quehacer de los alumnos al enfrentarse con las situaciones de multiplicación directa y la de multiplicación inversa reflejó que —si se tomara en cuenta el grado escolar que estaban cursando— las nociones multiplicativas que al menos diez de ellos habían desarrollado eran bastante primitivas. Algunos de estos estudiantes a pesar que podían iterar las cantidades, no parecían ver con facilidad los patrones multiplicativos. Para algunos otros, incluso, parecía ser difícil iterar las cantidades e ir contando mentalmente las veces que éstas se iteraban. El apoyo del entrevistador fue fundamental para conseguir que esos niños pudieran coordinar las dos cuentas, aunque para algunos niños, a pesar del apoyo la actividad pareció ser retadora. Para los propósitos de este estudio, lo que es importante reconocer es que la mayoría de los estudiantes no parecía haber desarrollado habilidades multiplicativas sobresalientes; habilidades que hicieran razonable esperar que les resultara fácil involucrarse en actividades novedosas relacionadas con la multiplicación.

4.2. Fracciones representadas convencionalmente

Otra de las actividades que se les planteó a los estudiantes tenía por objetivo conocer hasta que punto los niños eran capaces de interpretar notación convencional de las fracciones, es decir, se buscaba indagar qué conocimientos cuantitativos tenían de su significado. Esto con el fin de ver sobre qué bases sería posible apoyarlos en la construcción de nuevos conocimientos en fracciones. Para ello se les presentó una situación que implicaba identificar los tamaños representados por algunas fracciones representadas convencionalmente y para esto se utilizó un chocolate que medía aproximadamente 16 cm de largo por 8 cm de ancho (ver Figura 13).

Figura 13. Imagen del chocolate que se les presentó a los estudiantes

A los estudiantes se les presentaron consecutivamente tres tarjetas, una con el símbolo $\frac{1}{2}$, otra con $\frac{1}{4}$ y otra más con $\frac{2}{4}$. Se les pidió que identificaran la cantidad de chocolate que cada fracción representaba. En el caso de 1/4 y de 2/4, también se les pidió que indicaran si esas cantidades serían mayores, menores o iguales que 1/2. Vale la pena aclarar que, según los planes y programas de estudio de México (Secretaría de Educación Pública, 1993), estos estudiantes debían ya estar familiarizados con estas fracciones desde el tercer grado, y que en los meses que llevaban en el cuarto grado deberían haber trabajado con tercios, quintos y décimos.

Todos los estudiantes pudieron identificar la mitad de una barra de chocolate, aunque tres de ellos no parecieron relacionar de manera automática el símbolo "$\frac{1}{2}$" con una mitad. Cinco de los estudiantes reconocieron que 1/4 de la barra de dulce implicaba una cantidad menor a 1/2, otros seis expresaron que sería más y tres no estaban seguros. Solamente un estudiante reconoció que 2/4 del chocolate sería lo mismo que la mitad (1/2), el resto expresó que sería más, no saber o no estar seguro. En general, prácticamente ninguno de los alumnos parecía haber desarrollado previamente entendimientos sobre el significado de la notación convencional de las fracciones, que hicieran razonable esperar que les resultara fácil involucrarse en situaciones que implicaran comparar tamaños de forma relativa (ver resultados en la Tabla 8).

<table>
<tr><th rowspan="2">Fracciones representadas en notación convencional</th><th colspan="2">Notación convencional</th><th colspan="2">Significado conceptual</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th>Sí</th><th>No</th><th>Sí</th><th>No</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>11</td><td>3</td><td>14</td><td>0</td><td>Aunque todos señalaron un medio de chocolate, 3 niños no lo asociaron a "1/2"</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>7</td><td>7</td><td>5</td><td>9</td><td>5 niños sabían que 1/4 era menor a 1/2, 6 creían que era más y 3 no estaban seguros</td></tr>
<tr><th>Equivalencia de fracciones</th><th colspan="2">Entendió la equivalencia</th><th colspan="2">No entendió la equivalencia</th><td rowspan="2">13 niños parecían no tener mucha idea de lo que implicaba la fracción 2/4. Algunos pensaban que era mayor a 1/2, otros señalaron no estar seguros</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">13</td></tr>
</table>

Tabla 8. Las fracciones en el chocolate

4.3. Multiplicandos y tamaños relativos

Las siguientes dos actividades problemáticas que se les presentaron a los niños tenían la finalidad de conocer las nociones cuantitativas que tendrían para enfrentarse a situaciones que tuvieran que ver con la comparación de tamaños relativos.

El cartón de leche y los vasos

La primera actividad que se les planteó a los niños consistía en estimar magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos. Esta actividad implicaba comparar el tamaño de diferentes tipos de vasos (de plástico, de vidrio y de unicel) en relación a cuántos de cada tipo se podían llenar con la leche contenida en un cartón de leche. El propósito de esta situación fue identificar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que emergerían entre los estudiantes al razonar sobre este tipo de situaciones.

En esta actividad se utilizó un cartón de leche vacío (ver Figura 14). Al cartón se le quitaron todas las inscripciones y se le forró con plástico, de manera que fuera posible hacer inscripciones sobre él con plumones para pizarrón blanco, las cuales se podían borrar fácilmente. A los alumnos se les proporcionó un plumón y un paño para borrar.

Figura 14. Cartón de leche de un litro que se utilizó en las entrevistas

Al comienzo de la situación, el entrevistador les platicó a los estudiantes que en su casa había cierto tipo de vasos de plástico, todos del mismo tamaño, los cuales tenían la característica de que con la leche que cabía en el cartón se podían llenar, exactamente, tres de ellos (*i. e.*, porciones de 1/3 de la leche del cartón). A los alumnos se les pidió primero que marcaran, aproximadamente, el nivel en el que estaría la leche después de haber servido un vaso; después se les pidió que identificaran dónde estaría el nivel después de servir dos y tres vasos (cabe destacar que se les aclaró a los niños que cuando el cartón de leche estaba lleno, el nivel de la leche llegaba justo a donde termina la cara rectangular del cartón, y que cuando el cartón estaba vacío, el nivel llegaba justo donde comienza la misma cara rectangular del cartón, tal como se muestra en la Figura 15a).

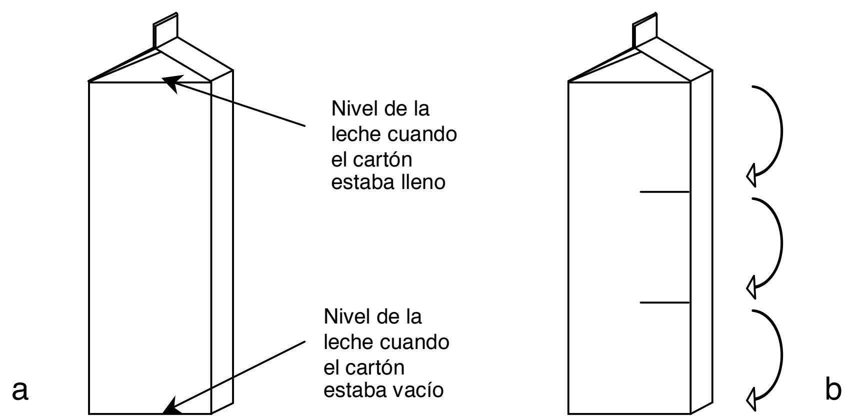


Figura 15a y 15b. Dibujo del cartón de leche (de un litro) que se usó en las entrevistas y de su segmentación unidimensional con base en multiplicandos

Como puede notarse, la actividad trataba de orientar a los estudiantes a pensar en la capacidad de los vasos en términos de multiplicandos (*i. e.*, una cantidad de leche que cuando se sirve cierto número de veces en los vasos se utiliza toda la leche que contiene el cartón) y a razonar con inscripciones unidimensionales. En la Figura 15b se nota que si bien la situación hacía alusión a volúmenes (*i. e.*, magnitudes con tres dimensiones), los cartones permitían razonar sobre la cantidad proporcional de leche que se había servido de manera unidimensional: al servir 1/3 de la leche, el nivel en el cartón bajaría 1/3 de su altura.

Posteriormente el entrevistador les platicó a los alumnos de cierto tipo de vasos de vidrio, todos del mismo tamaño, que había en la casa de su primo, los cuales tenían la característica de que con la leche que había en el cartón se podían llenar, exactamente, cinco de estos vasos (*i. e.*, porciones de 1/5 de la leche del cartón), y se les pidió que explicaran a qué vasos les cabría más leche, si a los de plástico o a los de vidrio (*i. e.*, 1/3 *vs.* 1/5). A continuación, se les pidió a los alumnos que marcaran el nivel en el que estaría la leche en el cartón después de servir un vaso de vidrio, y posteriormente que marcaran los niveles después de servir dos, tres, cuatro y cinco vasos.

Finalmente, se les dijo a los alumnos que había cierto tipo de vasos de unicel, todos del mismo tamaño, los cuales tenían la característica que con la leche que cabía en el cartón se podían llenar, exactamente, diez de ellos (*i. e.*, porciones de 1/10 de la leche del cartón). Se les preguntó a los alumnos si le cabría más o menos leche a los vasos de unicel que a los vasos de plástico y de vidrio (*i. e.*, 1/10 *vs.* 1/3 y 1/10 *vs.* 1/5). Después se les pidió que estimaran el lugar en que estaría la leche después de servir cinco vasos de unicel y si sería más, menos, o lo mismo que la mitad del cartón (*i. e.*, 5/10 *vs.* 1/2).

Con base en los elementos de propuesta alternativa para la enseñanza de las fracciones que se describe en el Capítulo 2 de esta tesis, esta actividad se diseñó con la expectativa de que ayudaría a los estudiantes a pensar más en el tamaño de algo (*e. g.*, la capacidad de los vasos de vidrio) que en un número específico de cosas (*e. g.*, la capacidad que determinado número de vasos de vidrio tiene en común). También se diseñó con la expectativa de que orientaría a los estudiantes a reflexionar sobre la magnitud de cosas que eran independientes del cartón (*i. e.*, la capacidad de cierto tipo de vasos); aunque lo hicieran apoyados en inscripciones hechas sobre el cartón (ver Figura 15b) y no externas a él (ver Figura 10 del Capítulo 2).

La actividad de comparar la capacidad de los vasos pareció serle significativa[2] a todos los niños, ya que los entrevistadores no tuvieron que hacer muchos esfuerzos para explicar la situación problemática y lograr que los estudiantes se involucraran en ella de manera satisfactoria. Para todos los estudiantes pareció tener sentido el identificar niveles en el cartón de leche que se ajustaran a un criterio iterativo. En cuanto a las comparaciones entre los tamaños de los vasos, todos los estudiantes identificaron a los de plástico como los que tenían más capacidad que los de vidrio (*i. e.*, $1/3 > 1/5$), y a los de unicel como los que tenían menos que los de plástico y los de vidrio (*i. e.*, $1/10 < 1/3$ y $1/10 < 1/5$). Las siguientes dos transcripciones son representativas de las explicaciones que dieron los niños, en ambas se compara el tamaño de los vasos de plástico con los de vidrio.

3. Vanessa: Los de plástico [son más grandes].

   Entrevistadora: ¿Los de plástico, por qué?

   Vanessa: Porque son más grandes los vasos y traen más leche.

4. (Vicky indica que los vasos de plástico son más grandes)

   Entrevistadora: ¿Por qué?

   Vicky: Porque eran 3 [de plástico] y los de vidrio son 5.

   Entrevistadora: ¿Y eso qué quiere decir?

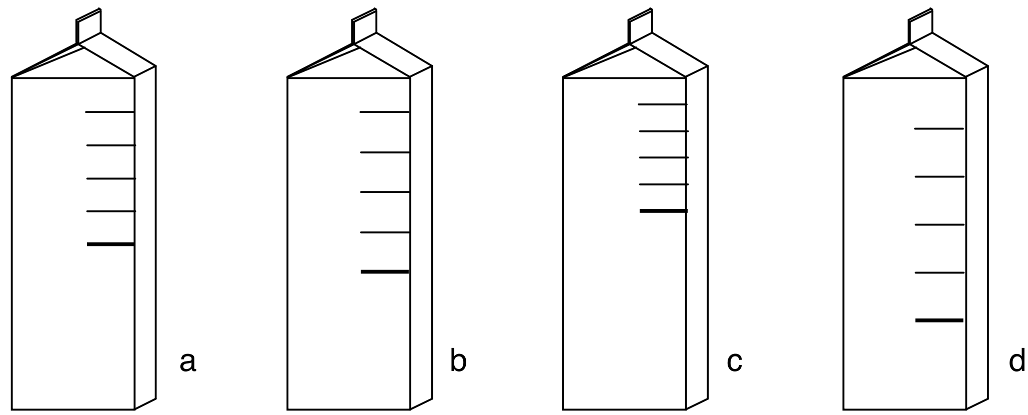
   Vicky: Le sirven a cada quien un vaso [de plástico], pero si sirven 5 [vasos de vidrio] va a tener más poco [de leche un vaso de vidrio].

Las transcripciones ilustran cómo los estudiantes pudieron formarse una imagen aparentemente clara del tamaño de los vasos, a partir de la información respecto a su capacidad en términos de multiplicandos que satisfacían cierto criterio iterativo; una imagen que les permitió juzgar correctamente qué vasos eran más grandes. En las trascripciones se nota que ambas niñas hacen referencia a la capacidad de los vasos de manera que parece que se están imaginando magnitudes ("traen más"; "va a tener más poco"). La emergencia de este tipo de imágenes también fue común al juzgar el tamaño de los vasos de unicel; por ejemplo, Alejandro, se refirió a ellos de esta forma: "…son chiquitos porque entró todo el bote en diez vasitos".

El que emergieran este tipo de imágenes sugiere que la situación les ayudó a los estudiantes a razonar sobre cómo, en ciertas circunstancias, el vincular algo con un número relativamente grande (*e. g.*, vasos de un tamaño tal que 10 de ellos se pueden llenar con el contenido de un cartón de leche) implica que ese algo sería más pequeño que una cosa a la que se le vincula con un número menor (*e. g.*, vasos de un tamaño tal que tres de ellos se pueden llenar con el contenido de un cartón de leche); esto es, la actividad pareció ayudarles a razonar de forma consistente con la racionalidad cuantitativa básica del denominador (entre más grande es el número, menor es el ente al que se refiere). Cabe también mencionar que el que emergieran este tipo de imágenes corrobora la conjetura de que la situación les resultó significativa a los estudiantes.

En el caso de estimar el nivel en el que estaría la leche en el cartón después de servir cinco vasos de unicel, todos los estudiantes lo hicieron marcando el nivel que tendría después de servir uno, dos, tres, cuatro y cinco vasos (ver Figura 16). En las estimaciones de cinco estudiantes, el nivel después de servir cinco vasos coincidió con la mitad del cartón (ver

Figura 16a); en el caso de otros siete estudiantes el nivel fue más de la mitad, por poco (ver Figura 16b); la estimación de un estudiante fue de menos de la mitad (ver Figura 16c); y la del alumno restante fue de mucho más de la mitad (ver Figura 16d).



Figuras 16a, 16b, 16c y 16d. Representaciones de los niveles aproximados en los que los estudiantes estimaron que estaría la leche en el cartón después de servir cinco vasos de unicel

Respecto a comparar el nivel de la leche después de servir cinco vasos de unicel con la mitad (*i. e.*, 5/10 *vs.* 1/2), los cinco estudiantes cuyas marcas coincidieron con medio cartón dijeron que sería lo mismo (ver Figura 16a). Aunque es posible que sus respuestas estuvieran basadas en la observación empírica del lugar en el que habían hecho las marcas y que no hayan anticipado que este lugar tendría que coincidir con la mitad, los cinco estudiantes fueron capaces de justificar su respuesta matemáticamente. Las siguientes transcripciones ilustran cómo lo hicieron:

5. Entrevistador: ¿Porqué es lo mismo?

Lourdes: Porque si ya son 5 vasitos aquí [señala las primeras cinco marcas que hizo] y son 10 [en todo el litro] aquí caben otros 5 [señala la parte de abajo del cartón de leche] y no me sobra nada porque se acaba toda la leche.

6. Marcos: Sería la mitad

Entrevistadora: ¿Ajá? ¿Cómo sabes que quedaría la mitad?

Marcos: Porque tienes cinco vasos aquí [señalando las marcas], y cinco vasos, pero te alcanzó toda la leche para los 10 vasos, si sólo le echamos cinco, pues queda la mitad.

Ambas transcripciones ilustran cómo, en el contexto de la situación presentada, cinco estudiantes pudieron generar sin dificultad imágenes cuantitativamente firmes respecto a la equivalencia entre tamaños relativos; esto es, imágenes de cómo la leche contenida en cinco vasos de unicel (5/10) sería equivalente a la que cabría en la mitad del cartón (1/2). En su razonamiento de la actividad, estos estudiantes parecían tener presente tanto la relación entre la capacidad de los vasos y la del cartón de leche ("son 10… y no me sobra nada porque se acaba toda la leche"; "toda la leche para los 10 vasos"), como la relación proporcional entre 5 y 10.

Las estimaciones de los otros nueve estudiantes respecto a la cantidad de leche involucrada en servir cinco vasos de unicel claramente estuvieron basadas en las marcas que habían hecho en el cartón; algunos de ellos respondieron que sería más de la mitad y otros menos dependiendo del lugar en el que pusieron la quinta marca (ver Figura 16b, 16c y 16d). A estos estudiantes se les preguntó a continuación cuántos vasos de unicel se podrían servir con la mitad del cartón. Todos los alumnos respondieron que cinco vasos. Entonces se les volvió a preguntar si el nivel de la leche después de servir cinco vasos de unicel sería más, menos, o la mitad del cartón. En esta ocasión siete de los nueve dijeron que sería lo mismo que la mitad. Estos estudiantes, con la guía del entrevistador, también parecían poder imaginarse con claridad la equivalencia:

7. Lesdy: Es más de la mitad (después de estimar el nivel en que estaría la leche después de servir cinco vasos de forma similar a la Figura 16b).

Entrevistador: ¿Para cuántos vasos me alcanza [el cartón de leche]?

Lesdy: Para 10.

Entrevistadora: Medio cartón ¿para cuántos vasos me alcanza?

Lesdy: ¿Cinco?

Entrevistadora: ¿Para cinco?, ¿por qué?

Lesdy: Porque es la mitad del litro.

Entrevistadora: Porque es la mitad de litro ¿y?

Lesdy: Y son 10 vasitos y son 5 y ya son medio litro.

En este fragmento se nota cómo la alumna no sólo cambia de parecer en el curso de la conversación, sino que lo hace basándose en una imagen que crea con el apoyo de la entrevistadora ("Con medio litro de leche ¿para cuántos vasos me alcanza?") y que ella parece entender bien ("Y son 10 vasitos y son 5 y ya son medio litro").

Los dos alumnos restantes parecieron tener dificultad conciliando su conocimiento aritmético respecto a que cinco es la mitad de 10, con el imaginarse el nivel de la leche al servirla en los vasos. Estos alumnos siguieron identificando el nivel de la leche después de servir cinco vasos de unicel más allá de la mitad del cartón (ver resultados en la Tabla 9).

El que doce de los catorce alumnos hayan podido generar imágenes cuantitativas, aparentemente sólidas, de la equivalencia entre la cantidad de leche que se requería para servir cinco vasos de unicel y medio cartón de leche es algo significativo si se toma en cuenta que sólo uno de los ellos reconoció la equivalencia entre 2/4 y 1/2 cuando se les presentó la fracción en notación convencional. En general, esta actividad pareció ser fructífera en términos de apoyar a los estudiantes a razonar de manera consistente con las equivalencias fraccionarias.

<table>
<tr><th rowspan="2">Tamaños relativos</th><th colspan="3">Comparó el tamaño de las fracciones de manera relativa</th><th rowspan="2">Observaciones</th></tr>
<tr><th colspan="2">Sí</th><th>No</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$</td><td colspan="2">14</td><td>0</td><td>Todos los niños parecieron poder imaginar que 1/3>1/5</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{10}$</td><td colspan="2">14</td><td>0</td><td>Todos también parecieron poder imaginar que 1/3>1/5>1/10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{5}{10}$</td><th colspan="3">Identificó 5/10 como:</th><td rowspan="3">5 niños marcaron 5 vasos y la última marca coincidió con la mitad del cartón. Los otros 9 niños marcaron 5 vasos como más o menos de la mitad del cartón</td></tr>
<tr><td>$= \frac{1}{2}$</td><td>$> \frac{1}{2}$</td><td>$< \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$</td><th colspan="3">Identificó la equivalencia</th><td rowspan="3">Los 5 niños cuya marca coincidió con la mitad del cartón pudieron argumentar la equivalencia. 7 niños pudieron ver la equivalencia cuando se les planteó de otra forma. Los 2 niños restantes parece que no pudieron ver la relación de la mitad de 10 con la mitad del cartón de leche</td></tr>
<tr><th>sin apoyo</th><th>con apoyo</th><th>No</th></tr>
<tr><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

Tabla 9. Los tamaños relativos y el cartón de leche

El viaje de la Selección Mexicana de Fútbol

La actividad restante que se les planteó a los niños estaba basada en una narrativa del viaje de cuatro horas en avión de la Ciudad de México a Chicago, Estados Unidos, de la Selección Mexicana de Fútbol. A los alumnos se les presentó una gráfica que representaba el trayecto del avión (ver Figura 17), y se les pidió que identificaran el lugar en el que iría el avión después de viajar una hora. Después se les pidió que identificaran el lugar en que iría después de viajar dos horas y que explicaran si habría recorrido más, menos, o lo mismo que la mitad del trayecto (*i. e.*, 2/4 *vs.* 1/2). El propósito de esta actividad fue tener una segunda oportunidad para documentar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que emergerían entre los estudiantes al enfrentarse con situaciones basadas en comparar tamaños de manera relativa a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos.

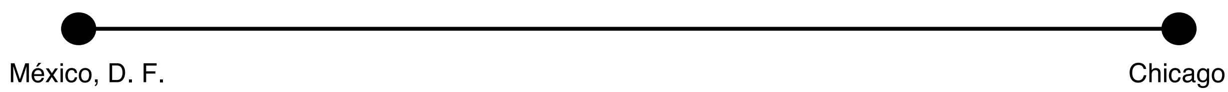
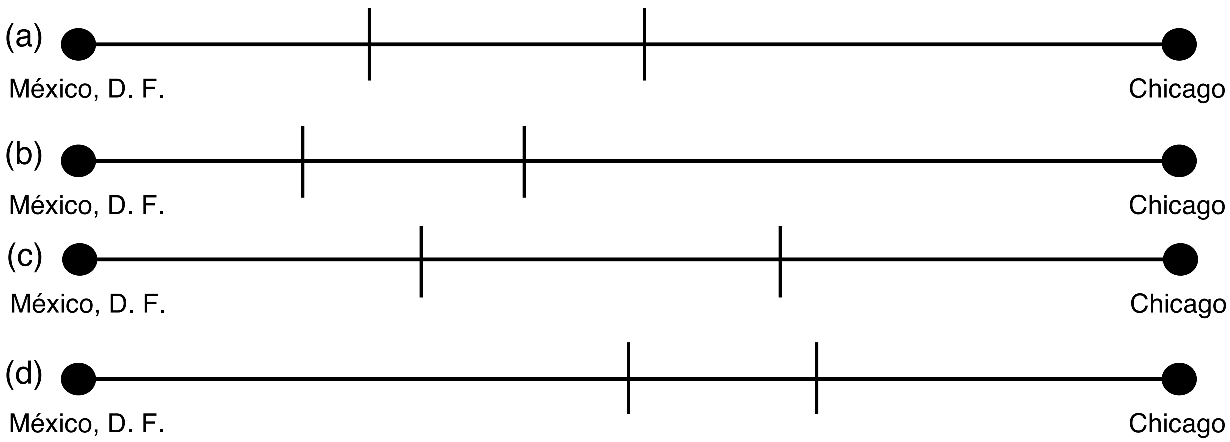


Figura 17. Representación del trayecto que recorre un avión al viajar de la Ciudad de México a Chicago, Estados Unidos

Esta situación también pareció serle significativa a la mayoría de los estudiantes, ya que se involucraron en ella sin mucha dificultad y lo hicieron de manera satisfactoria. Sin embargo, como se explica más adelante, éste no fue el caso con dos alumnos.

En general, estimar el lugar en que iría el avión a partir de un criterio iterativo (*i. e.*, una distancia tal que cuando se recorriera 4 veces se recorrería todo el trayecto) pareció ser algo que para los estudiantes tenía sentido; aunque hay que mencionar que tres de ellos produjeron estimaciones poco razonables (ver Figuras 18c y 18d). Respecto a la comparación entre la distancia recorrida por el avión después de viajar dos horas, casi todos los estudiantes parecieron hacerlo iterando la distancia que estimaron para una hora. Las estimaciones de tres alumnos coincidieron con la mitad del trayecto (ver Figura 18a), las de ocho estuvieron antes de la mitad del trayecto (ver Figura 18b), y las de tres, más allá de la mitad (ver Figuras 18c, 18d). Cuando se les preguntó si el avión llevaría más, menos o lo mismo que la mitad del trayecto, cinco estudiantes dijeron que lo mismo, pudiendo justificar su respuesta; entre ellos estaban los tres que estimaron originalmente el lugar en que iría el avión a la mitad del trayecto (ver Figura 18a) y dos que lo estimaron antes de la mitad del trayecto (ver Figura 18b).



Figuras 18a, 18b, 18c y 18d. Estimaciones del lugar en el que iría el avión después de viajar una y dos horas.

Los nueve estudiantes restantes consideraron que el avión llevaría más o menos de la mitad, aparentemente basándose en el lugar en el que habían hecho la segunda marca. A estos nueve estudiantes se les preguntó cuánto tiempo, aproximadamente, llevaría volando el avión al llegar a la mitad del trayecto; siete de ellos dijeron que dos horas y cambiaron de parecer respecto a su estimación original. Los otros dos alumnos parecieron tener dificultades al tratar de entender qué se les preguntaba. En general, ambos parecían tener problemas interpretando la situación que se les estaba planteando. A uno de ellos, por ejemplo, no pareció preocuparle la disparidad en el tamaño de los segmentos que creó para representar distancias recorridas por el avión en una hora (ver Figura 18d).

En términos generales, esta actividad también pareció facilitar el que los alumnos razonaran sobre tamaños relativos (*i. e.*, 1/4) y equivalencias básicas (*i. e.*, 2/4=1/2). Es importante no perder de vista que aunque la equivalencia implicada puede parecer trivial (2/4=1/2), sólo uno de los estudiantes entrevistados la reconoció en la actividad del chocolate que se les había presentado previamente (los resultados se muestran en la Tabla 10).

<table>
<tr><th>Tamaños relativos</th><th colspan="3">Identificó 2/4 como:</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{2}{4}$</td><td>$=\frac{1}{2}$</td><td>$>\frac{1}{2}$</td><td>$<\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">A 3 niños les coincidió su marca de 2 horas con la mitad del recorrido. 11 niños marcaron más o menos de la mitad.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$</td><td colspan="3">Identificó la equivalencia</td><td rowspan="3">Los 3 niños cuya marca coincidió con la mitad pudieron argumentar la equivalencia. 2 niños la identificaron cuando se les preguntó si al llevar el avión dos horas volando era la mitad del recorrido. 7 niños parecieron poder observar la equivalencia cuando se les planteó de otra forma. Sólo 2 niños parecieron tener dificultad al interpretar la situación</td></tr>
<tr><td>sin ayuda</td><td>con ayuda</td><td>No</td></tr>
<tr><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

Tabla 10. Los tamaños relativos y el viaje de la Selección Mexicana de Fútbol

Antes de pasar a la reflexión de lo que implican estos resultados, es importante mencionar que, al comparar el quehacer de los estudiantes en las últimas dos actividades, no se reconocieron consistencias que sugirieran que sería posible clasificarlos en grupos jerárquicos de acuerdo con su desempeño, al menos no con facilidad: sólo tres de los cinco alumnos que reconocieron de manera inmediata que dos horas de viaje equivaldría a la mitad del trayecto estuvieron entre quienes identificaron sin dificultad que servir cinco vasos de unicel equivalía a servir medio cartón de leche; de igual manera, sólo uno de los alumnos que no pudo resolver la situación del avión estuvo entre aquellos que no reconocieron la equivalencia entre los cinco vasos y la mitad del cartón de leche.

En el siguiente capítulo concluyo sobre las implicaciones que tienen estos resultados para la enseñanza de las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos y lo que significaría conocer este tipo de resultados para un profesor de primaria frente a grupo.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

En este trabajo de investigación he destacado la importancia de la enseñanza de las fracciones como fundamento para la comprensión cuantitativa de otros conceptos matemáticos, tales como los números decimales, los porcentajes y las proporciones (ver Capítulo 1); conceptos que, sin duda, les permitirán a los estudiantes en el futuro un mejor desempeño como trabajadores de cualquier ámbito, así como una mayor participación crítica e informada dentro de la sociedad en la que viven; conceptos que forman parte de las competencias matemáticas que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) reconoce como importantes para el desarrollo de los ciudadanos en la actualidad (Vidal y Díaz, 2004).

Las fracciones a pesar de ser un contenido muy importante aún lo podemos considerar como difícil de aprender y difícil de enseñar. Resultados de pruebas como Excale sugieren que muchos estudiantes de 6º grado de primaria en México están teniendo problemas con contenidos vinculados al concepto de fracción (ver Tabla 2 del Capítulo 1).

Ante este panorama se hace necesario buscar otras opciones respecto a cómo se podría mejorar la enseñanza de las fracciones utilizando alternativas de enseñanza distintas a la partición y repartición equitativa. El objetivo de la labor como educadores matemáticos, directa o indirectamente, es lograr que mejore el aprendizaje de cualquier persona (en este caso los niños) que estudie matemáticas (Thompson, 2008). De acuerdo con Thompson, las matemáticas que necesitan aprender los estudiantes son aquellas que sean fundamentales para el aprendizaje de otras ideas matemáticas que jueguen un papel importante en la red de significados del razonamiento del estudiante.

En la investigación que le da fundamento a esta tesis se exploró la viabilidad de la propuesta de los tamaños relativos como alternativa para la introducción de la noción de fracción en la enseñanza, de acuerdo con los señalamientos de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003). En la investigación se condujeron entrevistas clínicas a los 14 estudiantes de un grupo de primaria de un contexto desfavorecido; un contexto similar al de muchos niños mexicanos. Las entrevistas se condujeron con la finalidad de conocer las intuiciones y conocimientos, y la diversidad de éstos, con los que contaban los estudiantes para involucrarse en actividades relacionadas con entender las fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos.

El análisis de los resultados sugiere que actividades basadas en la comparación de tamaños de manera relativa, a partir de la estimación de magnitudes que satisfagan criterios iterativos específicos, pueden ser un punto de partida viable para la enseñanza inicial de las fracciones en los salones de clases, incluso en aquellos que pertenecen a contextos socialmente desfavorecidos. Actividades como la del cartón de leche y los vasos, así como la del viaje en avión, parecieron tener significado inmediato para todos los niños que participaron de las entrevistas, ya que éstos pudieron razonar acerca de multiplicandos que satisficieran cierto criterio iterativo (*i. e.*, vasos conteniendo una cantidad de leche tal que un número *x* de ellos pudiera ser llenado con la leche del cartón o trayectos de una hora que cubrieran el recorrido total de un avión). Estas actividades también parecieron servir para apoyar el que emergieran en el razonamiento de los estudiantes, de manera relativamente firme, nociones e intuiciones consistentes con dos aspectos claves de las fracciones: (1) la racionalidad cuantitativa básica del denominador (a mayor número, menor el tamaño del ente en cuestión) y (2) equivalencias básicas (*e. g.* 1/2=5/10 o 1/2=2/4).

El que surgieran este tipo de nociones e intuiciones entre los niños entrevistados es particularmente significativo, ya que se dio a pesar de lo aparentemente limitado de las ideas multiplicativas que muchos de ellos parecían haber desarrollado, así como de la limitada comprensión que casi todos mostraron tener al atribuirle significado a fracciones en su forma convencional. Estas imágenes cuantitativamente sólidas que aparecieron en los niños al razonar con las situaciones didácticas presentadas sugiere que estas actividades podrían ser recursos adecuados para apoyar el desarrollo de entendimientos más complejos de las fracciones. Asimismo, estos resultados indican que es posible involucrar de manera fructífera a quienes se inician en el aprendizaje de las fracciones en actividades fundamentadas en principios distintos a partir y repartir equitativamente.

Es importante señalar que, a pesar de estos resultados, también se notó cómo a algunos estudiantes les fueron más retadoras las situaciones presentadas que a otros niños. Las dificultades que se documentaron parecieron estar relacionadas, sobre todo, con imaginar en un espacio unidimensional, la producción de segmentos homogéneos que se ajustaran a criterios específicos (*e. g.*, segmentos de un tamaño tal que diez de ellos llenarían todo el espacio). Como se explicó, hubo estudiantes cuya segmentación del cartón de leche y del trayecto del avión divergió mucho de lo que se podría considerar aproximado (ver Figuras 16d, 18c y 18d del Capítulo 4).

El quehacer de estos estudiantes sugiere que podría ser provechoso involucrarlos en actividades que apoyen el desarrollo de la imaginación espacial unidimensional (longitud), antes de introducirlos en situaciones didácticas que impliquen la estimación de segmentos que satisfagan criterios iterativos específicos. También sería importante que estos estudiantes pudieran tener mayor práctica en la iteración de cantidades para una mejor comprensión de lo que implica ésta en la acumulación de la cantidad que se itera. De igual manera sería esencial que los alumnos tuvieran experiencias en el manejo de las cantidades continuas y un conocimiento sólido sobre el significado de la multiplicación. Todo esto con la intención de que los conocimientos previos de los estudiantes se encuentren en niveles similares para iniciarlos en una secuencia de aprendizaje sobre fracciones desde la perspectiva de los tamaños relativos.

Un aspecto que es importante resaltar de los resultados obtenidos en estas entrevistas, es que los profesores pueden encontrarse en sus salones de clase con niños como los entrevistados en este estudio: niños de cuarto grado de primaria (como es el caso que nos ocupa) con dificultades para sumar iteradamente cantidades relativamente sencillas, con problemas para comprender qué implica multiplicar y con conocimientos muy limitados sobre fracciones. Ante esta situación, como docentes debemos estar conscientes que puede haber estudiantes que no estén llegando con los conocimientos necesarios que les permitirán enfrentarse con los contenidos estipulados en el currículo de cuarto grado (en este caso), pues estos alumnos difícilmente podrán trabajar con dichos contenidos, ya que necesitarían haber desarrollado algunas concepciones con anterioridad.

La labor docente es una práctica compleja, con muchos retos de diversa índole que enfrentar en el día a día. La tarea se hace aún más difícil cuando tenemos que trabajar con niños que ya están listos para aprender lo que se les va a enseñar frente a otros que están precariamente preparados para aprender lo que les va a ser enseñado (Lampert, 2001). De ahí la importancia de detectar los conocimientos previos de los estudiantes antes de comenzar a trabajar con los contenidos marcados por el programa escolar. Como profesor se hace necesario tomar las decisiones pedagógicas que se crean pertinentes para apoyar a los estudiantes a construir conocimientos desde un nivel que sea comprensible para todos los niños, avanzar todos juntos y, posteriormente, trabajar en conceptos más elevados; dando prioridad a aquellos conceptos matemáticos que sean la base para el aprendizaje de otros más complejos, como es el caso de las fracciones.

En términos generales, el análisis de las entrevistas es consistente con considerar que sería viable involucrar a los alumnos en rutas de aprendizaje de las fracciones que se fundamenten en las conjeturas de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003); una ruta de enseñanza que sortee las limitaciones de la partición equitativa (o reparto) y que, al mismo tiempo, apoye el desarrollo de entendimientos complejos acerca de los números racionales. Una ruta de enseñanza que enfatice ideas como: tamaño, proporción, medición y reciprocidad proporcional. Entendimientos que aún no son alcanzados por los niños en México (*cf.* Backhoff *et al.*, 2006).

Aún queda pendiente precisar la naturaleza de al menos una de las posibles rutas alternativas de aprendizaje, así como de los medios de apoyo didáctico que se requerirían, aunque existen ya investigaciones como las de Steffe (2003) sobre las que sería posible construir. También faltaría precisar los retos que implicaría, en términos de formación docente, el lograr que los maestros pudieran apoyar a sus alumnos en seguir fructíferamente una de estas rutas.

Notas

[1]Un agradecimiento especial al Dr. José Luis Cortina y a mis compañeros Luz Pérez Quiróz, Ericka Renata Cardoso Moreno y Filiberto Méndez Martínez por su apoyo en la conducción de las entrevistas.

[2]Nos referimos a la actividad como *significativa* asumiendo la perspectiva de las matemáticas realistas (Treffers, 1987). Desde esta perspectiva, para que una situación sea *significativa* (o *realista*) no hace falta que los estudiantes la conciban, necesariamente, como teniendo gran importancia en sus vidas o siendo muy próxima a sus intereses; o que la reconozcan como parte de su experiencia cotidiana. El que una situación sea significativa sólo requiere que los estudiantes la conciban como algo comprensible, sensato y digno de que se razone sobre ella, en maneras que un profesional de la educación matemática puede reconocer como satisfactorias y productivas.

Referencias

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, 16*(3), 5-28.

Ávila, A., Balbuena, H. y Bollás, P. (1994/2002). *Matemáticas. Cuarto Grado*. México. D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Ávila, A., Balbuena, H., Bollás, P. y Castrejón, J. (1993/2002). *Matemáticas. Tercer grado*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Ávila, A., Balbuena, H., Fuenlabrada, I. y Waldegg, G. (2000). *Matemáticas. Quinto Grado*. México. D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peón, M. y Bouzas, A. (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México D. F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Balbuena, H., Dávila, M., García, S., Olivera, M. A. y Pasos, I. G. (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado*. México. D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Nueva York: Macmillan.

Cobb, P. (1986). Clinical interviewing in the context of research programs. En G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceeding of the Eighth Annual Meeting of the International Group of the Psychology of Mathematics Education: Plenary Speeches and Symposium* (pp. 90-110). East Lansing, EEUU: Michigan State University.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23, 87 - 103.

Cobb, P., Zhao, Q. y Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique*, 2(1), 55-73.

Delval, J. (1994). *El desarrollo humano*. Madrid: Siglo XXI.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

Feder, S., Filloy, E., Gitler, S., Gorostiza, L., Imaz, C. y Rivaud, J. J. (1972). *Matemáticas Tercer Grado*. México: Secretaría de Educación Pública

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Gofree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En: N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-167). Barcelona: Graó.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En: T. Nunes y P. Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). Hove: Lawrence Erlbaunm.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 105-128.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (s. f.). *Explorador del Excale*. Recuperado el 20 de febrero de 2008, de http://www.inee.edu.mx/explorador/.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (s. f.). Portal web. Recuperado el 21 de octubre de 2008, de http://jweb.inegi.org.mx/niveles/jsp/index.jsp.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding* (second ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, Carolina del Norte, EEUU: Information Age Pub.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1995). Constructivismo y educación matemática. En: D. Block (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Secretaría de Educación Pública.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México, D. F.: Siglo XXI.

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38.

Real Academia de la Lengua Española. (2001). *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, 22ª Edición*. Recuperado el 11 de noviembre de 2007, de http://www.rae.es/rae.html.

Secretaría de Educación Pública. (1993). *Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria*. México, D. F.: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado*, México, D. F.: Autor.

Secretaría de Desarrollo Social. (s. f.). Portal web del Programa Oportunidades. Recuperado el 16 de marzo de 2008, de http://www.oportunidades.gob.mx/htmls/quienes_somos.html.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: Los estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA*, 6, 95-140.

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 305-329.

Steffe, L. P. (2003). The fractional composition, commensurate fractional, and the common partitioning schemes of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(237-295).

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics. A paradigm of developmental research.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual análisis of mathematical ideas: some spadework at the foundation of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. Plenary Addresses* (Vol. 1. pp. 31-49). México: Cinvestav-UMSNH

Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En: J., Kilpatrick, G., Martin y D., Schifter (Eds.*), Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas Project*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

van Galen, F., Feijs, E. , Figueiredo, N., Gravemeijer, K. , van Herpen, E., y Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions. A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Vidal, R. y Díaz, M. A., (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

ANEXO

La escuela

El salón de cuarto

La biblioteca

Eduardo, Miguel Ángel y la bici

Alex

Vanessa

Los niños y el equipo que ayudó