REVISITANDO* LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO EN TORNO DE LAS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS: OBSERVACIONES EMPÍRICAS CON ESTUDIANTES DE 16-18 AÑOS DE EDAD

Vérónica Hoyos A.

Area de Posgrado, Universidad Pedagógica Nacional

Investigaciónes en Matemática Educativa II, Edición del 35 Aniversario del CINVESTAV, México: Grupo Editorial Iberoamérica., 1998.

Resumen. En este artículo se exponen algunos de los resultados de investigación sobre la interrelación entre las representaciones de la variación de un punto a lo largo de una trayectoria rectilínea (representación gráfica y algebraica), con el estado de desarrollo de la sintaxis algebraica. Tres estudios de caso constituyen la base empírica de la investigación, los cuales fueron elegidos como representantes de diferentes estratos en la construcción de un Sistema Cartesiano de Signos. Observaciones empíricas y constructos teóricos dan cuenta del camino que sigue un pensamiento algebraico fincado en los procedimientos algebraicos básicos (como la resolución algorítmica de ecuaciones) hacia el desarrollo de un pensamiento analítico que use el álgebra para describir objetos geométricos, como lo es una línea recta.

Antecedentes

La investigación en torno de la significación de las ecuaciones lineales en dos incógnitas ha sido abordada por diversos autores, entre los que destacan Shoenfeld et al. (1994), Duval (1988), y Herscovics (1980). En la reseña que en seguida haremos de sus resultados, interesa recalcar el nivel de dificultad encontrado en la significación convencional de las ecuaciones lineales, aún en estudiantes que cursan los primeros años del bachillerato.

Nótese que el significado convencional o la significación de la ecuación $ax + by = c$, con a,b,c distintos de cero, es la de que todos los pares de valores que la satisfacen son coordenadas de puntos de la recta, y recíprocamente (cf. Courant y Robbins, 1941).

Shoenfeld et al., 1994

El estudio de Shoenfeld et al., a propósito del aprendizaje de las funciones a nivel de los primeros años del bachillerato, i.e., para estudiantes de aprox. 16 años de edad, fue llevado a cabo en un medio ambiente de aprendizaje computacional, con un software ("GRAPHER", disponible para Mackintosh II-Clásica, especialmente construido para tal efecto (cf. Shoenfeld et al., pp.16-23).

Como ya en otra parte relatamos con más detalle (cf. Hoyos, 1995), GRAPHER fué diseñado como un medio de exploración (no como un programa de enseñanza, pues no hay instrucciones manifiestas en él), entre tres micromundos Point GRAPHER, Black Blobs, y Dynamic GRAPHER, de tal manera que los estudiantes pudieran moverse de uno de los micromundos a cualquiera de los otros dos restantes, y para ser usado en un contexto social como "una pieza de conversación" a fin de facilitar la discusión entre estudiantes y entre profesor y estudiantes (cf. Shoenfeld et al., pp.23).

En general, su idea, con respecto a la dinámica de trabajo a seguir, era dejar a los jóvenes estudiantes experimentar (para permitirles descubrir el software por ellos mismos y ver qué le encontraban de interesante) mientras se trataba, tanto como fuera posible, de que expresaran en voz alta lo que pensaban del trabajo, con una intervención minima de un instructor, JS en el caso de IN (cf. Shoenfeld et al., pp.24).

El tema matemático de interés en este trabajo de Shoenfeld et al. (ver también Moschkovich, J., Shoenfeld, A., and Arcavi, A., 1993, pp.69)., fue el de la traslación (o traducción) entre las representaciones tabular, gráfica y simbólica de las funciones, como parte de las competencias deseadas para los estudiantes que finalizan secundaria y para los que han cursado los primeros años del bachillerato. Los autores proponen el siguiente problema:

Problema1. ***Determine una ecuación de la línea*** **que es paralela a y= 2x - 5 y que pasa a través del punto (1,4).** - Cf. Moschkovich, J., et al., pp.71 -
como representante de la clase de problemas cuya resolución ilustraría el dominio del tema en cuestión.

De hecho es la demanda principal de la tarea propuesta (la cual aparece subrayada), y la necesaria intervención de un tutor para el aprendizaje del tema, lo que sitúa el trabajo de Shoenfeld et al. como antecedente del nuestro.

De acuerdo a Shoenfeld y colaboradores, la resolución del problema propuesto, así como la de toda una serie de tareas relacionadas con él, involucra una comprensión de las relaciones lineales correspondiente a la habilidad para moverse flexiblemente entre una variedad de representaciones. Entre ellas, están la representación gráfica y algebraica de la recta en cuestión.

Con respecto a este estudio de Shoenfeld et al., finalmente nos interesa señalar las evidencias que aportan en cuanto a que, en general, las estructuras del conocimiento elaboradas independientemente o de manera autónoma por los estudiantes no coinciden con las estructuras convencionales de la materia o tema en estudio. Así, por ejemplo (cf.Shoenfeld et al., pp.91-109), mientras que desde el punto de vista convencional en la noción de intersección de una recta con los ejes cartesianos ostensiblemente no habría posibilidad de error, para IN ésto tuvo que ser aprendido, pues dependiendo de los diferentes contextos en que las rectas aparecían (trabajando con GRAPHER) , IN asignaba diferentes interpretaciones a la intersección de la recta en cuestión con el eje y.

En general, dado que las secuencias o situaciones de instrucción han sido elaboradas por adultos, el desencadenamiento del proceso de resolución involucrado no necesariamente está a la mano del estudiante.

Duval, 1988

Con respecto al artículo "Gráficas y Ecuaciones- La articulación de dos registros"(Duval (b)), nuestro interés se centra en los resultados que se reportan con respecto a la ejecución en tareas que involucran dicho contenido; además del análisis formal que ahí se realiza de las variables que intervienen en los dos registros mencionados.

En este artículo, Duval aborda las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas y el de la escritura algebraica y argumenta que, fundamentalmente,

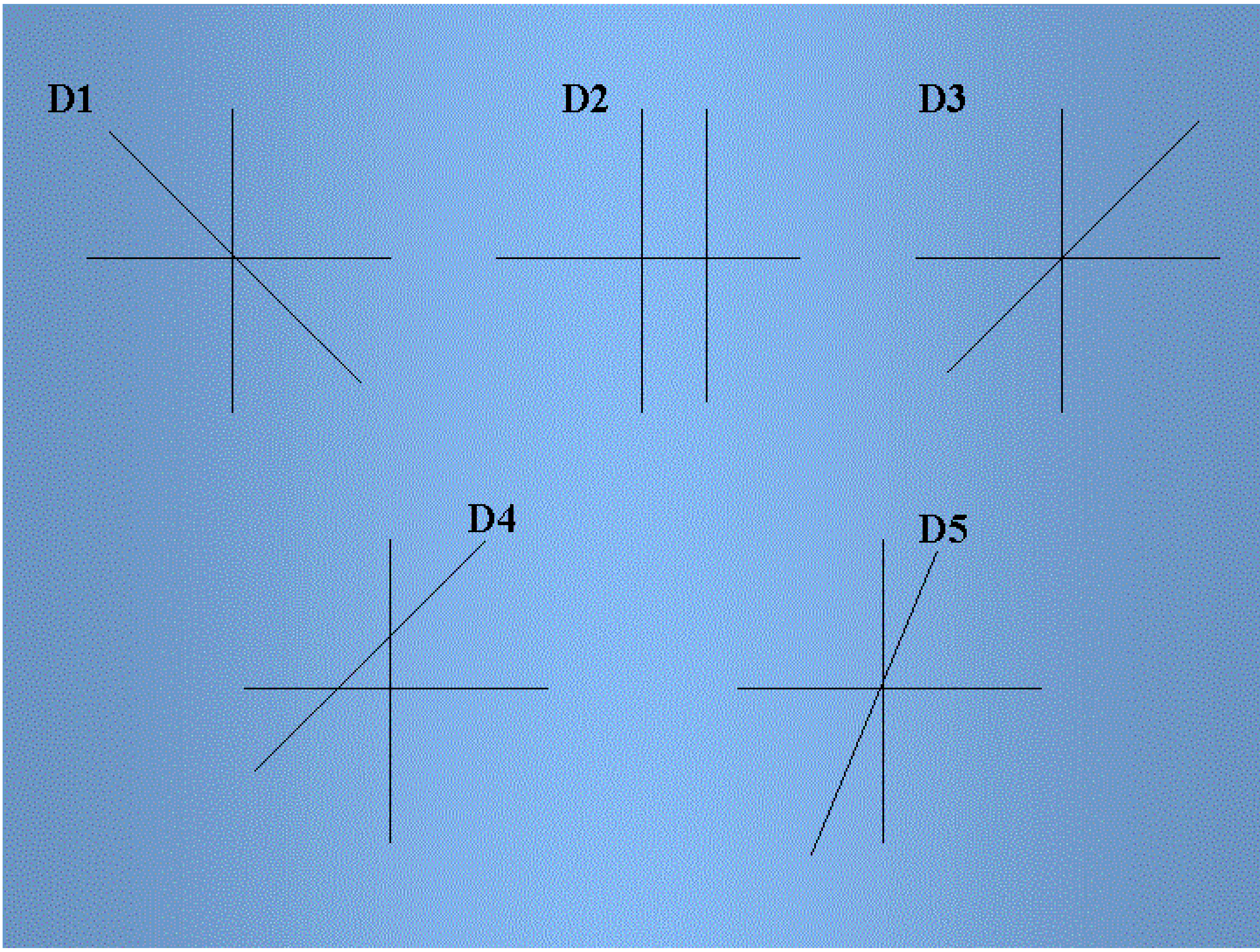
> la razón de las dificultades de lectura y de interpretación de las representaciones gráficas cartesianas es el desconocimiento de éstas. (cf.Idem, pp.125)

De acuerdo a Duval,

> ...la vía de "interpretación global" de las propiedades de las figuras generalmente no es abordada en la enseñanza y al desconocer la especificidad y la importancia de esta vía, no puede alcanzarse el objetivo de una utilización correcta de las gráficas cartesianas por la mayoría de los alumnos de primero de preparatoria (15-16 años). Con esta vía ya no estamos en presencia de la asociación "un punto-una pareja de números", sino de la asociación "variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica"; es decir, el conjunto trazo-ejes forma una imágen que representa un "objeto" descrito por una expresión algebraica. Toda modificación de esta imagen que entrañe una modificación en la escritura de la expresión algebraica correspondiente determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Es, entonces, importante identificar todas las modificaciones pertinentes posibles de esta imágen, es decir, ver las modificaciones conjuntas de la imágen y de la forma de su escritura algebraica (cf.Idem,pp.131)
>
> Cuando se trata de partir de la representación gráfica para encontrar, por ejemplo, la ecuación correspondiente, o para utilizar el concepto de pendiente o el de dirección, se vuelve necesaria esta vía de interpretación global (cf.Idem,pp.127)
>
> No puede haber utilización correcta de las representaciones gráficas cartesianas sin discriminación explicita de las variables visuales pertinentes y sin una correpondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades significativas de la escritura algebraica (cf.Idem,pp.131)

La tarea de reconocimiento que se propuso a tres grupos del primer trimestre del bachillerato -de la cual enseguida se reportan los resultados obtenidos por Duval-, se aplicó después de la enseñanza de funciones afines y de un trabajo sobre diferentes registros, y consistió en lo siguiente:

Se designa por x la abscisa y por y la ordenada de un punto M del plano de referencia. Indicar cúal expresión algebraica (E1, E2, E3,... E10) corresponde a cada una de las rectas D1, D2, ..., D5.



E1: y ³ x
E2: y > x
E3: y = x
E4: y = -x
E5: y = 0
E6: y = x + 2
E7: y = x - 2

E8: y = 2x
E9: y ³ x + 2
E10: x = 2

Los resultados de la aplicación del test a los estudiantes del primer año del liceo francés, fueron los siguientes:

De un total de 105 alumnos:

75 asociaron correctamente y = x con D3
59 asociaron correctamente y = -x con D1
68 asociaron correctamente x = 2 con D2
26 asociaron correctamente y = x + 2 con D4
----
39 asociaron correctamente y= 2x con D5
----
59 encontraron y discriminaron y = x y y = -x
23 encontraron y discriminaron y = 2x y y = x+2
----
16 acertaron a los cinco items
----
14 fracasaron en los cinco items >>

Es de notar los bajos porcentajes (entre el 20 y el 30%) de éxito alcanzados por los estudiantes en la tarea de reconocimiento entre expresiones algebraicas y gráficas en donde la recta no pasa por el orígen.

Herscovics, 1980
El experimento de enseñanza efectuado por Herscovics, N., constituye en ciertos aspectos importantes un antecedente del trabajo de investigación, del cual estamos presentando algunos de los resultados en este artículo (para más detalle, cf. Hoyos, 1996). Estos aspectos hacen referencia al contenido -aprendizaje y enseñanza del tema de la ecuación de la recta- y a la forma de abordar su estudio, mediante la observación clínica de los efectos de una instrucción tendiente a la construcción de significados de las nociones en juego.

De acuerdo a Herscovics, uno de los objetivos de su trabajo fué el de elaborar una guía pedagógica para la enseñanza de la recta y de su ecuación, basándose en una investigación sobre la construcción de significado para las ecuaciones lineales por alumnos de 15 años, y apoyándose sobre concepciones intuitivas y operacionales de las nociones geométricas.

Tal vez Herscovics esté entre los primeros investigadores que introducen el lenguaje representacional para referirse a los problemas de aprendizaje del álgebra, pues la concibe (al álgebra) **como una representación, nueva, para las ideas aritméticas o geométricas;** debiendo ésta tener una significación construida sobre conocimientos aritméticos y geométricos (Herscovics, pág.351 y 359).

En esta concepción de Herscovics se anticipa la nuestra, la de considerar al aprendizaje del álgebra como el aprendizaje de una parte del lenguaje matemático, en el que si es necesario **construir estratos abstractos, estos se construirán sobre estratos más concretos del lenguaje.**

De acuerdo a Herscovics, un nuevo concepto puede ser introducido conectándolo a uno simple o a un concepto equivalente conocido por el estudiante.

> Tratar con un nuevo concepto por expansión de uno simple, involucra formación de conceptos. Por ejemplo, el álgebra en una variable puede ser vista como aritmética generalizada. Por otro lado, conectar un nuevo concepto con uno equivalente puede ser visualizado como un problema de representación. Por ejemplo, el álgebra en dos variables puede ser considerada como una representación de la geometría plana (Herscovics, pág.359)

Ubicados en el terreno del álgebra, los "problemas de representación" a que Herscovics se ha referido, podemos interpretarlos como de conexión de un nuevo concepto (algebraico) con uno equivalente, desarrollado o conocido antes, tal vez dentro de otro sistema matemático de signos diferente al algebraico. De acuerdo a Perelman (1989), ésta acción, la de conectar nociones equivalentes, es definitoria de un juicio analítico.

En este sentido es que nos parece que Herscovics plantea:

> ¿Cómo pueden establecerse conexiones entre el nuevo material y el conocimiento establecido del estudiante? (Herscovics, pág.359)...
>
> El profesor puede partir del conocimiento del estudiante y transformarlo para alcanzar el nuevo tópico. ... En este enfoque constructivo, las transformaciones ejecutadas en la cognición del estudiante para alcanzar el nuevo tópico le permiten construir significado y entonces representa un proceso de asimilación. Este proceso de asimilación puede conducir al cambio deseado en los esquemas del alumno porque "la efectiva asimilación tiene su contraparte en una más o menos efectiva acomodación" (Lo entrecomillado es una cita de Piaget e Inhelder, 1947, que aparece en Herscovics, pág.359)

Así, Herscovics aplica la teoría de Piaget de la equilibración al análisis microgenético o intrapsicológico de las funciones del pensamiento.

Esto puede ser considerado como parte de una propuesta actual de trabajo entre algunos investigadores que, tratando de vincular aportes piagetianos y vygotskyanos, usan constructos de la escuela vygotskyana para desarrollar estudios interpsicológicos o de formación social de la mente, sin menoscabo de la escuela piagetiana, cuyos logros se aplicarían al estudio de los procesos intrasicológicos o autónomos de las funciones del pensamiento.

Al decir Herscovics que el álgebra es una representación de ideas aritméticas y geométricas, desde nuestro punto de vista está diciendo que el álgebra proporciona nuevos signos (regidos por un código también nuevo) para hablarnos, tal vez entre otras cosas, de hechos aritméticos y geométricos de manera diferente. Es decir, que el lenguaje algebraico **resaltaría otros aspectos u otras propiedades de los hechos aritméticos o geométricos que tal vez antes no hayan sido considerados.**

De manera que es probable que sean los usos algebraicos, aquellos que van más alla de los procedimientos de resolución de ecuaciones, pero que parten del reconocimiento operativo de éstas, los que identifican el orígen del pensamiento analítico.
En este trabajo de Herscovics, se instrumentan dos alternativas didácticas para la construcción de la noción de línea recta, las cuales fueron denominadas "intuitiva" y "relacional":

> La primera, llamada "intuitiva" , está basada sobre un patrón de reconocimiento y adivinación, mientras que la segunda construcción es llamada "relacional" dado que está basada sobre la relación del concepto de pendiente con el de dirección (Herscovics, pág. 362)

- Durante la construcción intuitiva,

> a los estudiantes se les dió una línea recta (y = 2x) sobre la cual ellos tenían que localizar unos pocos puntos y encontrar sus coordenadas. Se les preguntó si podían ver un patrón comparando la primera y la segunda coordenadas. Tan pronto como la relación era verbalizada se les pedía escribirla. *El punto variable (x,y) era ahora introducido pero restringido a cualquier posición sobre la línea.* (c.f. pág.362)

Como lo indican sus protocolos, cada estudiante fué capaz de expresar algebraicamente la regla descubierta.

(I.ii) Por el contrario, fué en la ejecución de la tarea inversa en donde los estudiantes encontraron dificultades:

> cuando se les pidió usar su ecuación para generar pares ordenados y adivinar si estos correspondían a puntos sobre la recta, ninguno de los estudiantes fué capaz de comprender la cuestión.
> Aunque ellos habían derivado su ecuación de pares ordenados, ellos no podían usar ésta para generar más pares ordenados. De hecho, ellos tenían que mostrar cómo hacer esto instrumentalmente, sustituyendo un valor para x , y calculando el correspondiente valor para y . Con todo, ellos no usaron estos números espontáneamente como pares ordenados. El estudiante promedio pensaba que estos pares ordenados no darían puntos que caerían sobre la recta dada (Herscovics, pág. 364)
> ...
> Esto, que sucedió en la cuarta entrevista, reapareceaún más fuertemente en la octava entrevista tratando con el concepto de gráfica (Herscovics, pág.365)

(I.iii) En el caso de una recta que no pasa por el orígen, los estudiantes de Herscovics no llegan a derivar, de manera autónoma, la ecuación esperada:

Aún en el nivel de construcción intuitiva, se les pidió a los estudiantes adivinar la ecuación de una línea recta, L1, con una intersección no-cero en `ye´. ´. Usando un transportador, una línea paralela, L2, a través del origen, fué dibujada, y puntos con idénticas absisas fueron identificados en cada línea. La coordenada ye podía entonces ser obtenida en dos pasos: L2 producía y= 2x , y una comparación con L1 proveía la componente aditiva, resultando entonces en y = 2x + 3.
Incluso después de una hora de instrucción, los estudiantes encontraron bastante dificultad en derivar estas ecuaciones por ellos mismos, como es evidenciado por sus errores y su inhabilidad para completar sus asignaciones certeras. Sin embargo, desarrollaron alguna comprensión formal pues podían ahora reconocer que líneas rectas que no cruzaban el orígen tenían ecuaciones que involucraban una regla de dos pasos (Herscovics, pág.365)

El objetivo de esta primera construcción era proveer a las ecuaciones lineales con algún significado prontamente accesible. A la pregunta "¿Cuál es el significado de la ecuación de una línea recta?" , la respuesta esperada era " Es una regla que describe la relación entre las coordenadas de los puntos de la línea". Sin embargo, fallaron los repetidos intentos para que los estudiantes elicitaran la respuesta aún cuando en ello habían trabajado. Inevitablemente, a la pregunta "¿Qué es?" Ellos respondían "¿Cómo?", y describían el proceso por el cual ellos encontraron la ecuación) (Herscovics, pág.366)

Ante el desempeño de los estudiantes que participaron en el experimento de Herscovics, surgen varias cuestiones:

¿Por qué razón los estudiantes no llegaron a producir la ecuación demandada?

¿Es necesario, tal vez, alcanzar una cierta conciencia algebraica fincada en los procedimientos, antes de enfrentar la tarea mencionada?

A manera de conclusión de la reseña de antecedentes que acabamos de presentar, podemos decir que en tanto se reportaban grados importantes de dificultad en torno de la significación de las ecuaciones lineales en las investigaciones antecedentes, esto nos dió indicios del corte didáctico (cf. Hoyos,1995) ahí existente y nos sugirió que el problema de producción de una ecuación lineal a partir de su imágen gráfica podía ser un lugar adecuado de observación de transición entre dos tipos distintos de pensamiento algebraico.

Construcción de significado y aprendizaje de las matemáticas

En nuestra investigación sobre la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, fué el enfoque de apropiación de una noción inmersa en un sistema matemático de signos en construcción (cf. Filloy, 1989), lo que nos hizo concebir como situación adecuada de observación la de resolver conjuntamente con un estudiante el problema siguiente:

"Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (6,2), y es tangente a la recta 2x + y = 16 en el punto (8,0)" ,

el cual fué planteado a los estudiantes al final de la instrucción algebraica básica y después de una introducción a la geometría euclidiana.

Es decir que todo ello nos situó en el ciclo del bachillerato, con estudiantes de 16-18 años, al final del segundo año de este nivel escolar, observando la resolución de problemas típicos de geometría analítica, después de que se han visto los temas de recta y de circunferencia.

Nótese que si bien la demanda en el enunciado del problema hace alusión a la ecuación de una circunferencia, cualquier vía analítica de resolución enfrentará a los estudiantes con la producción de alguna de las rectas que intervienen en la situación problemática planteada.

Sirva de aclaración en este artículo, que de acuerdo a observaciones empíricas y constructos teóricos que sostienen investigaciones precedentes (ver, p.e., Filloy y Rojano (1984), Filloy y Lema (1984), y Filloy y Hoyos (1993)) hablamos de construcción de significado de las nociones y/o de los procedimientos matemáticos, como del significado asociado al desarrollo o construcción de dichos signos y/o a sistemas de ellos.

Además, enfocamos a dicho desarrollo (o construcción, o producción), cuando es efectuado por un estudiante, interactuando con un adulto-experto durante la resolución de problemas, en la zona de desarrollo próximo.

Por otro lado, valga decir que corresponde a la semiótica -de acuerdo a Whitson, J.(1994), especialista en la materia- el estudio de signos y de su actividad en los procesos mediados por signos, o de mediación sígnica. La semiótica, continuando con Whitson, se presenta como el estudio de las posibilidades para la actividad sígnica, o semiósis, en general. Como tal, la semiótica provee recursos conceptuales y vocabulario necesarios para dar cuenta de la cognición, la enseñanza, y el aprendizaje como procesos de mediación sígnica.

Ubicados en el punto de vista del aprendizaje como un proceso de mediación sígnica, Filloy y Hoyos (1993) enfocan a la semiosis (o actividad sígnica) para dar cuenta de la noesis (o conformación de nociones o conceptos). Este será el caso, si el significado en cuestión, construido por el estudiante durante la resolución de problemas, demuestra ser culturalmente adecuado.

Nuestro contexto de observación empírica

La investigación propia que recientemente llevamos a cabo sobre el tema matemático que en este artículo nos ocupa, estuvo estructurada alrededor de la observación de la producción de un texto matemático (cf. Cap.4 en Hoyos,1996), el cual corresponde, formalmente, a la derivación inductiva o a la prueba matemática de que una ecuación del tipo $ax + by = c$, con a,b,c distintos de cero, describe a una recta en el plano, de pendiente $m = -a/b$, la cual pasa por un punto conocido de coordenadas (x', y'), en donde $ax' + by' = c$.

Decimos prueba matemática, en el sentido de una integración definición-conjetura-prueba o de conjetura-definición-prueba, en torno de la equivalencia del trazo geométrico y la representación algebraica de una recta, equivalencia que se alcanza analizando el objeto geométrico, enmarcado en el plano cartesiano, y usando álgebra. Es al despliegue de esta prueba, a lo que en esta investigación se identificó con un pensamiento algebraico analítico.

Como antes hemos mencionado, son varios los investigadores que han indagado en torno de la producción de las ecuaciones lineales a partir de su imágen gráfica.

Sin embargo, en estos estudios se han acercado al conocimiento de la producción de estas ecuaciones en su forma normalizada, es decir, del tipo $y = mx + b$, en dónde m y b pueden ó no ser cero.

En contraste con estos planteamientos, nosotros, en este trabajo, deliberadamente abordamos el problema de indagar en torno de la producción de las ecuaciones lineales del tipo $ax + by = c$, con a,b,c distintos de cero a partir de una imagen gráfica dada.

En este contexto, en el enunciado del problema inicialmente planteado aparece una ecuación del tipo mencionado, $2x + y = 16$, la cual, en el momento de reconocimiento de la situación global de los datos del problema, es probable que el estudiante manipule sintácticamente a fin de transformar la ecuación dada.

Así, en este estudio, importó observar cuales son los significados asignados a los nuevos signos algebraicos (los transformados por el procedimiento sintáctico), y si hay una interrelación entre este probable desarrollo de la sintaxis algebraica con una posible significación de tales ejecuciones.

Siguiendo una serie de lineamientos metodológicos generales correspondientes a nuestro marco teórico (cf. Cap.3 y 4 en Hoyos,1996), aplicamos exámenes diagnóstico sobre usos sintácticos y semánticos del álgebra básica, a fin de levantar una estratificación de los sujetos en estudio.

De los resultados y análisis de estas aplicaciones seleccionamos tres sujetos, uno de estrato bajo (LN), y dos de estrato alto (EP y PB), con los que finalmente se efectuaron observaciones a profundidad en entrevista clínica. Las entrevistas fueron videograbadas y transcritas en su totalidad y aparecen como anexos de la tesis de doctorado Del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico. Ahí también (cf. Capítulo 4, Hoyos, 1996) puede acudirse para obtener más detalles acerca de la metodología relacionada con tales sesiones, su interpretación y análisis.

Algunos de los resultados obtenidos

Entre los resultados de la investigación llevada a cabo con los tres estudios de caso, aquí resaltaremos el papel de las distintas asignaciones de sentido manifestadas por los estudiantes con respecto a las ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el tránsito hacia la producción de la ecuación de una recta dada a partir de su imágen gráfica.

La significación sigue ciertos parámetros

Así, en aras de reconocer la situación inicial planteada en el texto del problema a resolver (recuérdese que este es ***es "Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (6,2), y es tangente a la recta 2x + y = 16 en el punto (8,0)"),*** el trabajo con la estudiante de estrato bajo, LN, toma una vía centrada en el reconocimiento de las operaciones a realizar indicadas por la ecuación lineal dada.

Por otro lado, de inicio los dos casos de estrato alto, EP y PB, pasan la ecuación dada a una forma normal. Sin embargo, en el caso de EP, éste no efectúa correctamente el despeje necesario para ello, y, no obstante, pasa inmediatamente a tabular utilizando la forma normal por él obtenida, demostrando con ello no tener una forma de control en torno de sus ejecuciones.

En el caso de PB, éste también despeja de entrada la ecuación dada, obteniendo, correctamente, $y = 16 - 2x$. Sin embargo, dicha acción no parece serle significativa, pues no sabe cómo continuar hasta que reconoce que la ecuación original dada está denotando posibles operaciones a realizar con números específicos:

B.5 PB: Tienes dos equis mas ye igual a dieciséis (PB escribe 2x + y = 16 en una hoja aparte) ... Y, pues despejas... ye.... A ver, si despejas ye qué onda...(PB escribe y = 16 - 2x)... Mm, no. Y ahora qué hago. Mm, sí aquí (PB señala ahora la ecuación 2x + y = 16) Lo que iba a decir para darle valores a la x ... Lo que estabamos haciendo la otra vez ...

B.10 PB: En la última clase. Aaaa sí, es que, bueno me acuerdo vagamente; creo que se le daban valores a la equis... pero por qué, a ver, si le doy un valor a la equis, dos, va a ser cuatro mas, mas ye igual a dieciséis... entonces va a ser dieciséis menos cuatro, o sea, ye vale doce (PB va señalando en la ecuación 2x + y = 16 , posteriormente en y = 16 - 2x, y luego escribe y = 12)

Sentido procedimental-operativo a objetos algebraicos básicos

En el camino de la significación convencional de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, destaca entonces la prevalencia de la significación conferida a los procedimientos algebraicos básicos por sobre un rol puramente sintáctico.

Es decir que entre los resultados más importantes de la observación empírica realizada se encuentra el de que los estudiantes le daban a las ecuaciones del tipo $ax+by=c$, con a,b,c distintos de cero, un sentido procedimental-operativo, el cual les permitía ejercer un control sobre sus propias acciones para arribar con éxito a una tarea de graficación o de contrucción de la gráfica de la ecuación en cuestión (ver más arriba el problema que planteamos a los estudiantes).

Lo que pudimos observar fue que los estudiantes que realizaron con éxito la tarea de graficación, sustituían el valor dado a una de las incógnitas en la ecuación del tipo $ax+by=c$, con a,b,c distintos de cero, y no en la ecuación normal previamente obtenida.

De tal hecho, nosotros hemos derivado una hipótesis de control de las acciones de cálculo que se obtiene al elegir ralizar dichos cálculos en esta ecuación y no en la normal asociada a ella.

Ello tal vez sea debido a que en la distribución de signos algebraicos, dada por la ecuación de tipo $ax + by = c$, queda manifiesta una sujección de la variación a un valor fijo en cada momento; por contraposición a lo que pudiera estarse percibiendo en la cadena sígnica del tipo de la normal, $y= ax+b$, en donde lo que se manifiesta es una identidad entre variables.

En particular, en tal identidad entre variables el estudiante no parece percibir ninguna restricción para la variación o cambios numéricos de las variables x y y.

Tal identidad, la del tipo $y= ax+b$, pareciera estar sujeta (en los estudiantes) a la dependencia entre las variables, la cual, tal vez estarían demostrando nuestras observaciones, debe tener como sustrato base la adquisición procedimental operativa que arriba acabamos de mencionar.