PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

**MÓDULO 7**

# ÁLGEBRA

# Lectura y construcción de gráficas cartesianas

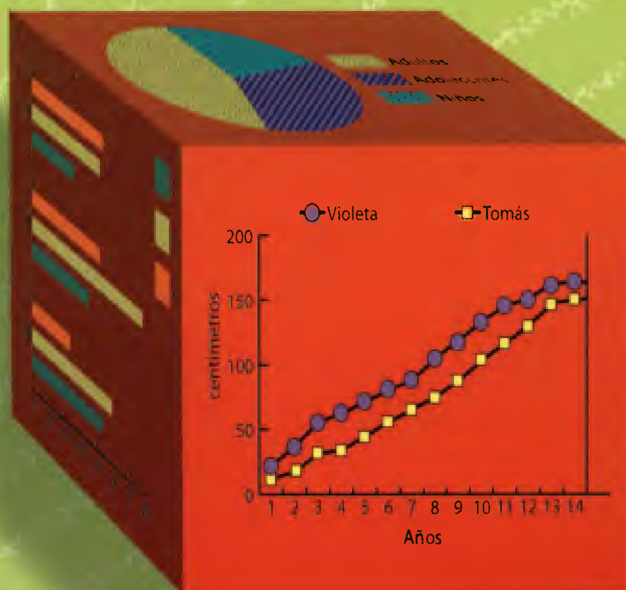

**Propuesta didáctica**

*Tenoch E. Cedillo Ávalos*, UPN
*Valentín Cruz Oliva*, ILCE
*Enrique Vega Ramírez*, UPN
*Rodrigo Cambray Núñez*, UPN

**Consultores externos**

*Alejandro Díaz Barriga Casales*
Instituto de Matemáticas, UNAM

*Carolyn Kieran*
Universidad de Quebec
en Montreal, Canada



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

ILCE

BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

# MÓDULO 7

## ÁLGEBRA

## Lectura y construcción de gráficas cartesianas


Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

*Alejandro Díaz Barriga Casales*
Instituto de Matemáticas, UNAM

*Carolyn Kieran*
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Álgebra

**Módulo 7: Lectura y construcción de gráficas cartesianas**

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.



ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-179-9 módulo 7

Impreso y hecho en México

# ÍNDICE

# PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

*Tenoch Cedillo Ávalos*

## Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

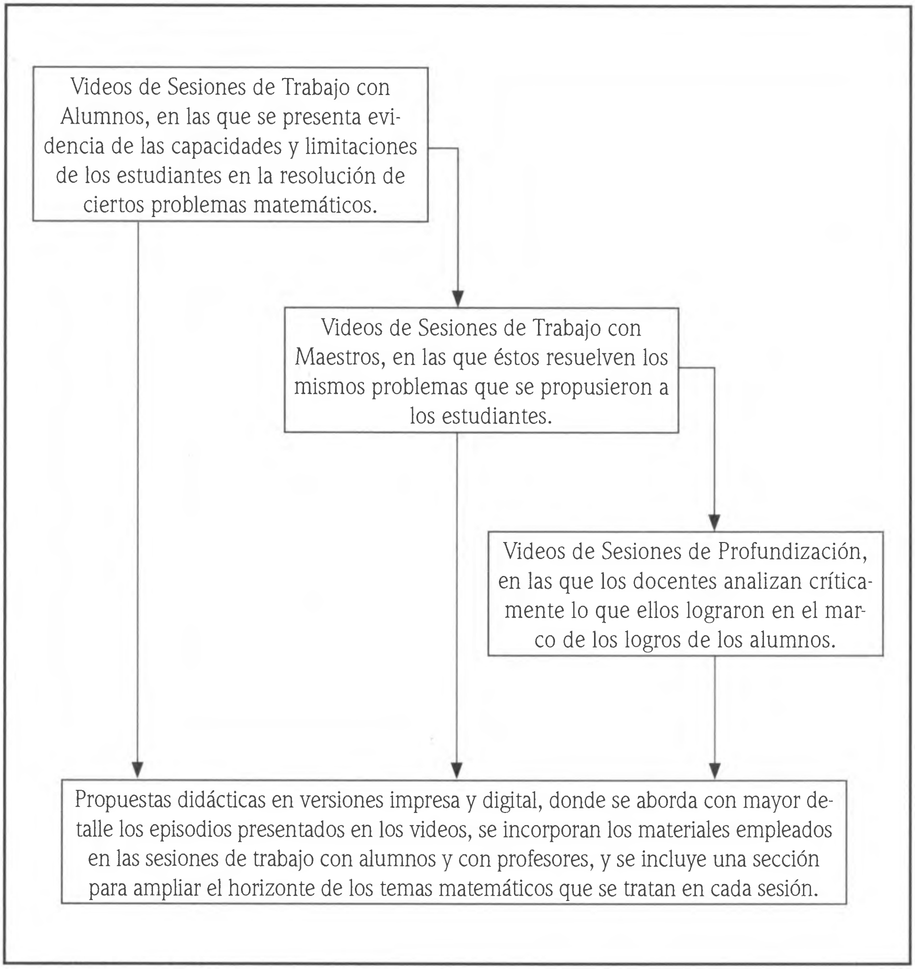
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

## Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



## Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

## El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

## Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

| Aritmética | Álgebra | Geometría |
|---|---|---|
| Múltiplos y divisores | Patrones numéricos y generalización | Medición y semejanza de triángulos |
| Máximo común divisor | Juegos y regularidades algebraicas | Medición y razones trigonométricas |
| Mínimo común múltiplo | Ecuaciones de primer grado | Áreas y teorema de Pitágoras |
| | Lectura y construcción de gráficas cartesianas | |

## Organización y presentación de los contenidos

### Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo*. Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización*. La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización*.

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

## PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

### *Presentación y objetivos del tema*

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

### *Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos*

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

### *Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros*

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

### *Lo que aprendieron los alumnos*

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

### *Recomendaciones para la enseñanza*

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

### *Ampliación del tema*

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

## El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*,1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

## El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

## El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

## El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

## Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

## BIBLIOGRAFÍA


Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education*, 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

# INTRODUCCIÓN

En torno al tema de funciones existe una serie de contenidos matemáticos que deben ser considerados en el momento de su enseñanza, como los conceptos de variable, dominio e imagen, el uso de sus distintas representaciones mediante expresiones algebraicas, tablas y gráficas. Streun (2000) reporta que cuando un programa escolar orienta en forma sistemática el estudio de funciones hacia el establecimiento de conexiones entre las diferentes representaciones de una función, se conduce a los alumnos a una abstracción del concepto de función. En este sentido, es posible considerar que en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, el uso de las representaciones (algebraica, tabular y gráfica) y sus relaciones es crucial. Lloyd y Wilson (1998) mencionan que parte del conocimiento del concepto de función se puede deber en gran medida a las representaciones que se tienen acerca de dicho concepto. Las representaciones se construyen a partir de las experiencias que permiten evocar algún dibujo, diagrama, símbolo o acción, relacionados con dicho contenido. Aun cuando una representación no es el objeto matemático mismo, sí se espera que de alguna manera contenga rasgos que se ajusten a él.

La enseñanza de funciones debiera, entonces, proveer a los alumnos de múltiples experiencias con diferentes formas para abordarlas que les ayuden a generar representaciones de dicho concepto. Hay dos ideas que permiten sugerir hacia dónde orientar la enseñanza de funciones: promover el uso de representaciones del objeto matemático y la identificación de relaciones entre las distintas representaciones. Lo anterior coincide con la teoría de Kaput (1989, citado en Lloyd y Wilson, 1998) acerca de que el uso de varias representaciones del concepto de función es considerado como un potente recurso, pero lo es más aún si el individuo es capaz de relacionarlas y construir una nueva representación a partir de otra. De acuerdo con Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), una representación incluye implícitamente dos actividades: la construcción y la interpretación. La construcción implica el uso de ciertas reglas que permiten, por ejemplo, la elaboración de tablas, gráficas o ecuaciones, y la interpretación consiste en hacer una serie de inferencias y predicciones a partir de una representación que se tiene a la vista o en mente.

Cada representación tiene sus propias reglas de construcción y criterios de interpretación. La construcción de una tabla a partir de una ecuación implica, entre otras cosas, la evaluación de dicha expresión para diferentes valores; la interpretación de una gráfica puede realizarse en forma global o local, dependiendo del tipo de interpretación que se requiera.

Las actividades de construcción e interpretación de representaciones están relacionadas; es difícil pensar en hacer una construcción sin cierta interpretación y viceversa. Estas relaciones que las conectan resultan de importancia porque son justo las que permiten realizar traducciones entre ellas. De acuerdo con Janvier (1987), un proceso de traducción (también conocido como conversión) es el proceso psicológico involucrado en ir de un modo de representación a otro; por ejemplo, en el caso de las representaciones tabular, algebraica y gráfica: tabla↔gráfica, tabla↔expresión, gráfica↔expresión (el doble sentido en la flecha indica la traducción en ambos sentidos; véase la figura 1).

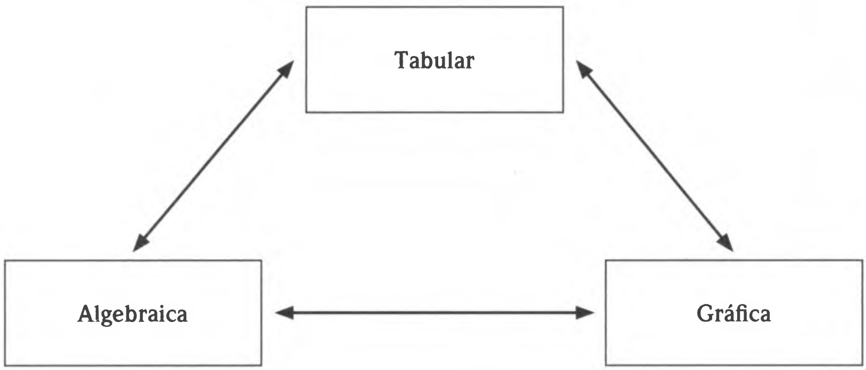



*Figura 1*

Los procesos para llevar a cabo traducciones entre representaciones son diversos; por ejemplo, para la traducción tabla→expresión, Janvier (1987) sugiere que el proceso común es el de ajustar una expresión algebraica a los valores que se tienen en una tabla. Sin embargo, estos procesos de traducción no son tan inmediatos de dominar. Ruthven (1992) afirma que los alumnos encuentran dificultades para entender las relaciones –y para traducir en ambas direcciones– entre las diferentes representaciones; esta dificultad se deriva del hecho de que se utilizan distintos sistemas simbólicos dentro de cada representación y se requiere cierto dominio de cada sistema para relacionarlo con los de otras representaciones.

En el módulo **Lectura y construcción de gráficas cartesianas** se aborda la enseñanza de funciones a través de las representaciones tabular, algebraica y gráfica, de tal modo que los alumnos efectúen actividades de interpretación y construcción, además de establecer relaciones entre dichas representaciones que les permitan efectuar las conversiones mostradas en la figura 1.

Las actividades que se proponen a los alumnos inician con la presentación de gráficas que representan diversas situaciones cotidianas; a partir de dichas gráficas se pide a los alumnos que efectúen una serie de interpretaciones que les permitan responder a diversas preguntas. La primera situación consiste en la historia del crecimiento de dos niños (Julieta y Tomás); la segunda es acerca de la distancia que recorre un automóvil, y la tercera situación es acerca del rendimiento de combustible de tres tipos de vehículos en la que, incluso, se solicita la construcción de tablas y expresiones generadas a partir de una gráfica.

# LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS CARTESIANAS

## Objetivos

Que el alumno:

- Interprete y construya gráficas, tablas y expresiones de diversas situaciones.
- Genere diversas representaciones a partir de otras.

## Planeación de las actividades con los alumnos

### Primera sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos

*Inicio (2 min).* El maestro saluda al grupo y explica la dinámica de la clase.

*Cápsula de video (7 min).* Proyección de un video que presenta una situación relacionada con el crecimiento de dos personas (Video: Julieta y Tomás).

*Lectura e interpretación de las gráficas mostradas en el video (7 min).* El maestro hace preguntas al grupo relacionadas con las gráficas que representan la situación mostrada en el video (Gráficas de edad/estatura de Tomás y Julieta y una *Hoja de trabajo*).

*Lectura e interpretación de una gráfica (3 min).* El maestro hace preguntas al grupo relacionadas con una nueva gráfica que corresponde al crecimiento de Raúl (Gráficas de Tomás, Julieta y Raúl y una *Hoja de trabajo*).

*Lectura e interpretación de una gráfica (6 min).* El maestro muestra una nueva gráfica que representa la distancia que recorre un automóvil con respecto al tiempo y hace preguntas a los alumnos (Gráfica del automóvil).

*Trabajo en equipo (15 min).* Los alumnos responden a preguntas relacionadas con la gráfica mostrada (*Hojas de trabajo*).

*Exposición del trabajo realizado (10 min).* Después de un tiempo se exponen y confrontan las respuestas (Gráficas, pizarrón y marcadores).

**Segunda sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos**

*Revisión de la sesión de trabajo anterior (3 min).* El maestro comenta con los alumnos acerca de lo realizado en la clase anterior.

*Lectura e interpretación de gráficas (4 min).* El maestro muestra varias gráficas relacionadas con el rendimiento de combustible de diferentes vehículos (Gráficas de rendimiento de combustible).

*Trabajo en equipo (8 min).* Los alumnos responden una serie de preguntas relacionadas con las graficas mostradas (*Hoja de trabajo*).

*Exposición del trabajo realizado (8 min).* Después de un tiempo se exponen y confrontan las respuestas (Gráficas, pizarrón y marcadores).

*Trabajo en equipo (15 min).* Los alumnos completan una tabla y construyen expresiones relacionadas con las gráficas mostradas (*Hoja de trabajo*).

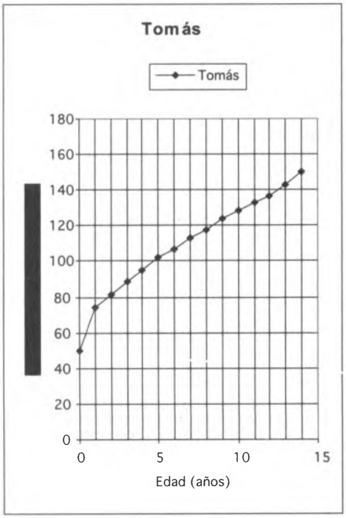
*Exposición del trabajo realizado (12 min).* Después de un tiempo se exponen y confrontan las respuestas (Gráfica, tabla, pizarrón y marcadores).

## Descripción de las actividades

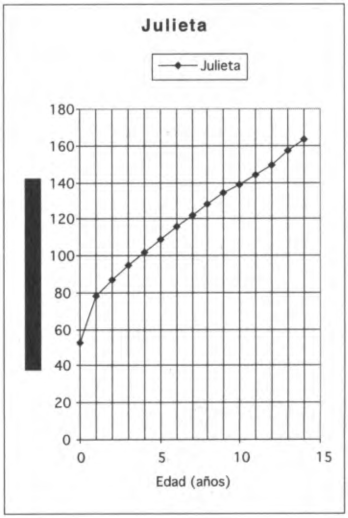
### Primera sesión

#### *Cápsula de video*

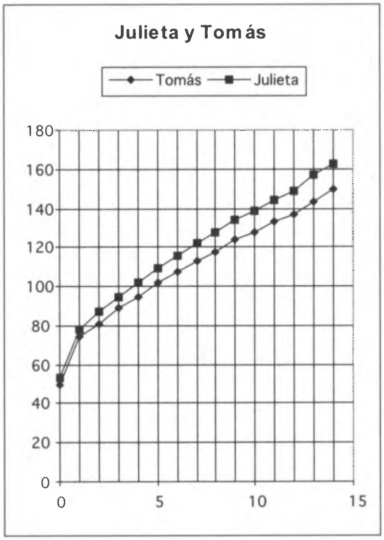
Los alumnos observan en un video la historia de Tomás, un niño que está muy interesado en su crecimiento debido a su enamoramiento por Julieta, una niña más alta que él. Al final del video se proyectan las gráficas de crecimiento de Julieta y Tomás (gráficas 1, 2 y 3).




*Gráfica 1*




*Gráfica 2*




*Gráfica 3*

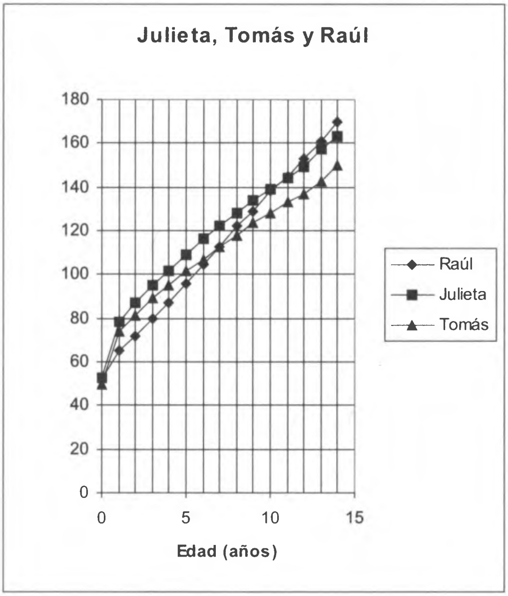
### *Lectura e interpretación de las gráficas mostradas en el video*

Los alumnos hacen interpretaciones de las gráficas, a partir de las siguientes preguntas contenidas en una hoja de trabajo:

1. ¿Qué estatura tenían Julieta y Tomás a los 6 años?
2. ¿Cuánto creció Julieta de los 7 a los 10.5 años?
3. ¿Cuánto creció Tomás de los 3 a los 8 años?
4. ¿Cuántos centímetros era más alto Tomás que Julieta cuando tenían 12 años?

### *Lectura e interpretación de una nueva gráfica*

El maestro muestra una nueva lámina en la que se incluyen las gráficas de Tomás y Julieta y se agrega la de Raúl (gráfica 4).



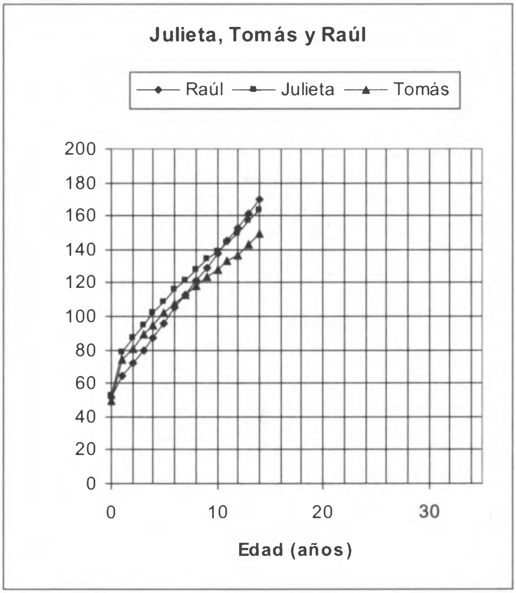

*Gráfica 4*

Los alumnos hacen interpretaciones de estas nuevas gráficas a partir de las siguientes preguntas:

**5.** ¿En qué periodo Raúl tenía menor estatura que Julieta y Tomás?
**6.** ¿En qué periodo Raúl era mayor que Tomás y menor que Julieta?
**7.** ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Julieta?
**8.** ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Tomás?
**9.** ¿Quién creció más en el periodo de los 11 a los 14 años: Julieta, Tomás o Raúl? ¿Quién creció menos?

El maestro pide a los alumnos que realicen el ejercicio del inciso 10) de la *Hoja de trabajo* en las gráficas que se muestran en la gráfica 5.

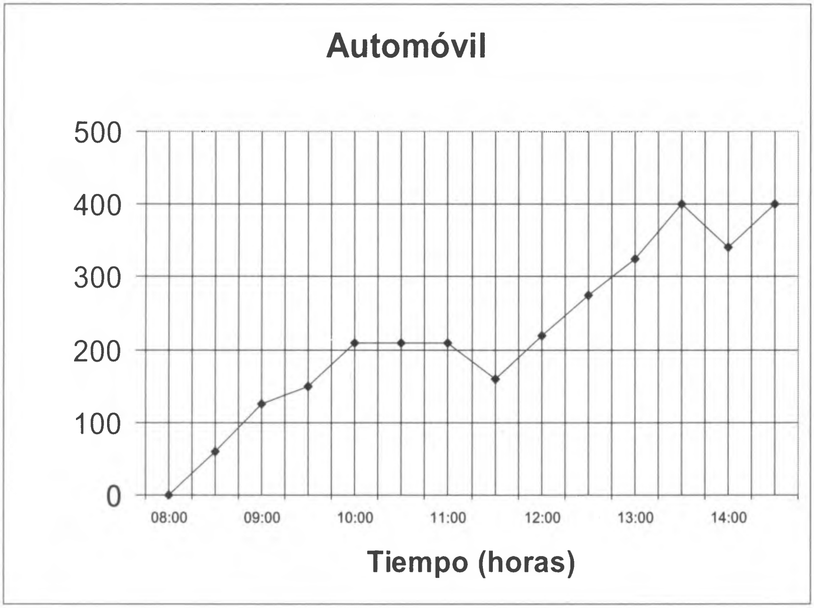
**10.** Dibuja la gráfica de crecimiento de Julieta, Tomás y Raúl hasta que cumplan 30 años.




*Gráfica 5*

### *Lectura e interpretación de una gráfica*

El maestro presenta una nueva gráfica relacionada con la distancia a la que se encuentra un automóvil con respecto de su punto de partida (gráfica 6), y pide a los alumnos expresen sus primeros comentarios relacionados con la gráfica.




*Gráfica 6*

### *Trabajo en equipo*

El maestro entrega a los alumnos una *Hoja de trabajo* que incluye preguntas relacionadas con la gráfica mostrada y les da tiempo para que las respondan. La gráfica muestra los datos del movimiento de un automóvil entre las 8:00 y las 14:30 horas.

**1.** ¿Cuántos kilómetros recorrió el automóvil de las 8:00 a las 10:00 horas?
**2.** ¿Cuántos entre las 10:00 y las 11:00?

3. ¿Cuántos entre las 11:00 y las 14:00 horas?
4. ¿En qué momento retrocedió el automóvil?
5. ¿Cuántos kilómetros retrocedió?
6. ¿A cuántos kilómetros por hora viajó en promedio el automóvil entre las 13:00 y las 14:30 horas?
7. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanzó durante todo el recorrido?
8. ¿En qué intervalo alcanzó esa velocidad?
9. ¿En qué intervalo viajó más despacio el automóvil?
10. ¿A qué velocidad viajó durante ese tiempo?

### *Exposición del trabajo realizado*

Después de un tiempo, los alumnos exponen sus respuestas y las confrontan con las de sus demás compañeros.

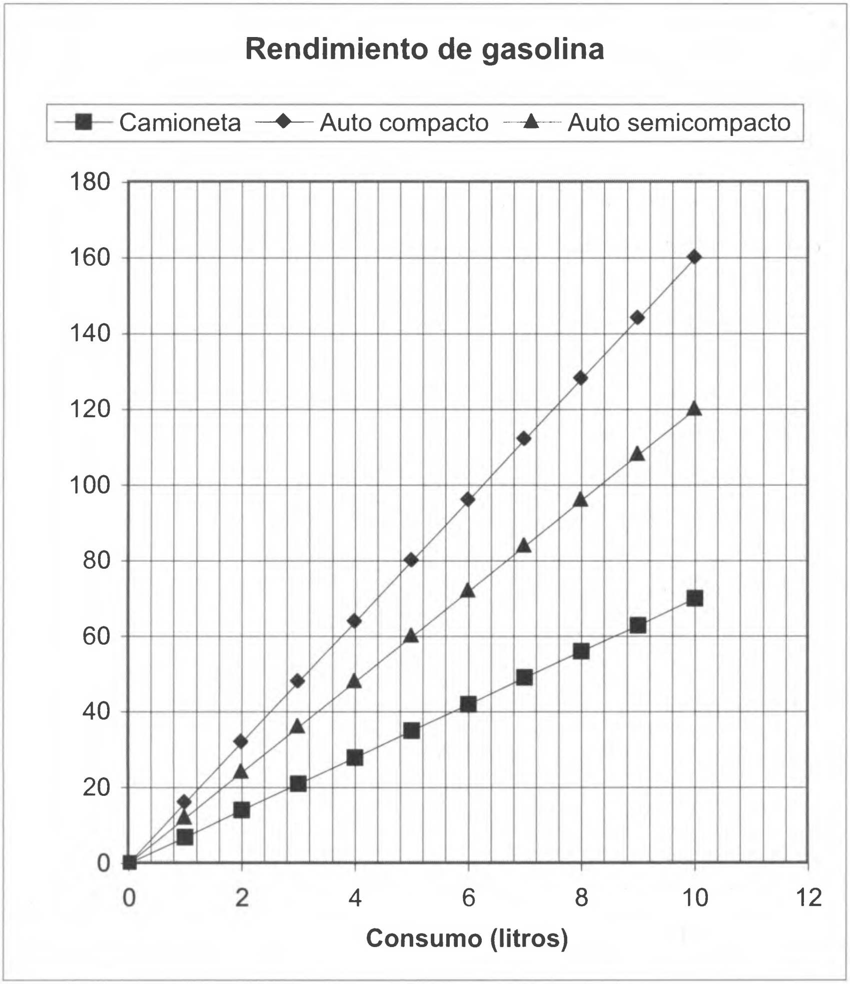
## Segunda sesión

### *Revisión de la sesión de trabajo anterior*

El maestro inicia la clase preguntando a los alumnos acerca de lo realizado en la primera sesión de trabajo.

### *Lectura e interpretación de gráficas*

En seguida, el maestro muestra a los alumnos las gráficas de tres diferentes tipos de automóviles que representan el rendimiento de combustible (gráfica 7).




*Gráfica 7*

El maestro pide a los alumnos que respondan a una primera pregunta, incluida en una *Hoja de trabajo* previamente entregada a los alumnos.

**1.** ¿Qué información puedes obtener?

### *Trabajo en equipo*

Una vez que los alumnos tienen una primera interpretación de la gráfica, responden a las siguientes tres preguntas de la *Hoja de trabajo*:

2. ¿Cuál de los tres automóviles tiene mayor rendimiento de combustible? ¿Cuál tiene menor rendimiento?
3. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 4.5 litros?
4. ¿Cuánto combustible consume cada vehículo si su rendimiento es de 87 kilómetros?

### *Exposición del trabajo realizado*

Los alumnos comentan al grupo sus respuestas y comparan unas con otras; para ello se auxilian de las gráficas en los casos necesarios.

### *Trabajo en equipo*

Los alumnos resuelven los dos últimos incisos de la *Hoja de trabajo* en los que deben completar una tabla (tabla 1), escribir expresiones algebraicas relacionadas con el rendimiento de combustible de cada automóvil y construir una gráfica. Los incisos son los siguientes.

5. Completa la siguiente tabla.

*Tabla 1*

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| 11 | | | |
| 18.5 | | | |
| | | 400 | |
| | | | 366 |
| | 297.5 | | |
| $m$ | | | |
| | | $N$ | |
| | $q$ | | |

6. Si se requiere que por 9 litros de consumo de combustible la camioneta tenga un rendimiento de 76.5 km, ¿cuál será la gráfica y la fórmula para este caso?

### *Exposición del trabajo realizado*

Los alumnos comparten sus respuestas y las confrontan con las de sus demás compañeros junto con el maestro.

## Lo que hicieron los alumnos

### Respuestas esperadas

### *Primera sesión*

Al inicio de esta sesión, el maestro preguntó a los alumnos acerca de la información que podrían obtener de las gráficas de Tomás y Julieta (gráficas 1, 2 y 3), algunas de las respuestas fueron: "una gráfica para conocer cómo fue el crecimiento del niño (Tomás)", "también la niña (Julieta) creció".

La planeación original pretendía que los alumnos respondieran en equipo las preguntas de la *Hoja de trabajo* entregada, sin embargo, gracias a que los alumnos tuvieron una amplia participación al inicio, el maestro fue abordando las preguntas con todo el grupo. Algunas de las participaciones fueron las siguientes:

> "En los periodos de 0-5 años hay más puntos de crecimiento".
> "No tiene que ver el número de puntos, sino la distancia que ocupan".
> "De 68 a 80 (centímetros), aquí son más puntos".
> "De 69 a 84 (centímetros) es equivalente a un menor número de puntos".
> "Hay un periodo en que ella (Julieta) crece un poco más y luego Tomás un poco más".

"Se nota que fue para arriba muy rápido (el crecimiento) en el primer año y los demás años ya no es tan precipitado".

"Tomás era más alto que Raúl".

Después de la participación inicial de los alumnos, el maestro les dio tiempo para que dibujaran la gráfica de crecimiento de Julieta, Tomás y Raúl hasta los 30 años. Un alumno pasó al frente del grupo para dibujar la gráfica tal como lo había hecho en su *Hoja de trabajo,* y fue posible observar que el bosquejo de las gráficas no consideraba un continuo crecimiento, sino, al contrario, conforme pasaban los años la estatura de Julieta, Tomás y Raúl se hacía constante.

La siguiente actividad de la sesión consistió en hacer interpretaciones relacionadas con una gráfica que representaba la distancia de un automóvil de su punto de partida (gráfica 6).

La primera pregunta que se hizo a los alumnos fue: ¿Qué información pueden obtener de la gráfica? Una respuesta fue: "La distancia que recorrió (refiriéndose al automóvil) y el tiempo". En seguida se determinó la velocidad promedio para algunos intervalos de tiempo:

"La velocidad (promedio) vendría siendo lo que es de 8:00 a 9:00 (una hora) sobre la distancia, los kilómetros por hora".

"De 8:00 a 9:00 (la velocidad promedio es de) 125 km por hora".

"De 12:00 a 13:00 (la velocidad promedio es de) 105 km por hora".

"De la 13:30 a 14:00 (la velocidad promedio es de) 75 km por media hora (si mantuviera la misma velocidad promedio en una hora, la velocidad promedio sería de 150 km por hora)".

Una vez que los alumnos hicieron las interpretaciones anteriores, determinaron la distancia que recorrió el automóvil en diferentes intervalos de tiempo (a partir de la gráfica 6):

"De las 8:00 a las 10:00 el automóvil recorrió 210 kilómetros".

"De las 10:00 a las 11:00 se quedó parado".

Sin embargo, para el intervalo de las 11:00 a las 14:00 los alumnos debieron poner más atención, algunas respuestas iniciales fueron:

"De las 11:00 a las 14:00 como 120 km más o menos", "como 280 km", "como 273 kilómetros".

Un alumno, después de haber escuchado estas respuestas, comentó acerca del intervalo de las 11:00 a las 14:00 h: "Se notan unos retrocesos, pero esos retrocesos también se cuentan porque si vamos en el automóvil, el kilometraje, así nos demos la vuelta en "u" y regresemos, sigue contando, entonces, sigue aumentando". Entonces, comenzó a determinar la distancia recorrida, por cada media hora, en este intervalo de tiempo:

De las 11:00 a las 11:30 el automóvil recorrió 65 kilómetros.
De las 11:30 a las 12:00 el automóvil recorrió 55 kilómetros.
De las 12:00 a las 12:30 el automóvil recorrió 50 kilómetros.
De las 12:30 a las 13:00 el automóvil recorrió 50 kilómetros.
De las 13:00 a las 13:30 el automóvil recorrió 125 kilómetros.
De las 13:30 a las 14:00 el automóvil recorrió 110 kilómetros.
La distancia total recorrida fue de 455 kilómetros.

La pregunta final de la sesión de trabajo fue: ¿En qué periodo fue más lento el automóvil? Un alumno respondió que de 9:00 a 9:30 h, y otro agregó, para justificar la respuesta: "Porque no se nota tanto el declive de la línea, no está tan precipitada".

## Segunda sesión

La segunda sesión de trabajo inició con la presentación de gráficas del rendimiento de combustible de tres diferentes automóviles: un auto compacto, un semicompacto y una camioneta (gráfica 7). El maestro preguntó acerca de las gráficas; las preguntas y algunas de las respuestas fueron las siguientes.

*¿A quién le pueden ser útiles estas gráficas?* "A los compradores", "a los que viajan mucho", "a la PROFECO (Procuraduría Federal del Consumidor)", "a los propios automovilistas".

*¿Qué pueden decir de estas gráficas?* "La camioneta ocupa más litros de gasolina", "hay diferente rendimiento", "la cantidad de litros que gasta cierto tipo de auto para recorrer cierta distancia".

*¿Por 10 litros cuánto le rinde el combustible a un auto semicompacto?* 120 km. *Y, ¿por 4.5 litros cuál es el rendimiento de cada auto?* 80, 60, 40, 30 *km,* aproximadamente.

*Si recorrieron 87 km, ¿cuánto combustible requirió cada automóvil?* 5 litros el auto compacto, 7 el semicompacto y como 12 la camioneta.

Una vez que los alumnos respondieron las preguntas anteriores procedieron a completar la tabla 1. Para completar el tercer renglón, en el cual está registrado un rendimiento de 400 km para un auto semicompacto, un alumno leyó la gráfica 7 y comentó: "cada 100 km gastan 9 litros de gasolina (refiriéndose al auto semicompacto), entonces, son 36 litros por 400 km". Así que con esto podía determinar el total de litros que producen el rendimiento de 400 km. Otro alumno obtuvo otro valor de la lectura de la gráfica, para el auto semicompacto, y mencionó que dicho auto recorrió los 100 km con 8.5 litros de combustible.

El maestro preguntó entonces a los alumnos: *¿Cuántos kilómetros rinde un litro de combustible?* Dos respuestas fueron las siguientes.

| Automóvil | Primera respuesta (km/l) | Segunda respuesta (km/l) |
|---|---|---|
| Camioneta | 7 | 8 |
| Semicompacto | 12 | 12 |
| Compacto | 16 | 17 |

Con el rendimiento por litro y utilizando la segunda respuesta fue posible completar el primer renglón de la tabla 1 (cuando el consumo de combustible fue de 11 litros). Las operaciones fueron: $11 \times 8 = 88$ km (camioneta); $12 \times 11 = 132$ km (semicompacto); $17 \times 11 = 187$ km (compacto).

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| 11 | 88 | 132 | 187 |

Otro alumno comentó que él había utilizado una regla de tres, para ello, debió considerar que por cada 10 litros la camioneta rendía 70 km, el auto semicompacto 120 km y el auto compacto 160 km. Entonces escribió lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} 10\ l & 70 \text{ km} \\ 11\ l & x \text{ km} \end{array}$$

Operaciones: $70 \times 11 = 77.0$ (la división entre 10 la omitió y sólo agregó el punto decimal).

| | |
|---|---|
| 10 $l$ | 120 km |
| 11 $l$ | $x$ km |

Operaciones: 120 × 11 = 132.0 (la división entre 10 la omitió y sólo agregó el punto decimal).

| | |
|---|---|
| 10 $l$ | 160 km |
| 11 $l$ | $x$ km |

Operaciones: 160 × 11 = 176.0 (la división entre 10 la omitió y sólo agregó el punto decimal).

A pesar de que se hacía la lectura en las mismas gráficas, hubo diferencias, aunque no muy grandes; por lo cual el maestro preguntó al grupo: ¿Qué pasa al leer la gráfica? Algunos alumnos respondieron:

"No siempre es exacto".
"Cada quien dice lo que ve a su criterio".
"Depende de la persona que lo ve".
"Sigue su rendimiento en litros hacia arriba".
"Su rendimiento sigue siendo parejo".
"La constante de la camioneta es de 15 c/2 litros".
"Rinde aproximadamente 15 litros".
"El auto semicompacto rinde 12 km/l".
"Yo calculé la de 11 y dividí entre 11".

Un alumno comentó: "Éstas sí son exactas, las de 10 litros (en la gráfica)", y entonces escribió:

La camioneta por 10 litros rinde 70 km.
El auto semicompacto por 10 litros rinde 120 km.
El auto compacto 10 por litros rinde 160 km.

Así que una vez que leyó estos datos de las gráficas, dijo: "Se puede sacar lo de un litro".

Camioneta 7 km/l.
Semicompacto 12 km/l.
Compacto 16 km/l.

Y escribió la siguiente fórmula para calcular el rendimiento por litro a partir de un cierto rendimiento conocido:

$$\frac{\textit{rendimiento en kilómetros}}{\textit{litros}} = \textit{lo que rinde por un kilómetro}.$$

Conociendo el rendimiento por litro de los tres tipos de automóviles fue posible completar otras casillas de la tabla 1. Por ejemplo, para el renglón 2 en el que se proporciona el dato de 18.5 litros de consumo, fue suficiente con efectuar el producto de $18.5 \times 7$ para determinar el rendimiento de la camioneta, 129.5 kilómetros.

El primer renglón de la tabla 1 quedó como sigue:

| **Consumo (litros)** | **Rendimiento (km)** | | |
|---|---|---|---|
| | **Camioneta** | **Auto semicompacto** | **Auto compacto** |
| 11 | 77 | 132 | 176 |

El maestro entonces preguntó a los alumnos por el sexto renglón de la tabla 1, en donde se proporciona como dato que el consumo de combustible es de $m$ litros. Algunas respuestas fueron: "¿no sería $m\times 7$, $m\times 12$, $m\times 16$?"; "la $m$ sería cualquier número"; "sería como una incógnita, entonces sí está bien"; "la $m$ te indica la fórmula, no te indica un número preciso". El sexto renglón quedó completado como se muestra a continuación.

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| $m$ | $m\times7$ | $m\times12$ | $m\times16$ |

En cuanto al séptimo renglón de la tabla 1 los alumnos expresaron los siguientes comentarios: "la $n$ yo creo que al auto compacto y la camioneta tendría también que ser $n$"; "no, tendría que ser diferente porque nosotros sabemos que los números entre camioneta, semicompacto y compacto son diferentes; entonces, no puede ser la misma letra, tendrías que poner otra letra".

La respuesta final fue: "sería $n\div12$ (en la celda que corresponde al consumo); para la celda de la camioneta $n\div12\times7$; y para el auto compacto $n\div12\times16$".

El séptimo renglón de la tabla 1 quedó como se muestra a continuación:

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| $\frac{n}{12}$ | $\frac{n}{12}\times7$ | $n$ | $\frac{n}{12}\times16$ |

## Respuestas no esperadas

A partir de la lectura e interpretación de las gráficas, los alumnos identificaron diferentes constantes de crecimiento en las gráficas; por ejemplo, con respecto a las gráficas 1, 2 y 3 comentaron:

> "La distancia que Julieta le lleva a Tomás no fue siempre proporcional".
> "Si los pasamos a una tabla (los datos de la gráfica) no es proporcional".

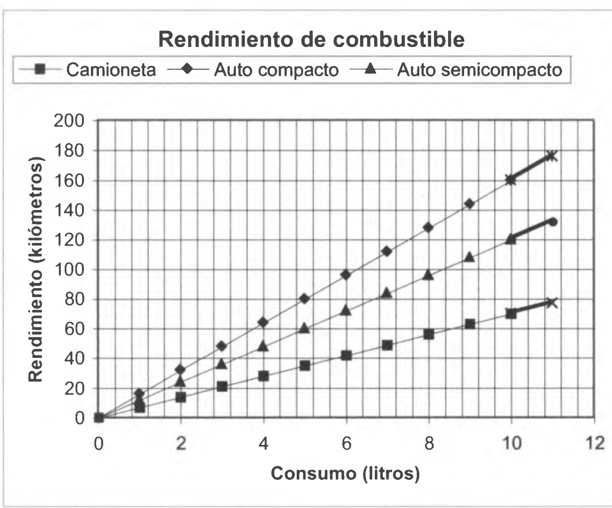
Esto hace referencia a que cada una de las gráficas, de Tomás y Julieta, tenían diferentes constantes de crecimiento (distintas pendientes); esto se debe a que las gráficas están conformadas por "pedazos" de rectas, así que, aun cuando las gráficas son crecientes no siempre lo hacen bajo la misma constante.

Esta interpretación de las gráficas no estaba contemplada como una posible respuesta de los alumnos, los cuales no se limitaron sólo a realizar una lectura de los puntos de las gráficas.

Durante la segunda sesión de trabajo, los alumnos volvieron a reconocer esta característica del crecimiento en las gráficas mostradas en la gráfica 7, con la diferencia de que en estos casos cada gráfica está constituida por una sola recta, una respuesta que ilustra esto es la siguiente:

> "La ruta de cada consumo es constante… se podría seguir alargando esta línea a modo de que llegue a los 11 (litros de combustible). Lo que da el alargamiento se podría tomar como el rendimiento en kilómetros".

El comentario hace referencia a prolongar cada una de las gráficas de la gráfica 7 (las rectas) hasta que la abscisa corresponda a 11 litros y, entonces, sea posible leer la ordenada correspondiente (el rendimiento), como se ilustra en la gráfica 8.




*Gráfica 8*

La confianza que tiene el alumno de que estas gráficas crecen bajo una constante de proporcionalidad (la pendiente de la recta), le permite proponer la estrategia descrita. Resultó muy interesante observar cómo los alumnos reconocieron en las gráficas de rectas esta propiedad en relación con su crecimiento, aun cuando no se esperaba.

## Dificultades

La principal actividad de las dos sesiones de trabajo fue la lectura e interpretación de gráficas. En general, los alumnos fueron capaces de hacer una buena lectura e interpretación de las gráficas; sin embargo, hubo algunas dificultades y confusiones que fueron superadas en su momento, las cuales se mencionan a continuación.

Con respecto a la gráfica 6, los alumnos tuvieron dificultades para interpretar la gráfica en los intervalos de tiempo en los que el automóvil estaba detenido o retrocedía (con respecto al punto de partida). En el primer caso, cuando el vehículo estaba detenido creían que éste se estaba moviendo a una velocidad constante; dicha interpretación se debió a que pensaban que en la gráfica estaba representada la velocidad del vehículo y no su distancia con respecto a otro punto. En el segundo caso, cuando la gráfica mostraba un retroceso del vehículo, los alumnos interpretaban que el automóvil viajaba más lento. En ambos casos, las confusiones sirvieron para precisar qué es lo que en realidad estaba representándose en la gráfica: la distancia a la que se encontraba el vehículo del punto de partida en diferentes horarios.

En la lectura de la gráfica 7 hubo dificultades debido a las escalas utilizadas en la gráfica; esto provocó que los alumnos tuvieran que aproximar los valores de sus lecturas obteniendo así cantidades distintas, aunque cercanas. Esta situación fue superada con la lectura de valores que tenían mejor posibilidad de ser leídos, con la escala utilizada en las gráficas, como fue el caso del rendimiento de cada vehículo con 10 litros de combustible.

Por último, fue interesante observar cómo los alumnos entraron en un intercambio de opiniones para construir las expresiones algebraicas que permitían completar los renglones 6 y 7 de la tabla 1. Aun cuando fue necesario dedicar más tiempo del planeado al inicio para estas actividades, las diferentes participaciones de los alumnos ayudaron a generar las expresiones finales. La principal dificultad consistió en asignar un significado a las letras utilizadas; el trabajo aritmético era bastante claro, sin embargo, la escritura de una expresión que generalizara los diferentes casos no fue inmediata. Al final los mismos alumnos generaron expresiones algebraicas correctas, las cuales se muestran a continuación.

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| $m$ | $m\times 7$ | $m\times 12$ | $m\times 16$ |
| $\frac{n}{12}$ | $\frac{n}{12}\times 7$ | $n$ | $\frac{n}{12}\times 16$ |

## Planeación de las actividades con los maestros

### Actividades, tiempo, descripción y recursos

*Cápsula de video (7 min).* Los maestros observan un video que presenta una situación relacionada con el crecimiento de dos personas (Video de Julieta y Tomás).

*Lectura e interpretación de gráficas (8 min).* El coordinador del taller pide a los maestros que efectúen la lectura e interpretación de gráficas relacionadas con la situación presentada en el video (Presentación en *PowerPoint* con las gráficas, *Hoja de trabajo*).

*Lectura e interpretación de una gráfica (10 min).* Los maestros, a petición del coordinador del taller, realizan la lectura e interpretación de la gráfica que representa la distancia de un automóvil, en diferentes horarios, con respecto a un punto de inicio (Presentación en *PowerPoint* con la gráfica, *Hoja de trabajo*).

*Lectura e interpretación de gráficas (10 min).* Se realiza la lectura e interpretación de una gráfica que representa el rendimiento, en kilómetros, de combustible para tres clases de automóviles (Presentación en *PowerPoint* con las gráficas, *Hoja de trabajo*).

*Llenado de una tabla (10 min).* A partir de las gráficas del rendimiento de combustible los maestros llenan una tabla y construyen expresiones algebraicas (Presentación en *PowerPoint* con la tabla, *Hoja de trabajo*).

*Invención de una historia a partir de una gráfica (10 min).* El coordinador del taller pide a los maestros inventar una historia a partir de una gráfica dada (Presentación en *PowerPoint* con las gráficas, *Hoja de trabajo*).

## Descripción de las actividades

### *Cápsula de video*

Al inicio del taller con los maestros se proyecta un video que presenta una situación relacionada con el crecimiento de dos jóvenes: Julieta y Tomás, así como las gráficas correspondientes.

### *Lectura e interpretación de gráficas*

Una vez que los maestros observan el video se proyectan las gráficas de Julieta y Tomás (gráficas 1, 2 y 3), además de una nueva que representa el crecimiento de otro joven, Raúl (gráfica 4). El coordinador les pide que hagan una lectura e interpretación de las gráficas y las comenten con el resto del grupo. Las preguntas (contenidas en la *Hoja de trabajo* entregada a los maestros) que orientan la lectura e interpretación de las gráficas son las siguientes:

1. ¿Qué estatura tenían Julieta y Tomás a los 6 años?
2. ¿Cuánto creció Julieta de los 7 a los 10.5 años?
3. ¿Cuánto creció Tomás de los 3 a los 8 años?
4. ¿Cuántos centímetros era más alto Tomás que Julieta cuando tenían 12 años?

5. ¿En qué periodo Raúl tenía menor estatura que Julieta y Tomás?
6. ¿En qué periodo Raúl era mayor que Tomás y menor que Julieta?
7. ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Julieta?
8. ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Tomás?
9. ¿Quién creció más de Julieta, Tomás y Raúl, en el periodo de los 11 a los 14 años? ¿Quién creció menos?
10. Dibuja la gráfica de crecimiento de Julieta, Tomás y Raúl hasta que cumplan 30 años.

### *Lectura e interpretación de una gráfica*

Los maestros realizan la lectura e interpretación de una gráfica (gráfica 6) que representa la distancia de un automóvil con respecto a un punto de partida en diferentes horarios. En seguida, realizan sus comentarios al respecto con todo el grupo. Las preguntas que orientan la actividad son las siguientes:

1. ¿Cuántos kilómetros recorrió el automóvil de las 8:00 a las 10:00 horas?
2. ¿Cuántos entre las 10:00 y las 11:00?
3. ¿Cuántos entre las 11:00 y las 14:00 horas?
4. ¿En qué momento retrocedió el automóvil?
5. ¿Cuántos kilómetros retrocedió?
6. ¿A cuántos kilómetros por hora viajó en promedio el automóvil entre las 13:00 y las 14:30 horas?
7. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanzó durante todo el recorrido?
8. ¿En qué intervalo alcanzó esa velocidad?
9. ¿En qué intervalo viajó más despacio el automóvil?
10. ¿A qué velocidad viajó durante ese tiempo?

### *Lectura e interpretación de gráficas*

El coordinador de la sesión pide a los maestros realizar la lectura e interpretación de gráficas (gráfica 7) relacionadas con el rendimiento de combustible de tres clases de automóviles. En seguida, intercambian comentarios al respecto. Las preguntas que orientan la actividad son las siguientes:

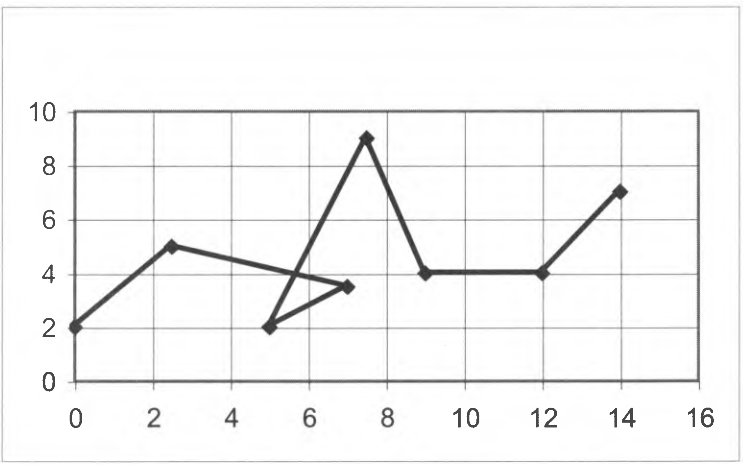
1. ¿Qué información puedes obtener?
2. ¿Cuál de los tres automóviles tiene mayor rendimiento de combustible? ¿Cuál tiene menor rendimiento?
3. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 4.5 litros?
4. ¿Cuánto combustible consume cada vehículo si su rendimiento es de 87 kilómetros?

### *Llenado de una tabla*

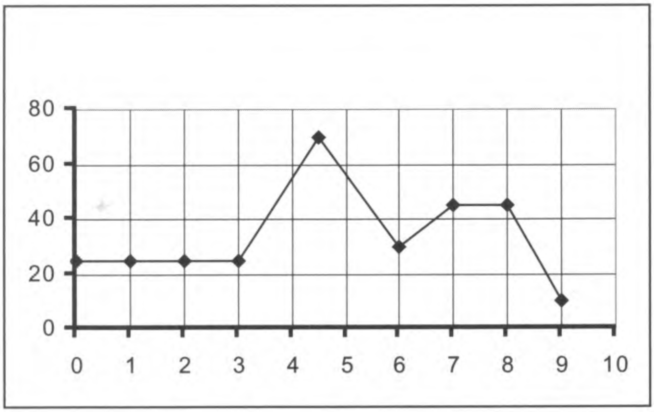
Los maestros realizan el llenado de una tabla (tabla 1) y la construcción de expresiones algebraicas relacionadas con la gráfica 7.

### *Invención de una historia a partir de una gráfica*

El coordinador de la sesión pide a los maestros que escriban una historia a partir de cada una de las gráficas proyectadas (gráficas 9 y 10). En seguida, los maestros leen sus historias frente a todo el grupo.




*Gráfica 9*




*Gráfica 10*

### Lo que hicieron los maestros

## Respuestas esperadas

En la lectura e interpretación de las gráficas 1, 2, 3 y 4 (que representan el crecimiento de Julieta, Tomás y Raúl), los maestros tuvieron participaciones como las siguientes:

> "Los miden (refiriéndose a Julieta y Tomás) en los mismos años".
> "Julieta va creciendo más y la diferencia es cada vez más".
> "Las mujeres se desarrollan más que los hombres en la adolescencia".
> "Se asemeja a un crecimiento lineal".
> "Del nacimiento a un año crece más rápido, la pendiente es mayor." "Después deja de crecer".
> "Entre los 14 y 18 años la pendiente es muy pronunciada".

En relación con la gráfica 6 (que representa la distancia de un vehículo con respecto a su punto de partida en diferentes horarios), los maestros hicieron los siguientes comentarios a partir de su lectura e interpretación:

> "La gráfica representa la distancia recorrida con respecto al tiempo".
> "Llega un momento en que es lineal".

Los maestros escribieron una fórmula para calcular la velocidad promedio del automóvil:

$$\frac{\textit{distancia final} - \textit{distancia inicial}}{\textit{tiempo}}.$$

A la pregunta "¿En qué periodo fue más lento el automóvil?", respondieron:

> "De 11 a 12 porque es poco lo que recorre".
> "Eso no se puede regresar, el que marca los kilómetros (refiriéndose al contador del kilometraje del vehículo)".
> "La velocidad más lenta es de 9:00 a 9:30".
> "El tiempo no se detuvo".

También determinaron la distancia total recorrida por el automóvil:

| | | | |
|---|---|---|---|
| De | 8:00 a 10:00 | recorrió | 210 km. |
| De | 11:00 a 11:30 | recorrió | 50 km. |
| De | 11:30 a 13:30 | recorrió | 260 km. |
| De | 13:30 a 14:00 | recorrió | 60 km. |
| De | 14:00 a 14:30 | recorrió | 60 km. |
| | En total | recorrió | 640 km. |

Las actividades de lectura e interpretación de la gráfica 7, así como el llenado de la tabla 1 no fueron realizadas, por lo que se pasó directamente a la última acti-

## Respuestas no esperadas

La planeación inicial para el taller con los maestros contemplaba diferentes actividades, que no fueron cubiertas en su totalidad debido a que hubo algunas respuestas que requirieron mayor tiempo de lo previsto. Por ejemplo, una interpretación acerca del automóvil de la gráfica 6 en el intervalo de las 10:00 a las 11:00 horas fue:

> "De las 10 a las 11 la velocidad es constante".

El hecho de que en este intervalo de tiempo la gráfica sea un segmento de recta horizontal, fue asociado con una velocidad constante y no con el hecho de que el vehículo se encontraba detenido (lo cual es lo correcto), por lo tanto, hubo necesidad de clarificar esta situación.

Algo parecido sucedió cuando se efectúo la interpretación de intervalos en los que el automóvil retrocedía, por ejemplo, un comentario fue:

> "Fue menor su velocidad porque retrocede".

En esta ocasión no se consideró que aun cuando el automóvil retrocede, puede hacerlo a velocidades no precisamente bajas.

Estas respuestas no esperadas hicieron que el coordinador del taller reorientara las actividades planeadas al inicio.

## Dificultades

La lectura e interpretación de la gráfica 6 representó ciertas dificultades para los maestros; de hecho, esta fue en parte la razón por la cual no pudieron realizarse todas las actividades planeadas. Una dificultad consistió en la interpretación de lo que la gráfica representa. Hubo momentos en que los maestros consideraban que podían leer en forma directa de la gráfica la velocidad del automóvil; sin embargo, después de una serie de comentarios fue posible precisar que de la gráfica es posible leer directamente la posición del automóvil, en diferentes horarios, con respecto a un punto de partida.

La dificultad mencionada se puso de manifiesto cuando el coordinador pidió a los maestros indicar cuándo el automóvil se movía más lento. Para ello, los maestros comentaron que en el intervalo de las 11:00 a las 12:00, porque en este periodo el automóvil había retrocedido, es decir, que estaban asociando los retrocesos del automóvil con un descenso en la velocidad, esto debido a que pensaban que de la gráfica era posible leer directamente la velocidad.

Estas dos situaciones, la confusión de lo que representa directamente la gráfica y la lectura e interpretación de los retrocesos del automóvil, coinciden en parte con las que tuvieron los alumnos en su momento.

Por último, en la historia escrita por un maestro para la gráfica 9, surgió la contradicción de que en un mismo tiempo un depósito que era llenado con un líquido tuviera diferentes niveles del líquido. Esta situación fue comentada con los demás maestros, quienes propusieron algunas alternativas, como la de incrementar el número de depósitos; sin embargo, también tendrían que agregarse tantas gráficas como depósitos, lo cual no era el caso ya que sólo se contaba con una gráfica. De hecho, la gráfica propuesta no representaba una relación funcional, lo cual no fue manifestado en forma explícita por los maestros.

## Lo que aprendieron los alumnos

Durante las dos sesiones de trabajo de este módulo, las principales actividades consistieron en la lectura e interpretación de gráficas que representan diversas situaciones y que corresponden a funciones lineales o formadas por "pedazos" de ellas (por ejemplo, la gráfica 6). En las diferentes respuestas de los alumnos es posible identificar ideas que están relacionadas con conocimientos que corresponden al estudio de las gráficas y la función lineal.

Por ejemplo, los alumnos efectuaron lecturas e interpretaciones de las gráficas tanto en forma local como global. De las gráficas 1, 2, 3, 4 y 5 obtuvieron información por intervalos cortos, por ejemplo, cuando identificaron que durante el primer año de vida Julieta, Tomás y Raúl tuvieron un rápido crecimiento; también fueron capaces de pronosticar el comportamiento de la gráfica para intervalos que no aparecían en la gráfica y que les permitieron tener una vista global del crecimiento de las personas en cuestión, esto fue evidente cuando completaron las gráficas hasta los 30 años de vida.

Los alumnos también identificaron la rapidez con la que crece una persona, por ejemplo, cuando comentaron que los tres jóvenes (gráfica 4) crecieron más durante su primer año de vida, porque en un lapso corto de tiempo su tamaño aumentó más que en otros periodos iguales. De esta forma, asociaron a una gráfica con mayor pendiente una mayor rapidez de crecimiento en comparación con las de menor valor en su pendiente.

La velocidad promedio de un vehículo también fue determinada por los alumnos en la gráfica 6, aun cuando no se trataba de un dato que pudiera obtenerse en forma directa. Los alumnos establecieron que para determinar la velocidad promedio en un cierto periodo debían calcular la diferencia entre una distancia inicial y una final y, entonces, dividir dicha diferencia entre el periodo en cuestión.

La razón de cambio constante en las rectas, ya sea que se tratara de una recta completa o un "pedazo" de ella, fue mencionado en las participaciones de los alumnos, por ejemplo: "...la distancia que Julieta le lleva a Tomás no fue siempre proporcional", o "...si los pasamos a una tabla (los datos de la gráfica) no es proporcional"; también dieron interpretaciones como "la ruta de cada consumo es constante... se podría seguir alargando esta línea a modo de que llegue a los 11... lo que da el alargamiento se podría tomar como el rendimiento en kilómetros".

En los dos primeros comentarios, los alumnos estaban haciendo referencia a las gráficas 1, 2 y 3, en donde cada gráfica está compuesta por "pedazos" de recta (las cuales tienen diferentes razones de cambio); el comentario acepta el hecho de que cada "pedazo" tiene una razón de crecimiento diferente; el tercer comentario se refiere a la gráfica 7, de la que el alumno manifiesta con seguridad que la razón de crecimiento es constante y por eso es que sugiere prolongar las rectas.

Por último, el llenado de tablas y la construcción de las representaciones algebraicas a partir de la representación gráfica y tabular dieron a los alumnos la oportunidad de trabajar con diferentes formas de representación de una función. Los alumnos efectuaron traducciones entre dichas representaciones a partir de la interpretación y construcción.

## Recomendaciones para la enseñanza

La propuesta de enseñanza presentada en las sesiones de trabajo con los alumnos muestra cómo es que el contenido de la clase es proporcionado principalmente por ellos mismos a partir de las actividades sugeridas por el maestro. Las diversas participaciones de los alumnos van orientando el desarrollo de la clase y el maestro modera y reorienta, en caso necesario, la sesión de trabajo.

Bajo esta estrategia de enseñanza fue posible identificar diferentes habilidades y contenidos relacionados con las gráficas y funciones, tales como la lectura e interpretación de gráficas en forma global y local, la rapidez de crecimiento, la velocidad promedio, la razón de cambio y el uso de diversas representaciones de una función. Es importante que el maestro aproveche las experiencias que viven los alumnos de un trabajo como este, para que en sesiones posteriores aborde con mayor precisión y detalle cada uno de los temas mencionados a través de nuevas actividades que ayuden a tal intención.

Actividades como las de inventar una historia a partir de una gráfica (gráficas 9 y 10) o construir una gráfica a partir de una historia, pueden ayudar a los alumnos, entre otros cosas, a desarrollar una mejor habilidad en la lectura e interpretación de gráficas y en la precisión del uso de las variables dependientes e independientes.

También se le puede solicitar a los alumnos que agreguen gráficas; por ejemplo, en la gráfica 7, del rendimiento de otros vehículos, bajo indicaciones como “construye la gráfica de un automóvil que tenga mayor rendimiento que todos los demás”, “construye la gráfica de un automóvil que tenga mayor rendimiento que el auto semicompacto pero menor que la camioneta” o “construye la gráfica de un automóvil que tenga de rendimiento 19 km por cada dos litros”. Todo esto con la intención de que los alumnos comiencen a identificar la pendiente, concepto que está implicado en la variación del crecimiento de las rectas.

Conforme las sesiones de trabajo se desarrollen el maestro puede comenzar a precisar los nombres de los conceptos descritos por los alumnos, para los cuales no disponen de un nombre que asignar y cuando se lo asignan no es precisamente el convencional.

### Ampliación del tema

## El concepto de función

Diversas actividades y eventos que ocurren en la vida cotidiana involucran elementos que están relacionados entre sí, y a través de ellos es posible analizar y describir dichas actividades y eventos. Por ejemplo, las compañías de seguros de autos han tenido que acudir a las estadísticas de siniestros automovilísticos para hacer ajustes en los precios de sus pólizas, el costo de una póliza de seguro para un automóvil puede variar si la persona que la contrata tiene determinada edad o sexo; también el cobro de un viaje en taxi depende de la distancia o el tiempo que se utiliza el servicio; el costo por aparcar un auto está supeditado al tiempo que permanezca estacionado; la conveniencia de usar uno u otro servicio de telefonía celular puede depender de las formas de cobro, ya sea por minuto, fracción de minuto o mediante una renta fija; el tiempo que tarda un autobús en llegar a su destino puede variar por la velocidad que pueda alcanzar debido al clima.

En estos ejemplos están involucradas magnitudes que se relacionan de diferentes maneras, a estas magnitudes les llamamos variables, las cuales pueden depender unas de otras. Cuando una variable depende de otra se le llama variable dependiente (v. d.) y en el caso contrario se le llama variable independiente (v. i.). Por ejemplo, el costo (v. d.) de una póliza de seguro de auto puede depender de la edad del contratante (v. i.); la velocidad que alcanza un autobús (v. d.) en su recorrido depende de las condiciones climatológicas (v. i.) durante el camino.

Existen diversas formas de representar las relaciones entre dos variables, una de ellas es mediante tablas con dos columnas, en una columna se registran los valores de la variable independiente, y en la otra los de la variable dependiente; también pueden mostrarse como colecciones de pares ordenados, escribiendo entre paréntesis las parejas de variables separadas por una coma: (v. i., v. d.); una tercera forma de representación es mediante una expresión algebraica, la cual expresa la relación entre las variables de forma simbólica; y, por último, la representación gráfica que permite visualizar características de la relación entre las variables, que de otra forma resultaría más difícil.

Cuando un conjunto de valores de una variable son apareados con los de otra variable, establecemos una relación matemática. Si a cada valor de la variable independiente podemos asociarle un único valor de la variable dependiente con la que se le relaciona, tenemos una clase de relación llamada *función*. Una función puede ser definida como un conjunto de pares ordenados, con la propiedad de que cada primera coordenada tiene una única segunda coordenada.

Usualmente esta definición es ilustrada mediante diagramas de flechas, como se muestra en la figura 1, en la que se relaciona a dos conjuntos de valores mediante una regla que asigna a cada elemento de un conjunto $A$ (dominio) uno y sólo un elemento del otro conjunto $B$ (imagen o contradominio).

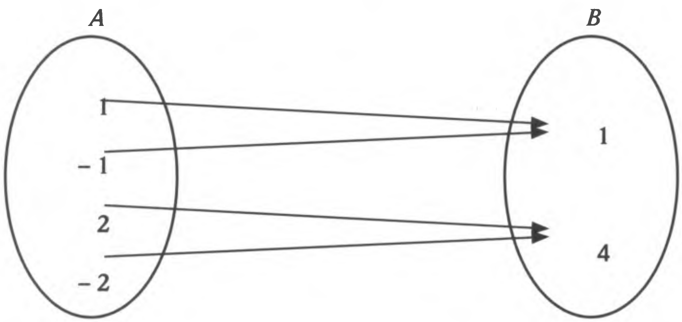



*Figura 1*

A los elementos del primer conjunto se les asigna un sólo elemento del segundo conjunto, no así con los del segundo conjunto, a los que se les puede relacionar una cantidad infinita de elementos, lo cual permite que una gran variedad de relaciones sean consideradas como funciones. Por ejemplo, la función constante, en donde a cualquier elemento del dominio le corresponde el mismo elemento del codominio (figura 2).

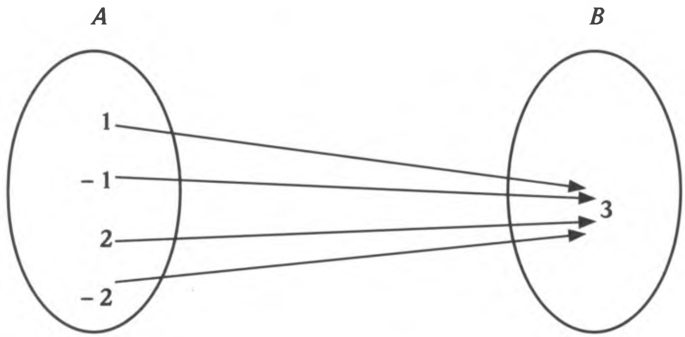
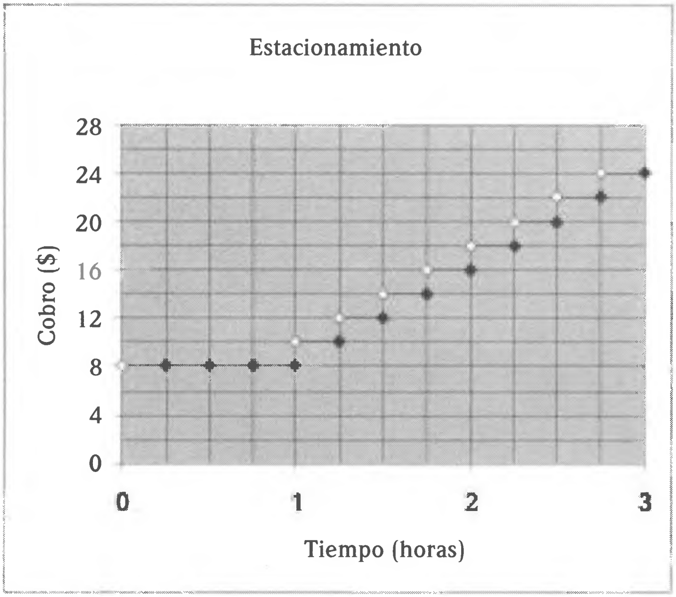



*Figura 2*

La siguiente situación representa una relación funcional entre dos variables:

> Un estacionamiento de autos tiene una tarifa de $8.00 por la primera hora (incluyendo cualquier fracción menor de tiempo) y de ahí en adelante cobra $2.00 más por cada cuarto de hora.

La gráfica 11 ilustra esta relación, en ella se representan hasta tres horas de uso del estacionamiento.




*Gráfica 11*

Las variables que están involucradas son el tiempo (variable independiente) y el cobro (variable dependiente). En la tabla 2 se muestra una representación tabular de esta función.

*Tabla 2*

| Tiempo (horas) | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 | 1.2 | 1.25 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.75 | 1.8 | 2 | 2.2 | 2.25 | 2.4 | 2.5 | 2.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cobro ($) | 8 | 8 | 8 | 8 | 10 | 10 | 12 | 12 | 14 | 14 | 16 | 16 | 18 | 18 | 20 | 20 | 22 |

Una representación simbólica de esta función se muestra a continuación.

$$y=\begin{cases} 8 & 0<x\leq 1 \\ 8+2a & 1+0.25(a-1)<x\leq 1+0.25a \\ & a=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n\} \end{cases}$$

Se trata de una relación funcional en la que a muchos valores del dominio les corresponde el mismo valor del codominio; sus representaciones gráfica, tabular y algebraica no son tan comunes en el ámbito escolar, como lo son la función lineal y cuadrática. El dominio de la función consiste de los números reales positivos. El codominio es $\{8, 10, 12, 14, \ldots, 8 + 2b\}$, con $b \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.

El maestro puede utilizar actividades que involucren este tipo de funciones para que los alumnos amplíen su conocimiento del concepto de función. El siguiente diagrama de flechas (figura 3) ilustra esta función.

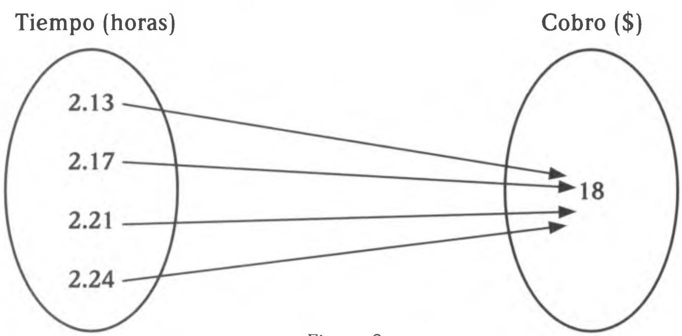



*Figura 3*

Como este ejemplo, existe una gran variedad de relaciones que son funciones y cuyas representaciones nos permiten identificarlas y caracterizarlas. A continuación describiremos algunas de estas relaciones funcionales.

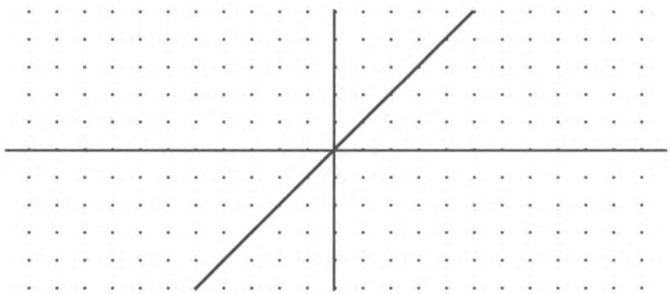
### *Familias de funciones*

Abordaremos las funciones lineales y las cuadráticas. Para su descripción, consideraremos esencialmente las relaciones entre sus representaciones gráfica y simbólica, de acuerdo con los efectos que producen en las gráficas la variación de los parámetros de sus representaciones algebraicas: traslación, sentido y efectos de los coeficientes.

### *Función lineal*

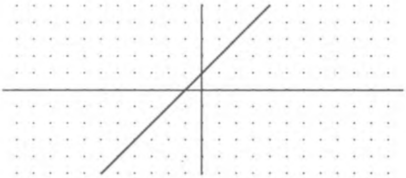
La representación gráfica de esta función es una línea recta y su expresión algebraica es de la forma $y = mx + b$. A continuación veamos qué efectos producen en las gráficas si se modifican los valores de los parámetros $m$ y $b$ (las gráficas que se emplean en este apartado tienen escala 1 en ambos ejes del plano cartesiano).

La gráfica 12 corresponde a la función $y = x$ (con $m = 1$ y $b = 0$); se trata de una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano, determina un ángulo de 45° respecto al eje horizontal del plano y es creciente.

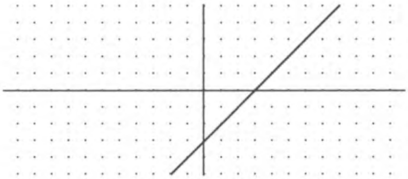


*Gráfica 12*

Las gráficas 13 y 14 corresponden, respectivamente, a las expresiones $y = x + 1$ (con $m = 1$ y $b = 1$) y $y = x - 3$ (con $m = 1$ y $b = -3$). Las expresiones algebraicas asociadas a estas gráficas son de la forma $y = x + b$ con $b \neq 0$. Son líneas rectas que están trasladadas con respecto al origen del plano cartesiano una unidad hacia arriba y 3 hacia abajo, respectivamente; determinan un ángulo de 45° con respecto al eje horizontal del plano; son crecientes, y el punto en el que cruzan al eje vertical del plano es $(0, b)$.



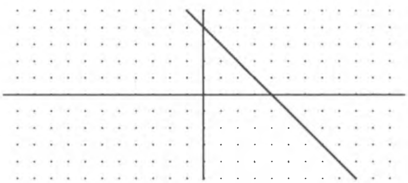
*Gráfica 13*



*Gráfica 14*

Las gráficas 15 y 16 corresponden respectivamente a las expresiones $y = -x - 2.5$ (con $m = -1$ y $b = -2.5$) y $y = -x + 4$ (con $m = -1$ y $b = 4$). Las expresiones algebraicas de estas gráficas son de la forma $y = -x + b$, con $b \neq 0$. Son líneas rectas que están trasladadas con respecto al origen del plano cartesiano 2.5 unidades hacia abajo y 4 hacia arriba, respectivamente; determinan un ángulo de 45° con respecto al eje horizontal del plano; el valor negativo en la pendiente ($m$) provoca que sean decrecientes, y el cruce con el eje vertical del plano es (0, $b$).

*Gráfica 15*

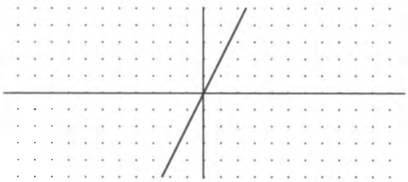


*Gráfica 16*

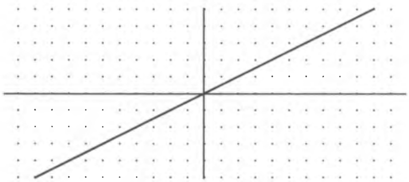
En la siguiente tabla se puede observar el efecto de la pendiente negativa en los valores de la función: al incrementarse el valor de $x$, el de la función decrece, lo cual tiene como efecto un cambio de sentido en la gráfica.

| $x$ | $y=-x-2.5$ | $y=-x+4$ |
|---|---|---|
| –3 | –2.5 | 7 |
| –2 | 0.5 | 6 |
| –1 | –0.5 | 5 |
| 0 | –1.5 | 4 |
| 1 | –2.5 | 3 |
| 2 | –3.5 | 2 |
| 3 | –4.5 | 1 |
| 4 | –5.5 | 0 |

Con valores de $m$ distintos de 1 y 0 se produce un nuevo cambio en la gráfica de la función lineal. Las gráficas 17 y 18 corresponden a las expresiones $y = 2x$ (con $m$ =2 y $b$ =0) y $y = 0.5x$ (con $m = 0.5$ y $b$ =0), respectivamente. Son líneas rectas que pasan por el origen del plano cartesiano, determinan un ángulo distinto a 45° con respecto al eje horizontal del plano y son crecientes.



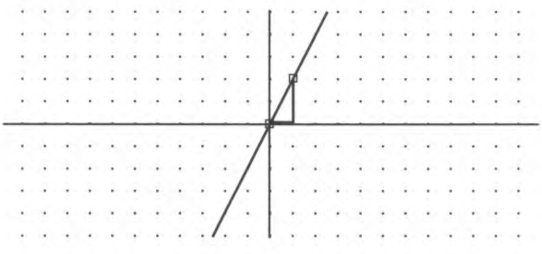
*Gráfica 17*



*Gráfica 18*

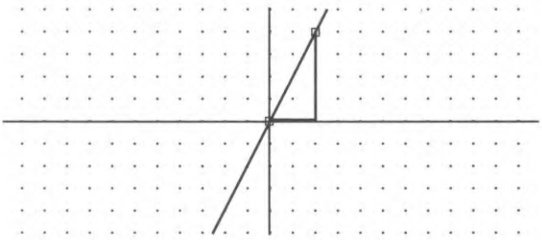
En la expresión $y = mx$, con $m$ =1 es posible observar a simple vista que el ángulo con respecto al eje horizontal corresponde a 45°. Sin embargo, en las gráficas 17 y 18, ¿cuál es el ángulo con respecto al eje horizontal? De hecho, el cambio en el valor de $m$ ha modificado esta característica de las gráficas.

Si relacionamos avances horizontales con verticales en las gráficas, podemos analizar cómo está creciendo la gráfica correspondiente; por ejemplo, en la gráfica 19 ($y = 2x$) se resalta el avance horizontal de una unidad a partir del origen del plano cartesiano y su avance vertical es de 2 unidades, de tal modo que de (0, 0) se llega a (1, 2); ambos puntos pertenecen a la gráfica.



*Gráfica 19*

En la gráfica 20 ($y = 2x$) se resalta el avance horizontal de 2 unidades y su correspondiente avance vertical de 4 unidades, de (0, 0) se llega a (2, 4).



*Gráfica 20*

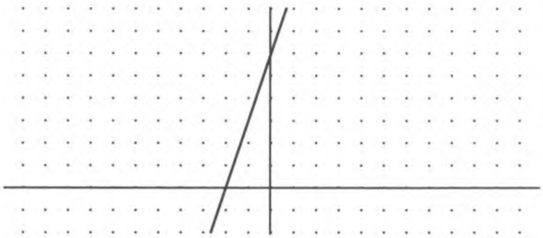
De hecho, se puede partir de cualquier punto de la gráfica y considerar sus desplazamientos horizontal y vertical para llegar a otro punto de la gráfica. Como se observa, por cada desplazamiento horizontal que se realiza, se debe hacer un desplazamiento vertical del doble; por lo tanto, la razón entre el avance vertical y horizontal es 2, valor que coincide con el de $m$ en $y = 2x$. De acuerdo con esto, la razón

$$\frac{\textit{desplazamiento vertical}}{\textit{desplazamiento horizontal}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2.$$

De esta manera, encontramos el valor del parámetro $m$ de la expresión $y = mx$. El cociente obtenido es la tangente de los triángulos rectángulos que se forman con los desplazamientos resaltados, y el ángulo agudo al que corresponde dicha tangente es el ángulo que determina la gráfica de la función lineal, en este caso $y = 2x$, con el eje horizontal del plano; al calcular $tan^{-1}(2) \approx 63.43°$, obtenemos el ángulo que determina la gráfica con el eje horizontal.

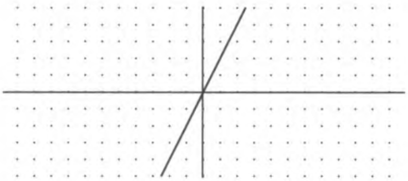
Notemos que en la expresión $y = mx + b$ un cambio en el valor del parámetro $b$ produce traslaciones en la recta, el signo negativo en $m$ genera funciones lineales decrecientes y el valor de $m$ determina el ángulo entre la gráfica y el eje horizontal (la inclinación de la recta).

Por ejemplo, veamos cómo determinar la ecuación de la gráfica 21.

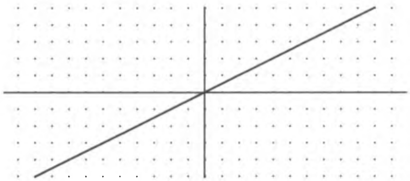


*Gráfica 21*

Las coordenadas del punto en el que la recta corta al eje vertical son (0, 6), entonces, $b = 6$. En cuanto al valor de $m$ observemos los puntos de intersección con los ejes cartesianos y determinemos los desplazamientos vertical y horizontal, de (−2, 0) a (0, 6), gráficas 22 y 23.



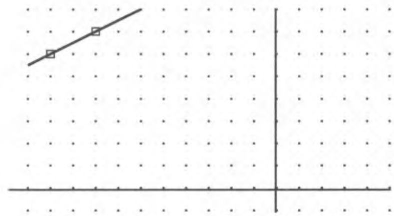
*Gráfica 22*



*Gráfica 23*

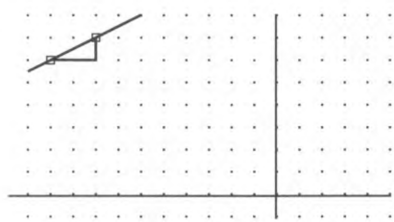
La razón $\frac{\textit{desplazamiento vertical}}{\textit{desplazamiento horizontal}} = \frac{6}{2} = 3$, por lo tanto, $m = 3$ es positivo porque la gráfica es creciente; la expresión algebraica de la función representada en la gráfica es $y = 3x + 6$. El ángulo entre la gráfica y el eje horizontal es $\tan^{-1}(3) \approx 71.57°$.

Ahora encontremos la expresión algebraica para la gráfica 24 que se muestra a continuación.



*Gráfica 24*

Para determinar la razón de crecimiento consideremos los puntos (–10, 6) y (–8, 7), que se han resaltado en la gráfica. Como se observa en la gráfica 25, de (–10, 6) a (–8, 7) se tiene un avance horizontal de 2 unidades y uno vertical de 1 unidad; por lo tanto, $\frac{\textit{desplazamiento vertical}}{\textit{desplazamiento horizontal}} = \frac{1}{2}$, así que $m = \frac{1}{2}$.



*Gráfica 25*

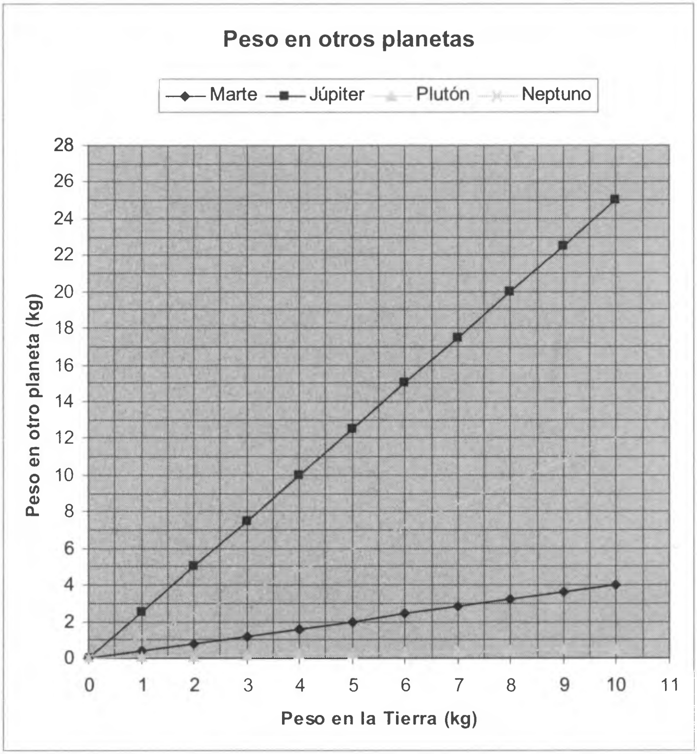
La expresión $y = mx + b$ queda como $y = \frac{1}{2}x + b$. Un punto por el que cruza la gráfica es (–10, 6); luego, tenemos la ecuación $6 = \frac{1}{2}(-10) + b$; resolviéndola se obtiene que $b = 11$. Por lo tanto, la expresión algebraica asociada a la gráfica es $y = \frac{1}{2}x + 11$ y el ángulo que forma la gráfica con el eje horizontal es $\tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26.57°$.

### *Actividades relacionadas con funciones lineales*

Existen diversas situaciones que pueden ser modeladas mediante una función lineal, y que brindan la oportunidad de abordar contenidos matemáticos relacionados con la definición de función y de recta (la noción de variable, variable independiente y dependiente, la pendiente de una recta y la ordenada al origen).

*Primera situación*

La fuerza de gravedad no es exclusiva del planeta Tierra: todos los cuerpos ejercen entre sí este tipo de fuerza. Tanto el Sol, la Tierra y su satélite natural –la Luna–, así como los demás planetas, ejercen la fuerza de gravedad. Sin embargo, a causa de que la fuerza de gravedad depende de la masa de los cuerpos y de la distancia entre ellos, el peso de determinado cuerpo depende del planeta en el que se encuentre. Por ejemplo, si tu peso es de 45 kg aquí en la Tierra, tu peso sería de 18 kg en Marte. ¡Habrías bajado de peso! La gráfica 26 muestra cuál sería el peso de algunos objetos en distintos planetas.




*Gráfica 26*

A partir de estas gráficas, los alumnos pueden hacer lecturas e interpretaciones de ellas mediante diversas actividades propuestas por el maestro, por ejemplo, responder a preguntas como las siguientes:

- ¿Cuánto pesa en la Tierra un objeto que en Marte pesa 2 kg?
- ¿Cuál es el peso en Neptuno de una bolsa de azúcar que en la Tierra pesa 5 kg?
- ¿Cuál es el peso en Júpiter de un bulto de papas que en la Tierra pesa 10 kg?
- ¿Cuál es el peso en Plutón de una bolsa de una persona que en la Tierra pesa 85 kg?
- ¿En cuál planeta tendrías la mayor disminución de peso? ¿En cuál la menor?

También pueden, a partir de las gráficas, completar tablas como la siguiente y escribir las expresiones algebraicas asociadas a cada función. Peso en Marte = $0.4x$; peso en Júpiter = $2.5x$; peso en Plutón = $0.05x$; peso en Neptuno = $1.2x$; en donde $x$ representa, en cada expresión, el peso en la Tierra.

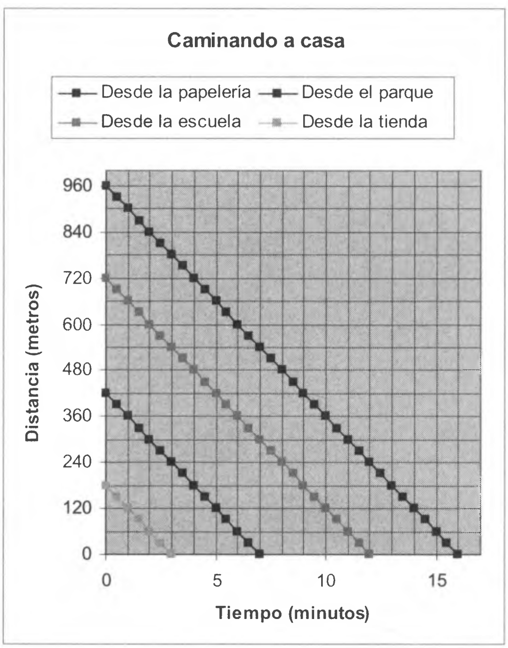
*Tabla 3*

| Peso en la Tierra (kg) | Peso en Marte (kg) | Peso en Júpiter (kg) | Peso en Plutón (kg) | Peso en Neptuno (kg) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0.4 | 2.5 | 0.05 | 1.2 |
| 2 | 0.8 | 5 | 0.1 | 2.4 |
| 3 | 1.2 | 7.5 | 0.15 | 3.6 |
| 4 | 1.6 | 10 | 0.2 | 4.8 |
| 5 | 2 | 12.5 | 0.25 | 6 |
| 6 | 2.4 | 15 | 0.3 | 7.2 |
| 7 | 2.8 | 17.5 | 0.35 | 8.4 |
| 8 | 3.2 | 20 | 0.4 | 9.6 |
| 9 | 3.6 | 22.5 | 0.45 | 10.8 |
| 10 | 4 | 25 | 0.5 | 12 |

Asimismo, los alumnos pueden observar los efectos que producen los diferentes coeficientes de las expresiones en las gráficas correspondientes. Se les puede solicitar que dibujen gráficas de planetas (ficticios), en donde el aumento de peso con respecto a la Tierra sea 3.5 veces, o la disminución sea de $\frac{3}{4}$ partes, con el fin de que efectúen conversiones entre las representaciones algebraica y gráfica. Además, se les puede solicitar que escriban la expresión de una gráfica que pase entre las gráficas de dos planetas determinados y que dibujen con la mejor precisión posible la gráfica correspondiente.

### *Segunda situación*

En la gráfica 27 se representa la distancia que recorre caminando la Sra. Lorena en determinado tiempo cuando se dirige a su casa desde diferentes sitios: desde la escuela de sus hijos, desde la papelería, desde el parque y desde la tienda.




*Gráfica 27*

A partir de estas gráficas los alumnos pueden responder preguntas como las siguientes:

- ¿A qué distancia está cada uno de los sitios de donde parte la Sra. Lorena?
- ¿Qué tiempo tarda en llegar a su casa en cada caso?
- ¿Cuál es la velocidad promedio a la que camina la Sra. Lorena en cada caso?
- ¿Cómo son entre sí las velocidades promedio?
- Dibuja la gráfica correspondiente si la Sra. Lorena utilizara un auto para dirigirse a su casa desde el parque, en vez de caminar.
- ¿Cuáles diferencias existen entre las gráficas, cuando camina y cuando utiliza un automóvil?
- ¿Cuál podría ser una velocidad promedio del automóvil de la Sra. Lorena al ir del parque a su casa?

También recomendamos que completen tablas como las siguientes.

*Tabla 4.*
Desde la papelería

| **Tiempo (minutos)** | 0 | 0.5 | 1 | 2.5 | 4 | 5 | 5.5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distancia (metros)** | 420 | 390 | 360 | 270 | 180 | 120 | 90 | 0 |

*Tabla 5.*
Desde la tienda

| **Tiempo (minutos)** | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Distancia (metros)** | 180 | 150 | 120 | 90 | 60 | 30 | 0 |

*Tabla 6.*
Desde la escuela

| Tiempo (minutos) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia (metros) | 720 | 600 | 480 | 360 | 240 | 120 | 0 |

*Tabla 7.*
Desde el parque

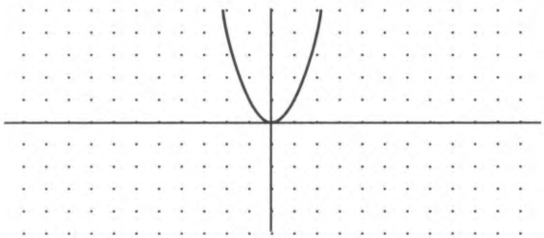
| Tiempo (minutos) | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia (metros) | 960 | 900 | 780 | 660 | 540 | 420 | 300 | 180 | 60 | 0 |

Es conveniente que los alumnos escriban las expresiones algebraicas asociadas a cada una de las gráficas: $420 - 60x$ (camino a casa desde la papelería), $720 - 60x$ (camino a casa desde la escuela), $180 - 60x$ (camino a casa desde la tienda), y $960 - 60x$ (camino a casa desde el parque), e identifiquen la relación que tienen los valores de los parámetros de las expresiones con las gráficas y con la situación en general.

### *Función cuadrática*

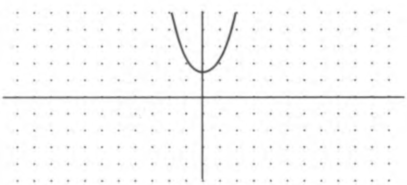
La representación gráfica de la función cuadrática es una parábola, y su expresión algebraica es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. A continuación, veamos los efectos que se producen en las parábolas si hacemos cambios en los valores de los parámetros de la función cuadrática (las gráficas que se emplean en este apartado tienen escala 1 en ambos ejes del plano cartesiano).

La gráfica 28 corresponde a la expresión $y = x^2$ (con $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$). Es una parábola con vértice en el origen del plano cartesiano, abre hacia arriba, es decreciente en los valores negativos de su dominio, creciente en los valores positivos de su dominio y tiene un mínimo en (0, 0), el cual también se conoce como *el vértice de la parábola.*

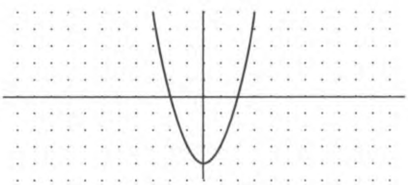


*Gráfica 28*

La representación gráfica de las expresiones $y = x^2 + 1.5$ (con $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1.5$) y $y = x^2 - 4$ (con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -4$) se muestra en las gráficas 29 y 30, respectivamente. Son parábolas con el vértice en $(0, c)$, trasladadas verticalmente $c$ unidades (fue el efecto producido por el cambio de valor en el parámetro $c$), abren hacia arriba, son decrecientes en los valores negativos del dominio, crecientes en los valores positivos, y tienen, respectivamente, un mínimo en (0, 1.5) y (0, –4).



*Gráfica 29*



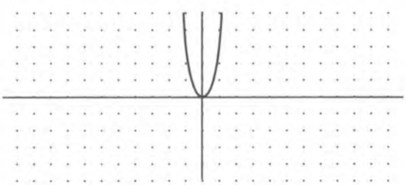
*Gráfica 30*

En la tabla 8 se observa el efecto que produce en los valores del rango de la función la modificación del valor de $c$. Al comparar la columna de $y = x^2$ con la de $y = x^2 + 1.5$, hay una diferencia de 1.5; de manera similar, con la columna de $y = x^2 - 4$ la diferencia es de 4.

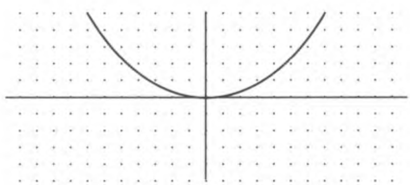
*Tabla 8*

| $x$ | $y = x^2$ | $y = x^2 + 1.5$ | $y = x^2 - 4$ |
|---|---|---|---|
| –3 | 9 | 10.5 | 5 |
| –2 | 4 | 5.5 | 0 |
| –1 | 1 | 2.5 | –3 |
| 0 | 0 | 1.5 | –4 |
| 1 | 1 | 2.5 | –3 |
| 2 | 4 | 5.5 | 0 |
| 3 | 9 | 10.5 | 5 |

Las gráficas 31 y 32 corresponden a las expresiones $y = 3x^2$ (con $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$) y $y = 0.1x^2$ (con $a = 0.1$, $b = 0$ y $c = 0$). Son parábolas con el vértice en el origen del plano, abren hacia arriba, son decrecientes en los valores negativos del dominio y crecientes en los valores positivos.



*Gráfica 31*



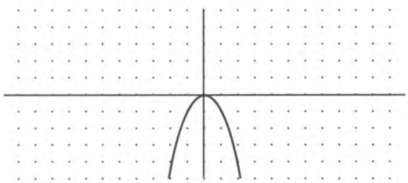
*Gráfica 32*

El efecto que producen en las gráficas los diferentes valores del parámetro $a$ es el cambio en la abertura de las parábolas, ya sea que estén más abiertas o más cerradas con respecto a $y = x^2$. Este cambio en la abertura está asociado con la rapidez de crecimiento o de decrecimiento de los valores de la función. En la tabla 9 se pueden comparar los valores de $y = x^2$ con los de $y = 3x^2$, en donde es posible comparar el crecimiento y decrecimiento por cada unidad; en este caso el valor de $a = 3$ produce un crecimiento más rápido con respecto al de $y = 0.1x^2$; el decrecimiento y el crecimiento son más lentos debido a que $a = 0.1$.

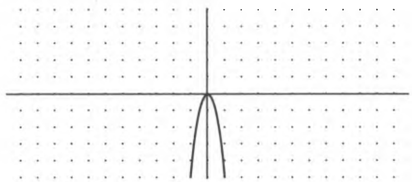
*Tabla 9*

| $x$ | $y = x^2$ | $y = 3x^2$ | $y = 0.1x^2$ |
|---|---|---|---|
| –3 | 9 | 27 | 0.9 |
| –2 | 4 | 12 | 0.4 |
| –1 | 1 | 3 | 0.1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 3 | 0.1 |
| 2 | 4 | 12 | 0.4 |
| 3 | 9 | 27 | 0.9 |

Los valores negativos del parámetro $a$ producen un cambio de sentido en las gráficas; en este caso, las parábolas abren hacia abajo, primero crecen y después decrecen, y en vez de tener un valor mínimo, tienen uno máximo. Las gráficas 33 y 34 corresponden, respectivamente, a las expresiones $y = -x^2$ (con $a = -1$, $b = 0$ y $c = 0$) y $y = 5x^2$ (con $a = -5$, $b = 0$ y $c = 0$).



*Gráfica 33*



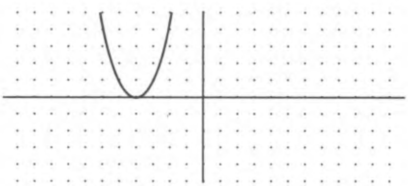
*Gráfica 34*

El signo negativo en $a$ produce una reflexión de la parábola con respecto al eje horizontal del plano, esto se puede observar en la tabla 10, al comparar los valores de $y = x^2$ con los de $y = -x^2$, los cuales son inversos entre sí; lo mismo sucede con los valores de $y = 5x^2$ y $y = -5x^2$.

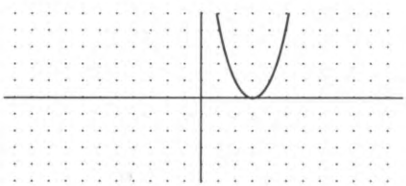
*Tabla 10*

| $x$ | $y = x^2$ | $y = -x^2$ | $y = 5x^2$ | $y = -5x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| -3 | 9 | -9 | 45 | -45 |
| -2 | 4 | -4 | 20 | -20 |
| -1 | 1 | -1 | 5 | -5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | -1 | 5 | -5 |
| 2 | 4 | -4 | 20 | -20 |
| 3 | 9 | -9 | 45 | -45 |

Las gráficas 35 y 36 corresponden, respectivamente, a las expresiones $y = (x + 4)^2$ y $y = (x - 3)^2$, las cuales son de la forma $y = (x + h)^2$, en donde $a = 1$, $b = 2h$ y $c = h^2$. Las parábolas están trasladadas horizontalmente 4 unidades a la izquierda y 3 a la derecha (con respecto al origen del plano cartesiano). Abren hacia arriba, primero decrecen y después crecen, tienen un mínimo en (0, –4) y (0, 3), respectivamente.



*Gráfica 35*



*Gráfica 36*

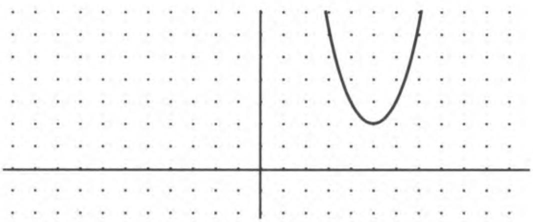
En este caso, al argumento de la función $y = x^2$ es al que se le suma determinada cantidad, lo cual produce una traslación horizontal en la parábola con respecto al origen del plano cartesiano. Además, esta operación en el argumento de la función produce efectos directos en los valores del dominio, por ejemplo, en $y = (x + 4)^2$ se "recorrió" 4 unidades cada valor del dominio, como se muestra en la tabla 11, en donde el 0 (de la columna de $x$) pasa a "ocupar el lugar del –4" (en las columnas de $x + 4$ y $y = (x + 4)^2$; así sucede con los demás valores.

*Tabla 11*

| $x$ | $x+4$ | $y = (x+4)^2$ |
|---|---|---|
| -7 | -3 | 9 |
| -6 | -2 | 4 |
| -5 | -1 | 1 |
| -4 | 0 | 0 |
| -3 | 1 | 1 |
| -2 | 2 | 4 |
| -1 | 3 | 9 |
| 0 | 4 | 16 |
| 1 | 5 | 25 |
| 2 | 6 | 36 |
| 3 | 7 | 49 |

De la misma manera podría observarse esto en una tabla con columnas $x$, $x - 3$ y $y = (x - 3)^2$, en donde el dominio se recorre 3 unidades, pero en sentido contrario al del caso anterior.

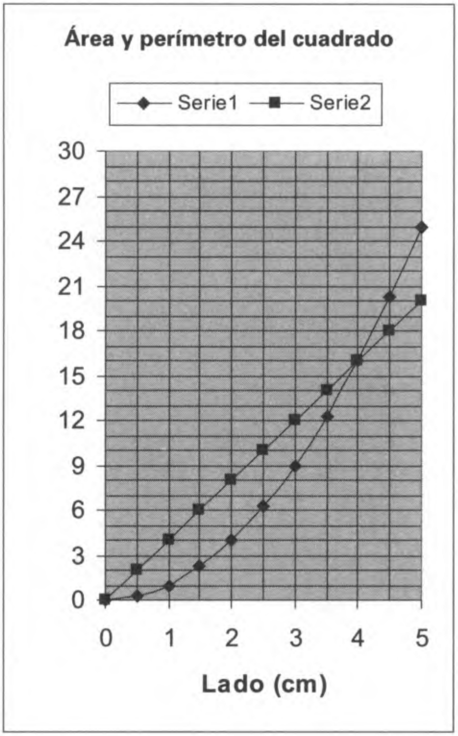
La gráfica 37 corresponde a la expresión $y = (x - 5)^2 + 2$, la cual es de la forma $y = (x + h)^2 + k$, con $a = 1$, $b = 2h$ y $c = h^2 + k$. La parábola abre hacia arriba, tiene su vértice y un valor mínimo en (5, 2), está trasladada horizontalmente 5 unidades a la derecha y verticalmente 2 unidades hacia arriba.



*Gráfica 37*

## *Actividades relacionadas con funciones cuadráticas*

Existen diversas situaciones que pueden modelarse mediante una función cuadrática; por ejemplo, el área de figuras geométricas como la del círculo y del cuadrado (véanse las gráficas 38 y 39).

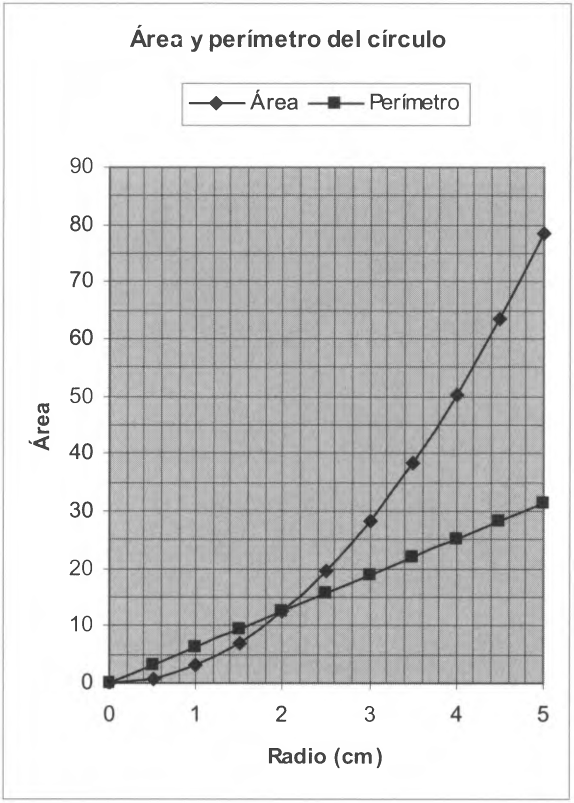



*Gráfica 38*

Además, en las gráficas 38 y 39 se muestra la variación correspondiente al perímetro del cuadrado y del círculo, lo cual se puede aprovechar para que los alumnos comparen el crecimiento entre una función lineal y una cuadrática.

Los alumnos pueden responder a preguntas como las siguientes:

- ¿En qué intervalo el perímetro es mayor que el área del cuadrado? ¿Y del círculo?
- ¿En cuáles puntos son iguales el área y el perímetro del cuadrado? ¿Y en el círculo?
- ¿Cuál gráfica de área crece más rápido, la del cuadrado o la del círculo? ¿A qué se debe?
- ¿Cómo crees que sería la gráfica del volumen del cubo? ¿Y la de la esfera?




*Gráfica 39*

Otra situación es la siguiente:

*María quiere construir un jardín como el que se muestra en la figura 4, pero sólo tiene material para construir una cerca de 20 metros de longitud total.*

*Además, quiere que su jardín tenga la mayor área posible. La figura muestra una manera de hacerlo, pero hay muchas otras formas de lograrlo. ¿Cuál es el área del jardín de la figura 4?_________ metros cuadrados.* (Cedillo, 1999c)

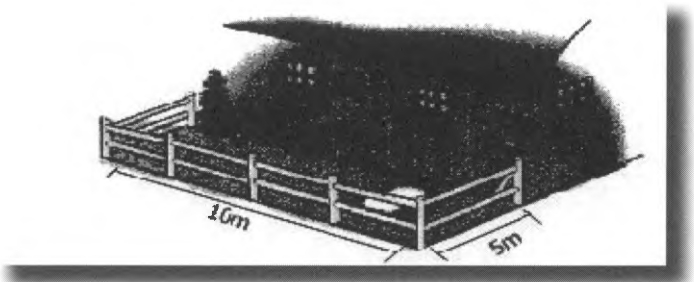


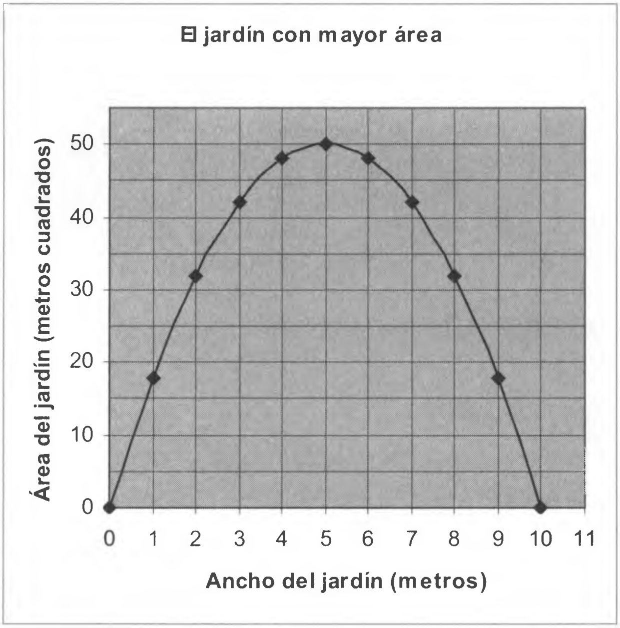

*Figura 4*

La tabla 12 contiene valores para distintas posibles áreas del jardín que María se propone construir, y en donde es posible comenzar a establecer algunas conjeturas acerca de las dimensiones que produzcan el área máxima.

*Tabla 12*

| Ancho del jardín (m) | Largo del jardín (m) | Área del jardín ($m^2$) |
|---|---|---|
| 0 | 20 | 0 |
| 1 | 18 | 18 |
| 2 | 16 | 32 |
| 3 | 14 | 42 |
| 4 | 12 | 48 |
| 5 | 10 | 50 |
| 6 | 8 | 48 |
| 7 | 6 | 42 |
| 8 | 4 | 32 |
| 9 | 2 | 18 |
| 10 | 0 | 0 |

La gráfica 40 muestra la representación de esta situación; como se observa, se trata de una parábola que abre hacia abajo, que primero crece y después decrece; por lo tanto, en su vértice, (5, 50), tiene un máximo que corresponde a la solución. En este caso, el ancho del jardín debe medir 5 m, su largo 10 m y el área es de 50 metros cuadrados.




*Gráfica 40*

Las expresiones algebraicas que se pueden construir a partir del valor del ancho del jardín, $x$, son las siguientes: Largo del jardín: $20 - 2x$ y área del jardín: $(20 - 2x)\,x$.

# BIBLIOGRAFÍA


Cedillo, T. *La calculadora en el salón de clase: Nube de puntos.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 4, 1999c.

Cruz, V. *La calculadora en el salón de clase: Familias de Funciones.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 2, 1999.

Friel, S., Rachlin S. y D. Doyle. *Navigating Through Algebra in Grades 6-8.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 2001.

Gelfand, I. y A. Shen. *Algebra.* Birkhäuser. EUA, 2002.

Hitt, F. *Funciones en Contexto.* México, Pearson Educación, 2002.

Janvier, C. "Translation Processes in Mathematics Education", en *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Londres, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1987.

Leinhardt, Zaslavsky y Stein. "Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching". *Review of Educational Research*, vol. 60, no.1, 1990, pp. 1-64.

Lloyd, G. y M. Wilson. "Supporting Innovation: The impact of a Teacher's Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform Curriculum". *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, no. 3, 1998, pp. 248-274.

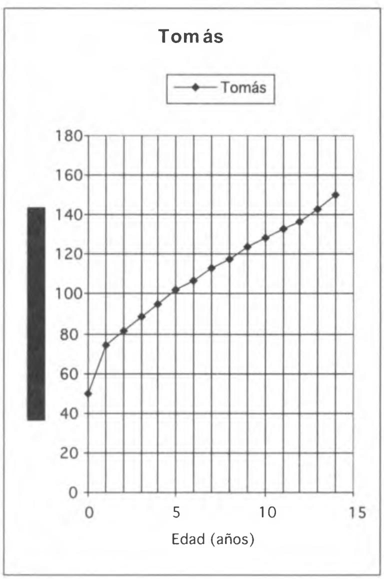
Posamentier, A. y J. Stepelman. *Teaching Secondary School Mathematics.* 2a. ed. Charles E. Merrill Publishing Company A Bell & Howell Company. Columbus, Ohio, 1986.

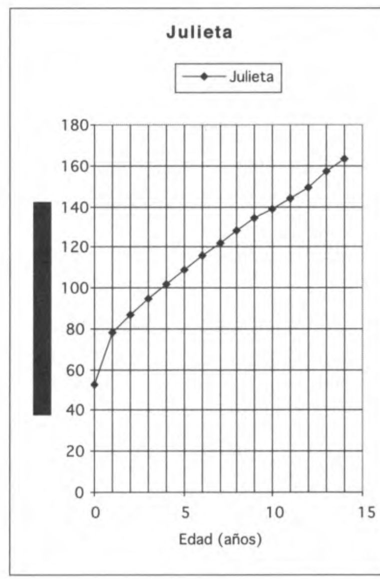
Ruthven, K. "Personal Technology and Classroom Change: A British Perspective", en J. T. Fey and C. R. Hirsh (eds). *Calculators in Mathematics Education.* Reston, VA, Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

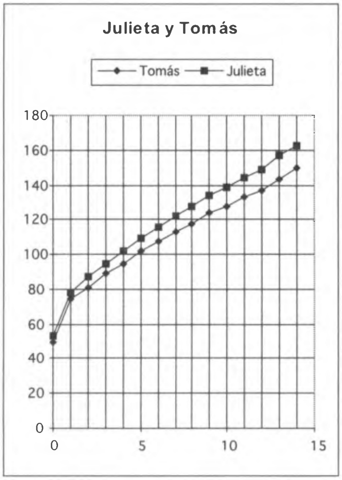
Streun, A. "Representations in applying functions". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 31, no. 5, 2000, pp. 703-725.

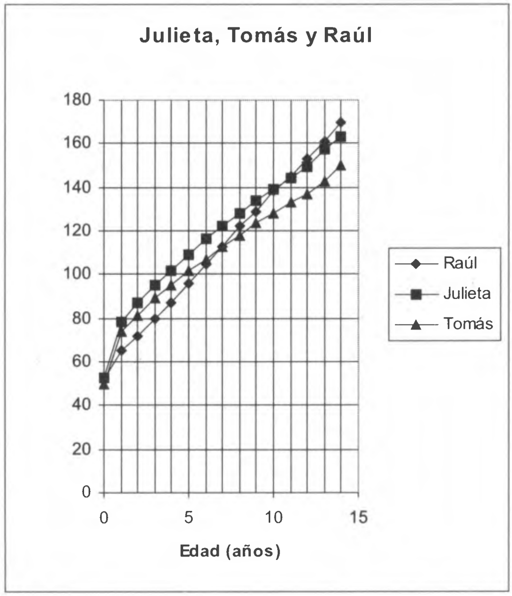
ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA

## Gráficas mostradas en el video de la primera clase






## Hoja de trabajo de la primera clase

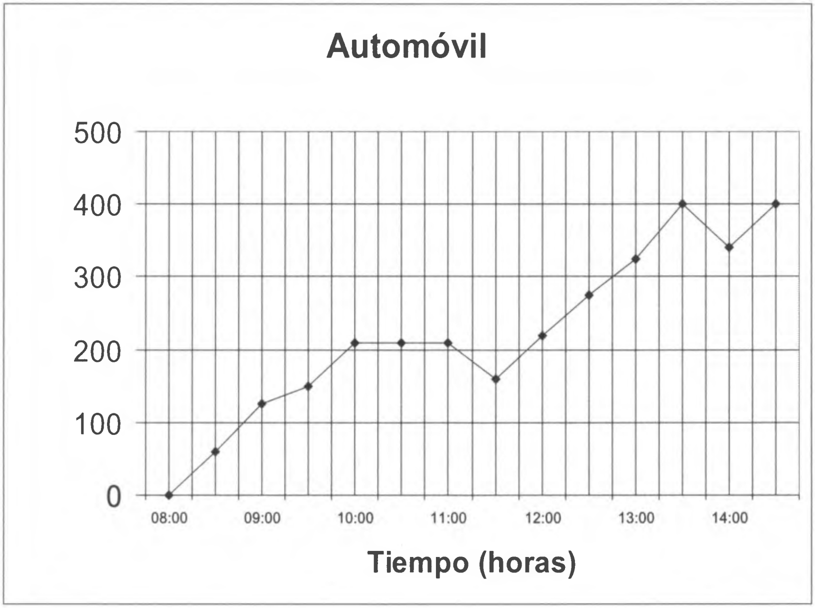
Responde de acuerdo con las gráficas 1, 2, 3 y 4:

1. ¿Qué estatura tenían Julieta y Tomás a los 6 años?
2. ¿Cuánto creció Julieta de los 7 a los 10.5 años?
3. ¿Cuánto creció Tomás de los 3 a los 8 años?
4. ¿Cuántos centímetros era más alto Tomás que Julieta cuando tenían 12 años?
5. ¿En qué periodo Raúl tenía menor estatura que Julieta y Tomás?
6. ¿En qué periodo Raúl era mayor que Tomás y menor que Julieta?
7. ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Julieta?
8. ¿A qué edad Raúl tenía la misma estatura que Tomás?
9. ¿Quién creció más de Julieta, Tomás y Raúl, en el periodo de los 11 a los 14 años? ¿Quién creció menos?

10. Dibuja la gráfica de crecimiento de Julieta, Tomás y Raúl hasta que cumplan 30 años.

### Hoja de trabajo de la primera clase

La siguiente gráfica muestra los datos del movimiento de un automóvil entre las 8:00 y las 14:30 horas.



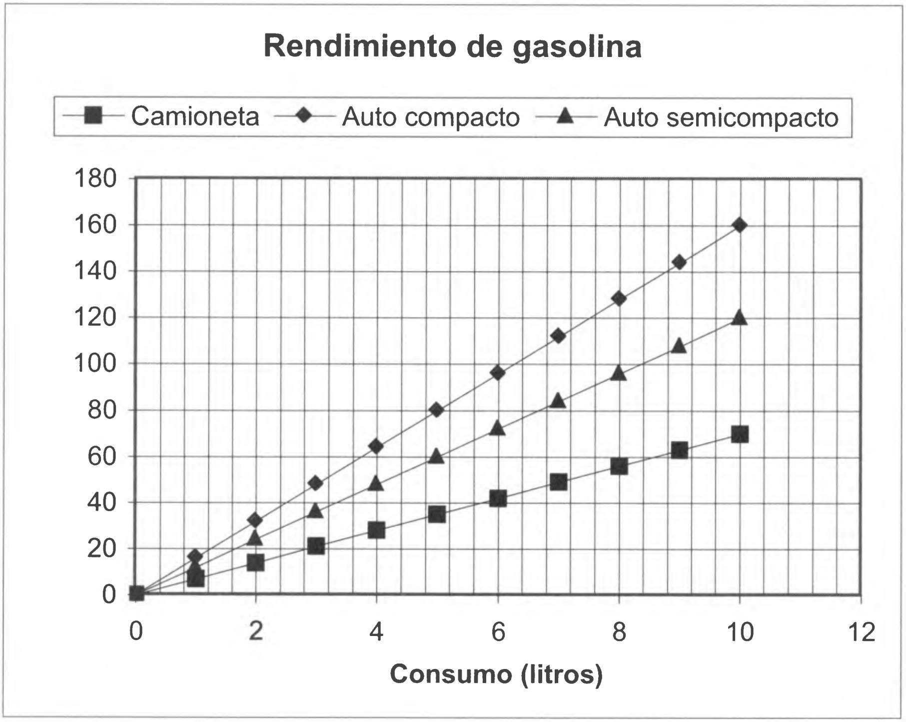

1. ¿Cuántos kilómetros recorrió el automóvil de las 8:00 a las 10:00 horas?
2. ¿Cuántos entre las 10:00 y las 11:00?
3. ¿Cuántos entre las 11:00 y las 14:00 horas?
4. ¿En qué momento retrocedió el automóvil?
5. ¿Cuántos kilómetros retrocedió?
6. ¿A cuántos kilómetros por hora viajó en promedio el automóvil entre las 13:00 y las 14:30 horas?

7. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanzó durante todo el recorrido?
8. ¿En qué intervalo alcanzó esa velocidad?
9. ¿En qué intervalo viajó más despacio el automóvil?
10. ¿A qué velocidad viajó durante ese tiempo?

## Hoja de trabajo de la segunda clase

Observa las siguientes gráficas.

1. ¿Qué información puedes obtener?

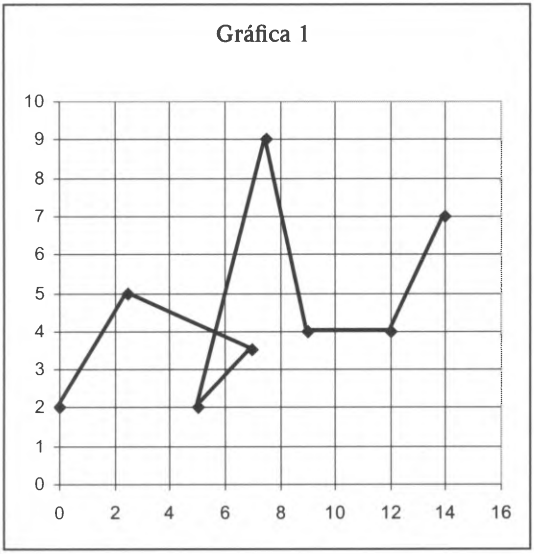


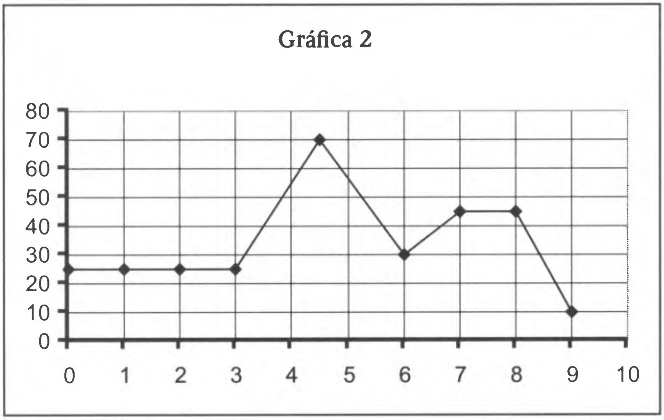
2. ¿Cuál de los tres automóviles tiene un mayor rendimiento de combustible? ¿Cuál tiene un menor rendimiento?
3. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer cada uno de los automóviles si su consumo de combustible es de 4.5 litros?
4. ¿Cuánto combustible consume cada vehículo si su rendimiento es de 87 km?
5. Completa la siguiente tabla.

| Consumo (litros) | Rendimiento (km) | | |
|---|---|---|---|
| | Camioneta | Auto semicompacto | Auto compacto |
| 11 | | | |
| 18.5 | | | |
| | | 400 | |
| | | | 366 |
| | 297.5 | | |
| $m$ | | | |
| | | $n$ | |
| | $q$ | | |

6. Si se requiere que por 9 litros de consumo de combustible la camioneta tenga un rendimiento de 76.5 km, ¿cuál será la gráfica y la fórmula para este caso?

## Gráficas usadas en la sesión con los maestros para inventar historias



El módulo 7: *Lectura y construcción de gráficas cartesianas*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Álgebra
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacán 1031. CP. 03100, Col. del Valle.